



مای درس

گروه آموزشی عصر



آنچه در این فصل می‌فوانیم: -www.my

مروی بر زاویه‌ها و قفیه‌ی فطوطی موازی و مورب

بررسی ویژگی‌های مثلث و همنهشتی

بررسی مساحت و اجزای مثلث

بررسی مثلث‌های خاص

نامساوی‌های مثلثی

ترسیم مثلث

یاسین گیلاسی



گام صفر: زاویه

تعریف: فضای میان دو نیم خط را زاویه می‌نامیم (پیزی نراره که!!!). اساساً واحدهای اندازه‌گیری زاویه واسه ما بچه دبیرستانیا دوتاس:

درجه (Degree): درجس دیکه! مثلاً یه دایره ۳۶۰ درجس. علامت درجه هم همون دایره‌ی کوچکی که بالای عدد مورد نظر قرار می‌گیره. ($^{\circ}$)

رادیان (Radian): فاصله که دایره درسته که ۳۶۰ درجه است ولی در عین حال 2π رادیان هم هست.

پس که درجه رو با حرف D و رادیان رو با حرف R نشون بدم لذا با قاطعیت می‌گیم: $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

اضافیات کسل کننده:

اگر زاویه‌ی x برابر ۹۰ درجه باشد آن را قائمه و اگر ۱۸۰ درجه باشد آن را نیم صفحه می‌گوییم.

اگر مجموع دو زاویه x و y برابر ۹۰ باشد آن دو زاویه را متمم و اگر ۱۸۰ درجه باشد آن‌ها را مکمل یکدیگر می‌نامیم.

اگر دو زاویه دارای یک ضلع مشترک باشند به شکلی که رأسشان مشترک و اضلاع غیرمشترک آن‌ها در طرفین ضلع مشترک واقع شود، آن‌ها را مجاور هم می‌خوانیم.

دو زاویه‌ی مجاور و مکمل هم را مجانب می‌گوییم.

دیکه مفاهیمی مئه زاویه‌ی بسته (هاده)، باز (منفرجه)، زاویه‌ی فاربی، زاویه‌ی متقابل به رأس و پیزایی تو این حوالی رو مطمئناً می‌دونید و من تکرار نمی‌کنم و تنها به یک مرور تصویری اکتفا می‌نمایم.



خطوط موازی و مورب

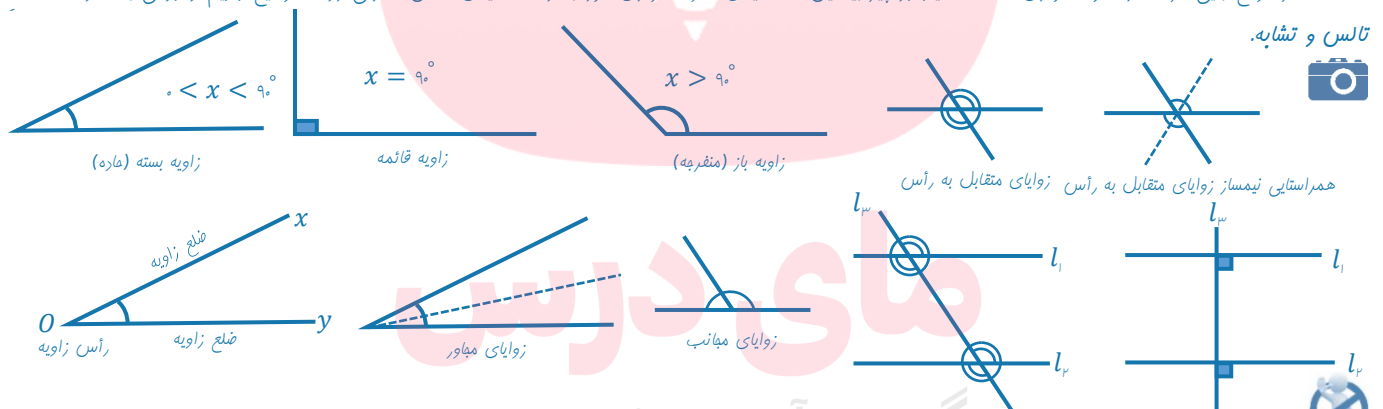
اگر دو خط موازی داشته و یک خط مورب آن‌ها را قطع کند، چهار زاویه‌ی منفرجه و چهار زاویه‌ی حاده‌ی برابر پدید می‌آید.

عکس این مطلب هم نیز صادق (یعنی اگر شما ۸ زاویه با این ویژگی و شکل بایی دیدین، برونید که خطوط l_1 و l_2 با هم موازیند)

در به حالت خاص، اگر خط مورب بر خطوط موازی عمود باشه، همه‌ی هشت زاویه برابر و قائم می‌شن!



هر موقع بایی حرف از خطوط موازی شن، حتماً یاد دو چیز بیافتین: ۱- قضیه‌ی خطوط موازی مورب و ۲- قضیه‌ی تالس!!! اولی رو که توضیح داریم و دومی باشه واسه فصل تالس و تشابه.



در باب حل مسائل زاویه‌دار می‌شه گفت ابتدا واسه اون زاویه‌ای که می‌فواین مقدارش رو پیدا کنین اسم بذارین. مثلاً زاویه x یا α (معمولاً از حروف کوچک لاتین استفاده می‌کنن). اگر کم تعداد زاویه‌ها زیاده از نام رئوس و اندیس استفاده کنین، مثلاً زاویه‌ی A_1 یا B_3 . بعد بایر دنبال ایماز چند معادله بگردین تا نهایتاً به مقدار مورد نظر برسین. تمام تلاشتون این باشه که بین زاویه‌ی خودتون و زاویه‌های همسایه یه رابطه پیدا کنین. یه نگاهی به شکل و اطراف زاویه بندازین؛ از چند حالت نمی‌تونه فارج باشه: اول اینکه زاویه‌ی شما داخل یک چند ضلعی قرار داره، پس از این نکته استفاده می‌کنیم که مجموع زوایای داخلی اون چند ضلعی میشه یه مقدار ثابت. مثلاً واسه مثلث میشه ۱۸۰ درجه! واسه چهار ضلعی میشه ۳۶۰ درجه و ...

دوم اینکه زوایای مجاور یا مجانب با زاویه‌ی ما خیلی به درد بخور هستن. یعنی که اونارو حساب کنیم شاید مشکل حل!

سوم شاید تو شکل بتونیم از خطوط موازی و مورب استفاده کنیم.

چهارم وجود مثلث متساوی الساقین و نیمساز در شکل کلایت از دو زاویه برابر داره! مثلث قائم الزاویه هم داره میزنه که دو زاویه‌ی متمم داریم و یک زاویه ۹۰ درجه دلبندیم! دست آفر مثلث متساوی الاضلاع هم سه زاویه‌ی ۶۰ درجه و سه ضلع برابر رو واسمون مشفق می‌کنه!

یه وقتایی در شکل دایره داریم، وجود دایره نشون میده که قاعدتاً ما بایر روابط بین زاویه‌ها و کمان‌ها رو وارد بازی کنیم.

ششم هر آنگه ما را به کار آید ...

در نهایت بشینین این رابطه‌ها رو مثل یه پازل چوری کنار هم بپنین که به مرادتون برسین! (توجه کنید که مراد حل مسئله است و لاغیر!)

تست ۱: اگر x, y دو زاویه باشند که اضلاع آنها دوجه دو بر هم عمودند یا با یکدیگر موازیند و $\hat{x} < 90^\circ$ ، آنگاه:

$$\hat{x} = \hat{y} \quad (1)$$

$$\hat{y} > 90^\circ \quad (3)$$

(۴) هر سه گزینه می تواند صحیح باشد

تست ۲: اگر دو زاویه $b + \frac{a}{4}$ و $\frac{a}{4} + 2b$ مجانب بوده و دو زاویه $\frac{a}{4}$ و $\frac{4a}{3}$ مجاور باشند، به گونه ای که زاویه بین نیمسازهای آنها

۱۱۰ درجه باشد، متمم b برابر با کدام گزینه خواهد بود؟

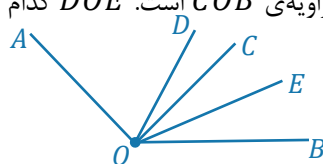
- (۱) 20° (۲) 70° (۳) 30° (۴) 60°

تست ۳: در مثلث ABC ، نقطه D به گونه ای روی ضلع BC قرار دارد که $\hat{ADC} - \hat{ADB} = 40^\circ$ است. اگر AD را از سمت D به

اندازه DC امتداد دهیم تا نقطه E حاصل شود، آنگاه اندازه زاویه $\hat{CED}$ کدام است؟

- (۱) 55° (۲) 60° (۳) 65° (۴) 45°

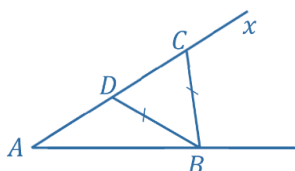
تست ۴: در شکل زیر، OC بر OA عمود است. در ضمن OD نیمساز زاویه $\hat{AOB}$ و OE نیمساز زاویه $\hat{COB}$ است. $\hat{DOE}$ کدام



است؟

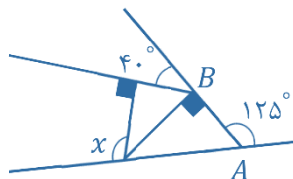
- (۱) 45° (۲) 50° (۳) 35° (۴) غیر قابل تعیین

تست ۵: در شکل مقابل، زاویه $\hat{BCX} = 114^\circ$ است. زاویه $\hat{CBD}$ چند درجه است؟ (تجربی - ۸۴)



- (۱) 44° (۲) 46° (۳) 48° (۴) 52°

تست ۶: در شکل مقابل $\hat{A} = 125^\circ$ و $\hat{B} = 40^\circ$ است. زاویه $\hat{x}$ چند درجه است؟ (تجربی - ۸۷)

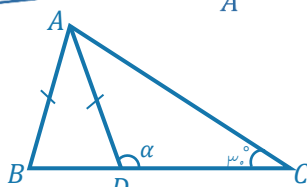


- (۱) 105° (۲) 110°

- (۳) 115° (۴) 125°

تست ۷: در شکل مقابل AD نیمساز زاویه A است. اندازه زاویه α چند درجه است؟

- (۱) 105° (۲) 110° (۳) 115° (۴) 120°



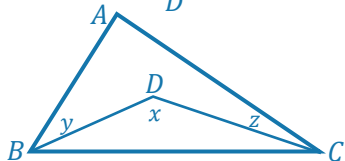
تست ۸: در شکل زیر، اندازه زاویه A همواره برابر کدام است؟

$$x - y - z \quad (1)$$

$$x - 2y - 2z \quad (2)$$

$$180^\circ - x + y + z \quad (3)$$

$$x + y + z - 180^\circ \quad (4)$$



تست ۹: در مثلث ABC ، متمم زاویه $\hat{C}$ با زاویه خارجی یکی از زوایای $\hat{A}$ یا $\hat{B}$ برابر است. حدود زاویه $\hat{C}$ چند درجه است؟

$$60^\circ < \hat{C} < 90^\circ \quad (1)$$

$$30^\circ < \hat{C} < 45^\circ \quad (2)$$

$$45^\circ < \hat{C} < 60^\circ \quad (3)$$

$$45^\circ < \hat{C} < 60^\circ \quad (4)$$

تست ۱۰: مثلث ABC در رأس A قائمه است و $AB < AC$. ارتفاع AH را رسم می کنیم و روی HC طول HD را مساوی BH

جدا می کنیم. از رأس C نیز عمود CK را بر امتداد AD رسم می کنیم. کدام گزینه صحیح است؟

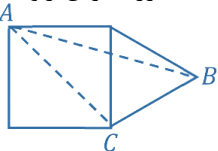
$$\hat{ACD} = \hat{DCK} \quad (1)$$

$$\hat{ACD} = 2\hat{DCK} \quad (2)$$

$$\hat{ACD} = 45^\circ + \hat{DCK} \quad (3)$$

$$\hat{ACD} = 90^\circ - \hat{DCK} \quad (4)$$

تست ۱۱: در شکل زیر بر روی ضلع مربعی مفروض، یک مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است. در مثلث ABC بزرگ‌ترین زاویه



چند برابر کوچک‌ترین زاویه است؟ (تجربی خارج - ۸۸)

- (۱) ۳ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{9}{2}$

تست ۱۲: در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره‌خط‌های $BM = BA$ و $CN = CA$ را جدا می‌کنیم. اگر زاویه $\hat{A} = 72^\circ$ باشد،

زاویه $\hat{MAN}$ چند درجه است؟ (تجربی - ۸۶)

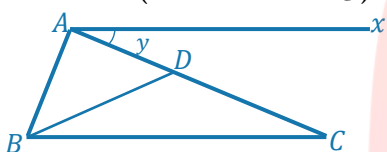
- (۱) ۵۴ (۲) ۵۲ (۳) ۴۸ (۴) ۴۲

تست ۱۳: در مثلث ABC ($\hat{C} = 24^\circ, \hat{A} = 90^\circ$) از رأس C خطی بر CA عمود کرده و بر روی آن، $CD = CB$ را طوری جدا

می‌کنیم که BD ضلع AC را قطع کند. زاویه $\hat{DBC}$ چند درجه است؟ (تجربی خارج - ۹۴)

- (۱) ۳۳ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۸

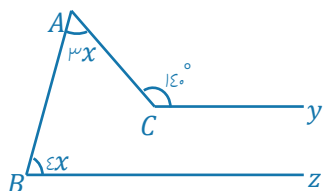
تست ۱۴: در شکل زیر داریم $AB \parallel DC$ و $\hat{ABD} = 40^\circ$ ، اندازه‌ی متمم زاویه‌ی y کدام است؟ ($AB = BD = DC$)



- (۱) 28° (۲) 35° (۳) 62° (۴) 55°

تست ۱۵: در شکل زیر $Bz \parallel Cy$ است. x چند درجه است؟

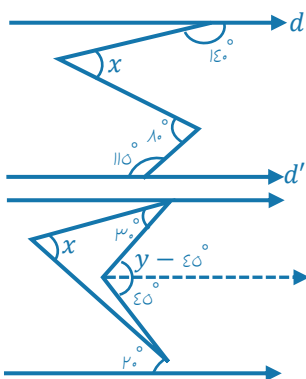
- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱



تست ۱۶: در مثلث ABC ، نیمساز زوایای داخلی A و B در نقطه‌ی O تقاطعند. از نقطه‌ی O خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم

تا CB, CA را در K, L قطع کند. کدام است $BK + AL$ ؟ (هنر خارج - ۹۶)

- (۱) AC (۲) BC (۳) KL (۴) $LC + KC$



تست ۱۷: در شکل مقابل $d \parallel d'$ است، زاویه‌ی x برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) 40° (۲) 45° (۳) 50° (۴) 55°

تست ۱۸: در شکل زیر اندازه‌ی زاویه $y - x$ چند درجه است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۰ (۴) ۵۵

پنگ اول بهتر از صلح آفر!!!

آقایان و خانم‌ها! در بسیاری از مسایل هندسی، رسم صبیح شکل مورد نیاز بخشی از حل مسئله محسوب می‌شود. لذا توجه به برخی قراردادهای نام‌گذاری ضروری. مثلاً اینکه همواره نقاط و رأس‌ها را با حروف بزرگ، طول اضلاع را با حروف کوچک و یا دو حرف بزرگ در کنار هم نشان می‌دهیم و یا اینکه یک ضلعی همواره با قرار گرفتن نام رأس‌هایش در کنار هم مشخص می‌شود. در مثلث ABC نیز می‌توانیم بنا به همین قراردادهای اضلاع و اجزا را اینگونه نام‌گذاری کنیم:

نام اصلی	نام فرعی
ضلع AB (رو به روی زاویه $\hat{C}$)	c
ارتفاع وارد بر ضلع AB	h_c
نیمساز وارد بر ضلع AB - نیمساز زاویه $\hat{C}$	d_c
میانه‌ی وارد بر ضلع AB	m_c

میانه = Median ارتفاع = Height نیمساز = Bisector (البته معمولاً به دلیل عدم همپوشانی، نیمساز را با حرف d نشان می‌دهیم)



گام اول: همه چیز در مورد مثلث‌ها

تعریف: یک سه ضلعی را مثلث می‌گویند!



مثلث هیچ قطری ندارد.

مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰ و مجموع زوایای خارجی آن ۳۶۰ درجه است.

مقدار هر زاویه‌ی خارجی در آن برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی دیگر.

در یک مثلث همواره بزرگ‌ترین زاویه، بزرگ‌تر یا مساوی ۶۰ درجه است. (پیوست ۱)

مساحت یک مثلث در حالت کلی برابر است با نصف حاصل ضرب هر ارتفاع در قاعده‌ی نظیرش و یا برابر است با نصف حاصل ضرب دو

ضلع در سینوس زاویه‌ی بینشان. (پیوست ۲)

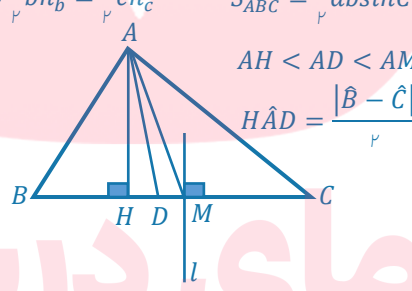
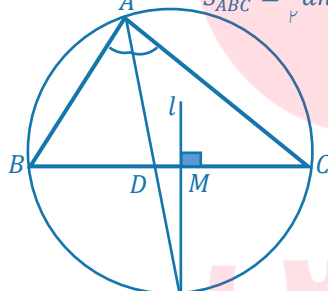
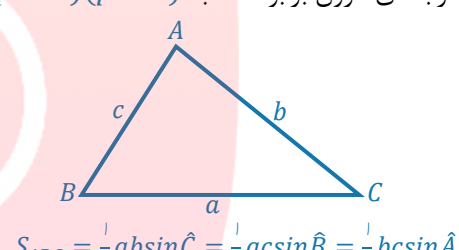
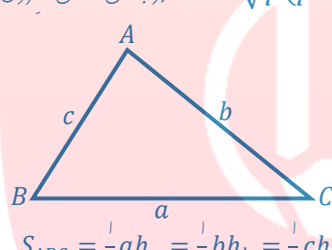
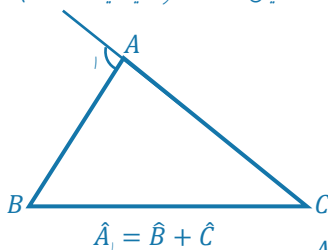
در مثلث ABC ، اگر $AB < AC$ باشد، آنگاه همواره ترتیب نیمساز AD ، میانه‌ی AM ، ارتفاع AH و عمود منصف ضلع BC به شکل

زیر خواهد. (مرور تصویری) (ارتفاع میافتد طرف ضلع کوچک‌تر و میانه میرسد سمت ضلع بزرگ‌تر و نیمسازم بینشون) (پیوست ۳)

محل هم‌رسانی نیمساز هر زاویه در یک مثلث و عمود منصف ضلع مقابلش، بر روی دایره‌ی محیطی آن مثلث واقع است. (پیوست ۴)

قضیه‌ی هرون: اگر از این پس قرارداد کنیم که محیط یک مثلث را با $2p$ نمایش دهیم، آنگاه در مثلث ABC با اضلاع a, b, c مساحت

S و محیط $2p$ رابطه‌ی هرون برابر است با: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (رابطه‌ی آقای هرون پلی است میان مساحت و محیط یک مثلث).



تست ۱۹: اندازه‌ی زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۸، ۵ و ۲ می‌باشد. اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی این مثلث کدام است؟

- (۱) ۸۴° (۲) ۸۶° (۳) ۷۴° (۴) ۷۶°

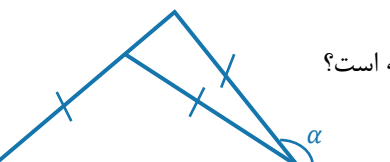
تست ۲۰: در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، قاعده‌ی BC را از دو طرف به اندازه ساق‌ها، تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث

ADE کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی آن است؟ (تجربی خارج - ۹۳)

- (۱) ۱ (۲) ۳/۲ (۳) ۲ (۴) ۳

تست ۲۱: در شکل مقابل $a = ۱۰۵^\circ$ است. کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث‌های موجود چند درجه است؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۴۰ (۳) ۷۵ (۴) ۳۰



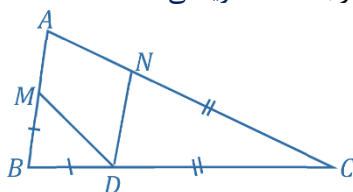
تست ۲۲: در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. اگر زاویه‌ی

خارجی رأس A از مثلث ABD برابر ۱۰۲ درجه باشد، کوچک‌ترین زاویه‌ی مثلث ABC ، چند درجه است؟ (تجربی - ۹۴)

- (۱) ۳۴ (۲) ۳۸ (۳) ۴۲ (۴) ۴۴

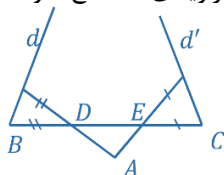


تست ۲۳: در شکل مقابل، $\hat{A} = 58^\circ$ ، $BM = BD$ و $CN = CD$ ، زاویه $\widehat{MDN}$ چند درجه است؟ (ریاضی - ۹۱)



- (۱) ۵۸ (۲) ۵۹ (۳) ۶۱ (۴) ۶۲

تست ۲۴: در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی الساقین و زاویه $\hat{A} = 100^\circ$ دو خط d, d' با چه زاویه‌ای متقاطع خواهند بود؟



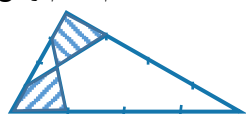
(ریاضی - ۸۸)

- (۱) 20° (۲) 50° (۳) 45° (۴) 40°

تست ۲۵: در مثلث ABC ، $\hat{B} = 60^\circ$ ، $\hat{A} = 40^\circ$ و H محل تلاقی سه ارتفاع است. زاویه $\widehat{AHC}$ چند برابر $\widehat{BHC}$ است؟

- (۱) $\frac{7}{6}$ (۲) $\frac{6}{7}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{6}{5}$

تست ۲۶: در شکل مقابل، هر ضلع مثلث به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی سایه زده نسبت به هم کدام وضع را



دارند؟ (ریاضی خارج - ۸۹)

- (۱) هم مساحت (۲) هم محیط (۳) همنهشت (۴) متشابه

تست ۲۷: در مثلث ABC ، میانه AM و نیمساز داخلی AD رسم شده‌اند. کدام نامساوی همواره درست است؟ (ریاضی - ۹۴)

- (۱) $AM < BC$ (۲) $AM < AB$ (۳) $AD < AB$ (۴) $AD < AM$

تست ۲۸: زاویه های داخلی مثلثی با اعداد ۳ و ۴ و ۵ متناسبند. اگر کوچک ترین ضلع این مثلث $3\sqrt{3}$ باشد، آنگاه مساحت و بزرگ ترین

ضلع این مثلث (به ترتیب از راست به چپ) چند برابر $3 + \sqrt{3}$ است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ و $\frac{27}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ و $\frac{27}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ و $\frac{27}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$ و $\frac{27}{8}$

تست ۲۹: مساحت مثلثی به اضلاع ۷، ۹ و ۱۲ واحد کدام است؟ (ریاضی - ۹۳)

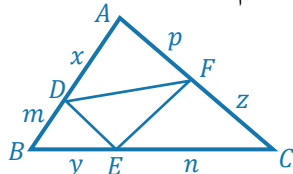
- (۱) $15\sqrt{2}$ (۲) $14\sqrt{3}$ (۳) $12\sqrt{5}$ (۴) $14\sqrt{5}$

تست ۳۰: در مثلث ABC ($a = 4, b = 7, c = 9$) از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می کنیم تا نیمسازهای زوایای داخلی

B, C را به ترتیب در D, E قطع کند. مساحت چهارضلعی $BECD$ کدام است؟

- (۱) $60\sqrt{5}$ (۲) $30\sqrt{5}$ (۳) $24\sqrt{3}$ (۴) $48\sqrt{5}$

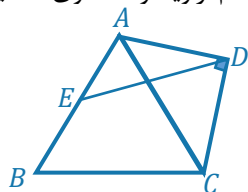
تست ۳۱: مطابق شکل مثلث DEF را در مثلث ABC محاط نموده ایم. نسبت مساحت این دو مثلث کدام است؟



- (۱) $\frac{abc}{xnz+myp}$ (۲) $\frac{bmy+axp+cnz}{abc}$ (۳) $\frac{mnp+xyz}{abc}$ (۴) $\frac{(abc)^2}{xyzmnp}$

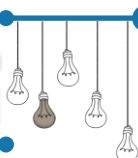
قضیه سینوس ها؛ در مثلث ABC همواره داریم: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ (شعاع دایره محیطی) (پیوست ۵)

تست ۳۲: در شکل زیر، مثلث متساوی الاضلاع ABC و قائم الزاویه ADC و نقطه E وسط ضلع AB قرار



دارد. اندازه ی زاویه $\widehat{AED}$ چند درجه است؟

- (۱) 30° (۲) 45° (۳) 50° (۴) 40°





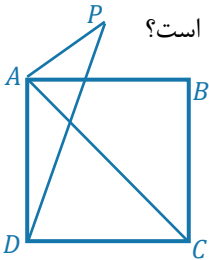
تست ۳۳: در شکل روبه‌رو $ABCD$ مربع است. $\hat{PAC} = 90^\circ$ و $PD = AC$. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{ADP}$ چند درجه است؟

۱۵ (۴)

۲۲/۵ (۳)

۲۰ (۲)

۱۲/۵ (۱)



قضیه‌ی کسینوس‌ها؛ در مثلث ABC همواره سه رابطه‌ی زیر برقرار است: (پیوست ۶)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



در یک مثلث همیشه دو تا از زاویه‌ها هاده هستن و زاویه‌ی سوم می‌تونه هاده، قائمه و یا منفرجه باشه که البته قطعاً بزرگ‌تر یا مساوی 90° دریس!

مثلاً فرض کنیم مثلاً $\hat{A} = 90^\circ$ باشه، یعنی مثلث ABC قائم‌الزاویه. پس طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها $a^2 = b^2 + c^2$ که این همون رابطه‌ی

پیتاگورس!

ضمناً اگر فرض کنیم $\hat{A} < 90^\circ$ ، یعنی مثلث ABC هاده‌الزاویه. پس طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ که در

مثبت

نتیجه خواهیم داشت: $a^2 < b^2 + c^2$.

نهایتاً اگر فرض کنیم $\hat{A} > 90^\circ$ ، یعنی مثلث ABC منفرجه‌الزاویه. پس طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ که

منفی

در نتیجه خواهیم داشت: $a^2 > b^2 + c^2$.



با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌توان نشان داد در مثلث ABC : (پیوست ۷)

$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$2m_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}$$

$$2m_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$$

از خود این مطلب می‌شه نتیجه گرفت ترتیب اندازه‌ی میانه‌های یک مثلث عکس ترتیب اضلاعش! یعنی اگر $a < b < c$ اون وقت $m_c < m_b < m_a$

یعنی میانه‌ی بین دو تا ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌ترین؛ میانه‌ی بین دو ضلع کوچک‌تر هم کوچک‌ترین!!!

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ همواره } ABC$$



تست ۳۴: مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟ (ریاضی - ۹۴)

۲۴ (۴)

۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)



مثلث متساوی‌الساقین

تعریف: مثلثی که دارای دو ضلع برابر باشد را متساوی‌الساقین می‌گوییم. این دو ضلع برابر را ساق‌های مثلث و ضلع سوم را قاعده می‌نامیم.



به طور کلی، آله در یه مثلث، دو جز مثلاً دو تا زاویه، دو تا ضلع، دو تا ارتفاع و ... با هم برابر بودن، اون مثلث مراقل متساوی الساقین فواهر بود.

www.my-dars.ir



زوایای مجاور به ساق‌ها و همچنین ارتفاع‌ها، نیمسازها و میانه‌های نظیر ساق‌ها با یکدیگر برابرند. (پیوست ۸)

عمود منصف قاعده، ارتفاع و نیمساز و میانه‌ی خارج شده از رأس مثلث، همگی بر هم منطبقند. (پیوست ۹)

(عکسش هم هست، یعنی آله در مثلثی همپین هارته‌ای رخ دار اون مثلث مراقل متساوی الساقین)

نیمساز زاویه‌ی خارجی رأس، موازی با قاعده‌ی آن است. (پیوست ۱۰)

(عکسش هم هست، یعنی آله در مثلثی همپین هارته‌ای رخ دار اون مثلث ...)

مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی دلخواه روی قاعده‌ی مثلث تا دو ساق برابر است با ارتفاع وارد بر ساق. (فاصله‌ی یک نقطه تا یک خط یعنی طول عمود

رسم شده از آن نقطه تا خط مورد نظر!!!) (پیوست ۱۱)

قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه‌ی دلخواه روی امتداد قاعده‌ی مثلث تا دو ساق برابر است با ارتفاع وارد بر ساق. (پیوست ۱۲)

درسنامه

زاویه و مثلث



مجموع پاره‌خط‌هایی که از نقطه‌ای دلخواه روی قاعده‌ی مثلث موازی دو ساق تا آن‌ها رسم می‌شود برابر است با ساق مثلث. (پوست ۱۳)

تست ۳۵: در مثلث ABC ($AB = AC$)، نیمساز خارجی A و نیمساز داخلی B یکدیگر را در نقطه‌ی D قطع می‌کنند. طول پاره-خط AD برابر با کدام یک از اجزای مثلث ABC است؟

(۱) قاعده (۲) ساق (۳) ارتفاع ساق (۴) میانه‌ی قاعده

تست ۳۶: در مثلث ABC ، نیمساز داخلی زاویه‌ی A بر میانه‌ی m_c عمود است. $\frac{b}{c}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{4}{11}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{2}{9}$

تست ۳۷: یکی از زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۱۰۰ درجه است. نیمساز خارجی یکی از زاویه‌ها، ضلع مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

(۱) 20° (۲) 40° (۳) 30° (۴) 50°

تست ۳۸: در مثلثی به اضلاع ۵ و ۵ و ۶ واحد نقطه‌ی M ضلع بزرگ‌تر را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده است. مجموع فواصل M از دو ساق این مثلث کدام است؟ (ریاضی - ۸۴)

(۱) $3/6$ (۲) $4/5$ (۳) $4/8$ (۴) $5/4$

تست ۳۹: ارتفاع وارد بر قاعده در یک مثلث متساوی‌الساقین، واسطه‌ی هندسی قاعده و ساق است. نسبت قاعده به ساق آن کدام است؟

(۱) $\sqrt{2} - 1$ (۲) $2\sqrt{2} - 2$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

تست ۴۰: نقطه‌ی D بر روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) به گونه‌ای قرار دارد که فاصله‌ی آن از ساق‌ها ۳ و ۵ واحد است. اگر $BC = 4\sqrt{5}$ باشد، طول ساق این مثلث کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

تست ۴۱: در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ با قاعده‌های $AB = 4$ و $CD = 8$ و ساق $AD = BC = 2\sqrt{17}$ ، نقطه‌ی E پای ارتفاع AE است. مجموع فواصل E از قطرهای این دوزنقه کدام است؟

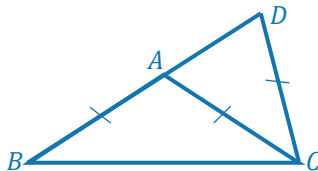
(۱) $6/4$ (۲) $6/5$ (۳) $6/6$ (۴) $6/8$

تست ۴۲: در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) نقطه‌ی O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه‌ی B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟ (ریاضی - ۹۴)

(۱) قائم‌الزاویه (۲) متساوی‌الساقین (۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین (۴) غیر مشخص

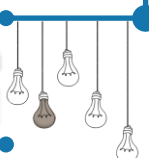
تست ۴۳: در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، ساق BA را از نقطه‌ی B به اندازه‌ی قاعده BC تا نقطه‌ی D ، امتداد می‌دهیم. اگر $CD = CA$ باشد، زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟ (ریاضی خارج - ۹۴)

(۱) ۱۰۲ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۰۸ (۴) ۱۱۲



تست ۴۴: در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، ساق AB را به اندازه‌ی $BD = BC$ امتداد می‌دهیم. اگر CD برابر AC باشد، زاویه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟ (تجربی خارج - ۹۴)

(۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶



تست ۴۵: در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) در رأس A خط عمود بر AC نیمساز زاویه داخلی C را در D قطع می-کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد. AD برابر کدام است؟ (تجربی - ۹۴)

- (۱) AM (۲) MD (۳) MC (۴) $\frac{1}{2}AC$

تست ۴۶: در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 108^\circ$ است. ضلع BC را از هر طرف به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می-دهیم. کوچک‌ترین زاویه خارجی مثلث ADE چند درجه است؟ (تجربی - ۹۳)

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۵۴

مثلث متساوی الاضلاع

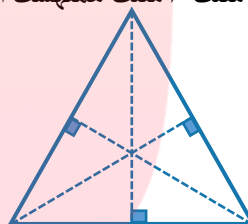
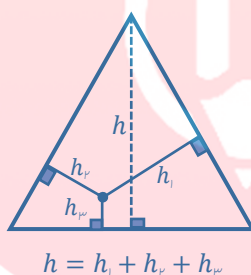
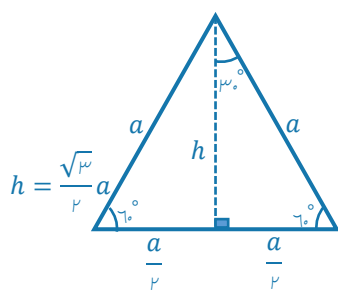
تعریف: مثلثی که هر سه ضلع آن با هم برابر باشند.

هر مثلث متساوی الاضلاع در حالت کلی یک مثلث متساوی الساقین است، لذا تمام ویژگی‌های مثلث متساوی الساقین برای آن برقرار است. هر سه زاویه آن با یکدیگر برابر و مساوی 60° هستند.

مجموع فواصل هر نقطه‌ای دلخواه درون آن از سه ضلع برابر است با ارتفاع مثلث. (پیوست ۱۴)

در این مثلث ارتفاع، میانه، نیمساز رؤس و عمود منصف اضلاع بر هم منطبقند و اندازه‌ی آن‌ها برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ برابر اندازه‌ی ضلع مثلث.

اگر ضلع مثلث را a بنامیم، آنگاه مساحت مثلث برابر است با: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ از برخورد میانه‌های این مثلث ۶ مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود.



تست ۴۷: یک مثلث متساوی الاضلاع به سه مثلث هم‌نهشت تقسیم شده است. زاویه‌های هر مثلث هم‌نهشت کدام است؟

(تجربی خارج - ۸۷)

- (۱) ۶۰ و ۶۰ و ۶۰ (۲) ۲۰ و ۳۰ و ۹۰ (۳) ۳۰ و ۳۰ و ۱۲۰ (۴) ۳۰ و ۶۰ و ۹۰

تست ۴۸: مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\sqrt{6}$ واحد را به سه مثلث هم‌نهشت تقسیم کرده‌ایم. اندازه‌ی ضلع نابزرگ‌تر از یک مثلث هم‌نهشت چقدر است؟ (ریاضی - ۸۶)

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\sqrt{3}$

تست ۴۹: در داخل یک مربع به ضلع $\sqrt{3}$ ، مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $\sqrt{3}$ رسم می‌کنیم. مجموع فواصل مرکز مربع از اضلاع این

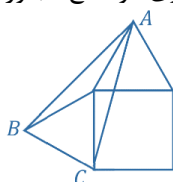
مثلث کدام است؟ (ریاضی خارج - ۸۷)

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

تست ۵۰: در شکل زیر، طول ضلع مربع ۲ واحد است. دو مثلث متساوی الاضلاع بر روی دو ضلع مجاور آن ساخته شده است. مساحت

مثلث ABC کدام است؟ (ریاضی - ۹۲)

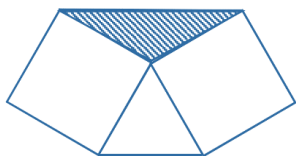
- (۱) $\sqrt{6}$ (۲) $1 + \sqrt{3}$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۴) ۴



تست ۵۱: یک ضلع مثلث متساوی الاضلاع به طول ۴ واحد، قطر یک مربع است. کوتاه‌ترین فاصله‌ی رأس دیگر مربع از ضلع این مثلث کدام است؟ (ریاضی - ۹۲)

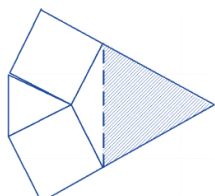
- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) ۴

تست ۵۲: در یک مثلث متساوی الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (ریاضی - ۹۳)



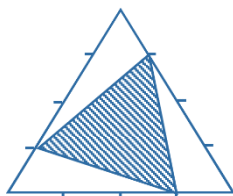
- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{3}$

تست ۵۳: در یک مثلث متساوی الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (ریاضی خارج - ۹۳)



- (۱) ۲ (۲) $2/25$ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۵۴: هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع به نسبت‌های ۱ و ۳ تقسیم شده است. مساحت مثلث هاشور زده چند برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع است؟ (ریاضی خارج - ۸۸)



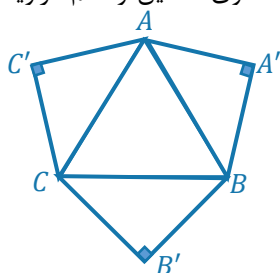
- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{7}{16}$ (۴) $\frac{5}{8}$

تست ۵۵: بر روی دو ضلع مثلث متساوی الاضلاع، دو مربع ساخته ایم. اگر A رأسی از مثلث متساوی الاضلاع و O و O' نقطه‌ی برخورد قطرهای مربع‌ها باشند، آنگاه کدام گزینه درباره‌ی مثلث AOO' درست است؟



- (۱) فقط قائم الزویه (۲) فقط متساوی الساقین (۳) قائم الزویه‌ی متساوی الساقین (۴) نامشخص

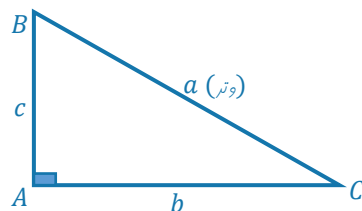
تست ۵۶: مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $2\sqrt{2}$ در اختیار داریم. بر روی هر ضلع آن، مثلث‌های متساوی الساقین و قائم الزویه‌ای مطابق شکل ایجاد می‌کنیم. مساحت مثلث $A'B'C'$ برابر با کدام گزینه خواهد بود؟



- (۱) $2 + 3\sqrt{2}$ (۲) $2(\sqrt{3} + 1)$ (۳) $3(\sqrt{2} + 1)$ (۴) $2\sqrt{3} + 3$

مثلث قائم الزویه

تعریف: مثلثی را قائم الزویه می‌نامیم هرگاه یکی از زوایای آن قائمه باشد. در این مثلث بزرگ‌ترین ضلع، یعنی ضلع مقابل به زاویه‌ی قائمه را وتر می‌گوییم.



www.my-dars.ir

رابطه‌ی فیثاغورس در آن برقرار است یعنی: $a^2 = b^2 + c^2$

(و برعکس، یعنی اگر مثلثی با اضلاع a, b, c در اختیار داشتیم که $a^2 = b^2 + c^2$ ، آنگاه مثلث ما قائم الزویه خواهد بود.)

همواره ارتفاع وارد بر وتر برابر است با: $h_a = \frac{bc}{a}$ (پیوست ۱۰)

میانهدی وارد بر وتر نصف وتر است $m_a = \frac{a}{2}$. (و برعکس، یعنی اگر مثلثی با اضلاع a, b, c در اختیار داشتیم که $m_a = \frac{a}{2}$ ، آنگاه آن مثلث قائم الزویه خواهد بود و ضلع a وتر آن است.) (پیوست ۱۶)

در یک مثلث قائم‌الزاویه با زوایای حاده 30° و 60° درجه، ضلع مقابل به زاویه 30° درجه نصف وتر و ضلع مقابل به زاویه 60° درجه، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر خواهد بود. (اگر در یک مثلث سه چیز از ۵ چیز این مثلث قائم‌الزاویه خاص مویبر باشد، همیشه گفت مثلث اولاً قائم‌الزاویه است و ثانیاً زوایای حاده 30° و 60° درجه هستند. مثلاً آله بکن در مثلثی اندازه‌ی ۲ ضلع برابر ۱۰ و ۵ و زاویه‌ی بین اونا 60° درجه است، پس مثلث قائم‌الزاویه است و...)

در یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین با زوایای حاده 45° درجه، ضلع مقابل به زاویه 45° درجه $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است. (و وتر $\sqrt{2}$ برابر اون ضلع) در یک مثلث قائم‌الزاویه با زوایای حاده 15° و 75° درجه، ارتفاع وارد بر وتر برابر است با $\frac{1}{2}$ وتر. (پیوست ۱۷)

زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر برابر است با $|\hat{B} - \hat{C}|$ (تفاضل زوایای حاده) و زاویه‌ی بین نیمساز و ارتفاع وارد بر وتر نیز برابر است با $\frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$ (نصف تفاضل زوایای حاده). (در واقع نیمساز وارد بر وتر، نیمساز زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر هم هست). (پیوست ۱۸)

در این نوع مثلث رابطه‌ی هرون را می‌توان به این شکل ساده کرد: $S = \sqrt{p(p-a)} = \sqrt{(p-b)(p-c)}$ (پیوست ۱۹)

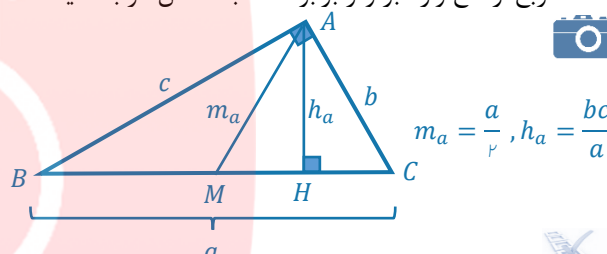
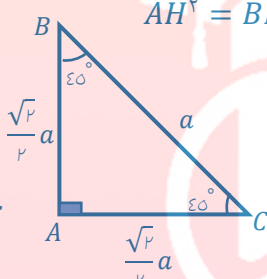
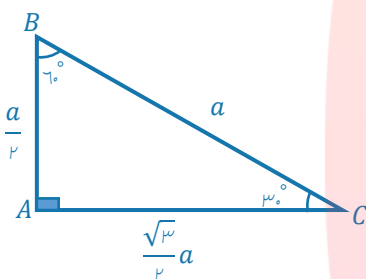
در هر مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربعات میانه‌ها برابر است با $\frac{3}{4}a^2$ مربع وتر: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}a^2$

روابط طولی (پیوست ۲۰)

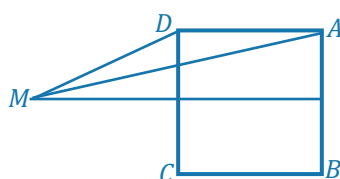
هر ضلع قائم به توان دو برابر است با حاصل ضرب سایه‌اش روی وتر در کل وتر: $AC^2 = CH \times BC$

هر ضلع قائم به توان دو برابر است با حاصل ضرب سایه‌اش روی وتر در کل وتر: $AB^2 = BH \times BC$

مربع ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب سایه‌ها: $AH^2 = BH \times CH$



تست ۵۷: بر روی عمود منصف ضلع AB از مربع $ABCD$ ، نقطه‌ی M را چنان انتخاب می‌کنیم که $DM = DA$ ، زاویه‌ی $\hat{DAM}$



کدام است؟

- (۱) 25° (۲) 20° (۳) 15° (۴) 10°

تست ۵۸: در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A} = 45^\circ$ و اندازه‌ی ارتفاع $BH = 3$ و مساحت مثلث $(1 + \sqrt{3})$ واحد مربع است. طول ضلع

BC برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) $6\sqrt{3}$ (۴) ۳

تست ۵۹: مثلث‌های قائم‌الزاویه، در یک رأس مشترک، اندازه‌ی یک ضلع قائم از آن‌ها ۱ واحد، چنان رسم می‌شوند که ضلع قائم دیگر

آن وتر مثلث قبلی است. مساحت نهمین مثلث کدام است؟ (تجربی - ۸۸)



- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

www.my-dars.ir

تست ۶۰: در داخل مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین، بزرگ‌ترین مربع ممکن را قرار می‌دهیم. نسبت مساحت این مربع به مساحت

مثلث مفروض چقدر است؟ (تجربی - ۸۵)

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{9}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

تست ۶۱: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$) اندازه‌ی وتر BC برابر ۱۰ واحد است. از نقطه‌ی A عمودی بر میانه‌ی

AM رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در نقطه‌ی N قطع کند B بین M و N است. اندازه‌ی AN کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $5\sqrt{3}$ (۴) $6\sqrt{2}$

تست ۶۲: در مثلث متساوی الساقین ABC ، $AB = AC = ۴$ و $BC = ۲\sqrt{۷}$ ضلع AC را به اندازه‌ی خود تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم ($AD = AC$). اندازه‌ی BD کدام است؟ (تجربی خارج - ۹۱)

(۱) $۲\sqrt{۱۰}$ (۲) $۴\sqrt{۲}$ (۳) ۶ (۴) ۷

تست ۶۳: در مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع ۱، بزرگ‌ترین مربع ممکن را می‌سازیم. ضلع مربع کدام است؟ (ریاضی خارج - ۹۲)

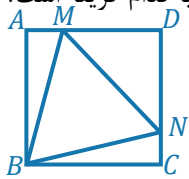
(۱) $۲\sqrt{۳} - ۳$ (۲) $\sqrt{۳} - ۱$ (۳) $\sqrt{۳} - \frac{1}{۲}$ (۴) $۲(\sqrt{۳} - ۱)$

تست ۶۴: در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A} = ۲\hat{B}$ ، کدام یک از روابط زیر بین سه ضلع این مثلث برقرار است؟ (تجربی - ۸۸)

(۱) $a^۲ = bc$ (۲) $b^۲ = ac$
(۳) $a^۲ - b^۲ = bc$ (۴) $a^۲ - c^۲ = bc$

تست ۶۵: در شکل زیر $ABCD$ مربعی به ضلع ۱ و BMN مثلثی متساوی الاضلاع است. محیط مثلث BMN برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $۳(\sqrt{۲} - ۱)$ (۲) $۳(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})$ (۳) $۳(۲ - \sqrt{۲})$ (۴) $۳(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})$



تست ۶۶: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اضلاع قائم به نسبت ۱ به ۳ و مساحت ۶۰ می‌باشد. ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟ (تجربی - ۹۱)

(۱) ۵ (۲) $۴\sqrt{۲}$ (۳) ۶ (۴) ۸

تست ۶۷: در مستطیلی به ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر عمودی بر آن قطر رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک‌تر مستطیل را M قطع کند. فاصله‌ی نقطه‌ی M از سر دیگر این قطر چند واحد است؟ (تجربی خارج - ۹۰)

(۱) ۴ (۲) $۴/۵$ (۳) ۵ (۴) ۶

تست ۶۸: در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، به اضلاع قائم ۳ و $\sqrt{۷}$ ، فاصله‌ی پای ارتفاع وارد بر وتر از وسط وتر کدام است؟ (تجربی - ۸۹)

(۱) $\frac{1}{۴}$ (۲) $\frac{1}{۳}$ (۳) $\frac{۲}{۵}$ (۴) $\frac{1}{۲}$

تست ۶۹: در مثلث ABC داریم $AC = \frac{\sqrt{۵}}{۲} AB$ و $\hat{A} = ۹۰^\circ$ ارتفاع AH و میانه‌ی AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟ (ریاضی خارج - ۸۹)

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۸

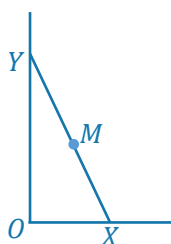
تست ۷۰: زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد ۶، ۵، ۱ می‌باشند. کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث چند برابر بزرگ‌ترین ضلع آن است؟ (تجربی - ۹۳)

(۱) $\frac{1}{۴}$ (۲) $\frac{1}{۳}$ (۳) $\frac{۲}{۵}$ (۴) $\frac{1}{۲}$

www.my-dars.ir

تست ۷۱: مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{1}{۸}$ مجذور وتر آن است. کوچک‌ترین زاویه‌ی این مثلث، چند درجه است؟ (تجربی خارج - ۹۳)

(۱) ۱۵ (۲) $۱۷/۵$ (۳) $۲۲/۵$ (۴) ۳۰

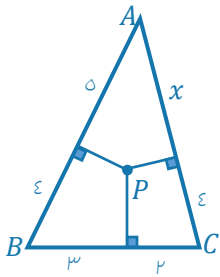


تست ۷۲: مطابق شکل، نردبان XY را به دو دیوار عمود بر هم تکیه داده‌ایم. نقطه‌ی وسط نردبان را M می‌نامیم. اگر پای نردبان (نقطه‌ی X) از کنج دیوار (نقطه‌ی O) دورتر شود، فاصله‌ی نقطه‌ی M از O ...

(۱) بیشتر می‌شود (۲) کم‌تر می‌شود (۳) تغییری نمی‌کند (۴) مقدار تغییر آن به طول نردبان بستگی دارد



تست ۷۳: در شکل مقابل نقطه‌ی دلخواه P درون مثلث ABC قرار دارد. با توجه به اندازه‌های موجود،



طول پاره‌خط x کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $\sqrt{30}$ (۳) ۶ (۴) $\sqrt{32}$

اعداد فیثاغورسی

دسته عددهای طبیعی زیر که در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کنند رو با دقت نگاه کنید. چه فوب که با دیدن دو عدد از هر دسته، عدد سوم خیلی سریع بیاد تو ذهنتون. در سرعت تست زنی چنین نکات ظریفی به شدت تأثیر گذار!!!

- ۳، ۴، ۵ و مضارب آن‌ها مثل ۶، ۸، ۱۰ و ۹، ۱۲، ۱۵ و ...
۵، ۱۲، ۱۳ و مضارب آن‌ها.
۷، ۲۴، ۲۵ و مضارب آن‌ها.
۸، ۱۵، ۱۷ و مضارب آن‌ها.



هر موقع اندازه‌ی وتر و یکی از اضلاع قائمه‌ی یک مثلث قائم‌الزاویه رو در اختیار داشتن و خواستین اندازه‌ی ضلع سوم رو به دست بیارین، اتاد مزدوج بی‌نیابت کارامد فوادر بود:

$$b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a - c)(a + c)}$$

$$b = \sqrt{22^2 - 18^2} = \sqrt{(22 - 18)(22 + 18)} = \sqrt{4 \times 40} = 4\sqrt{10}$$

فردتون امتحان کنید، مثلاً $a = 22, c = 18$ ، پس داریم:



تست ۷۴: در مثلث قائم‌الزاویه طول اضلاع قائم ۳ و ۴ است. نیم‌دایره‌ها به قطر اضلاع مثلث رسم شده‌اند. مجموع مساحت دو ناحیه‌ی



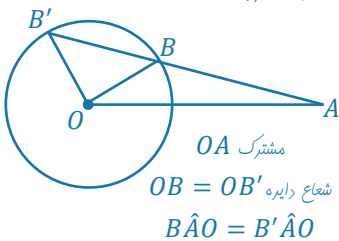
- سایه زده، کدام است؟ (تجربی خارج - ۹۳)
(۱) 2π (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) 3π

همنهشتی مثلث‌ها

تعریف: برابری همه‌ی اجزای یک مثلث شامل ضلع‌ها و زوایای نظیرشان (یعنی زاویه‌های روبه‌روی ضلع‌های برابر)، محیط و مساحت. با استفاده از حالت‌های همنهشتی می‌شه ثابت کرد دو مثلث برابرند و پس از اثبات همنهشتی اونا، می‌تونیم نتیجه بگیریم بقیه‌ی اجزای مثلث‌ها نیز به صورت نظیر به نظیر باهم مساوی هستن.

حالت‌های همنهشتی

- برابری سه ضلع (ض‌ض‌ض)
- برابری دو ضلع و زاویه‌ی بینشان (ض‌ض‌ز)
- برابری دو زاویه و یک ضلع (ز‌ز‌ض)
- در حالت کلی دو مثلث بنا به حالت (ض‌ض‌ز) همنهشت نخواهند بود. (در شکل زیر دو مثلث OAB و OAB' همنهشت نبوده در حالی که حالت $ض‌ض‌ز$ پیشون برقراره!) مگر آنکه آن زاویه‌ی برابر، بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث‌ها باشد. (می‌شه اینو با کمک قضیه‌ی سینوس‌ها ثابت کرد)



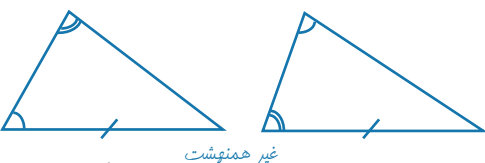
فرض کنید در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داریم:

$$a = a', b = b', \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{b \sin \hat{A}}{a}$$

$$\frac{a'}{\sin \hat{A}'} = \frac{b'}{\sin \hat{B}'} \Rightarrow \sin \hat{B}' = \frac{b' \sin \hat{A}'}{a'}$$

$\Rightarrow \sin \hat{B} = \sin \hat{B}' \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'$ (ض‌ض‌ز)

* چون زاویه‌های A و A' بزرگ‌ترین زاویه‌های مثلث‌ها فرض شدن، لذا زوایای B, B' هر دو حاده هستن!



غیر همنهشت

به طور کلی شرط لازم برای همنهشتی دو مثلث وجود سه جز نظیر برابر (ضلع یا زاویه) در اون مثلث‌هاست. بنابراین برابری سه جز نظیر در دو مثلث که مارو به یکی از حالت‌های سه‌گانه‌ی همنهشتی برسونه، در دسته‌ی حالت‌های همنهشتی قرار می‌گیره. مثلاً:

برابر دو ضلع و میانه‌ی وارد بر یکی از آن اضلاع (ض‌ض‌م) (پیوست ۲۱)

برابری دو ضلع و میانه‌ی وارد بر ضلع سوم (ض/ض/ض) (پیوست ۲۲)

برابری سه میانه (پیوست ۲۳)

برابری یک ضلع و میانه و ارتفاع وارد بر آن ضلع (پیوست ۲۴)



بالا در مثلث‌های خاص مانند قائم‌الزاویه، متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع، به دلیل وجود فرض‌های خاص، می‌توانیم با وجود برابری دو یا یک چیز هم به اثبات هم‌نشینی برسیم. مانند:

مثلث متساوی‌الاضلاع: برابری یک ضلع (ض/ض/ض)

مثلث متساوی‌الاضلاع: برابری یکی از ارتفاع‌ها، میانه‌ها یا نیمسازها (ض/ض/ض)

مثلث متساوی‌الساقین: برابری یک ساق و یک قاعده (ض/ض/ض)

مثلث متساوی‌الساقین: برابری یک ضلع و یک زاویه‌ی نظیر (ض/ض/ز)

مثلث قائم‌الزاویه: برابری یک ضلع قائمه و یک زاویه‌ی حاده (ض/ض/ز یا ز/ض/ض)

مثلث قائم‌الزاویه: برابری وتر و یک زاویه‌ی حاده (ض/ض/ز)

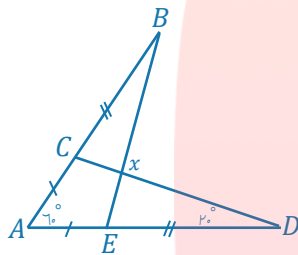
مثلث قائم‌الزاویه: برابری وتر و یک ضلع قائمه (ض/ض/ض)

مثلث قائم‌الزاویه: برابری یک ضلع قائمه و ارتفاع وارد بر وتر (یک ضلع قائمه و یک زاویه‌ی حاده) (ض/ض/ز یا ز/ض/ض)

مثلث قائم‌الزاویه: برابری وتر و ارتفاع وارد بر وتر

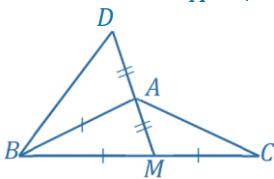
تست ۷۵: در شکل زیر اندازه‌ی زاویه‌ی x چند درجه است؟

- (۱) ۸۰ (۲) ۹۰ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۱۰



تست ۷۶: در شکل مقابل $\hat{D} + \hat{C} = 61^\circ$ ، اندازه‌ی $\hat{ABC}$ چند درجه است؟ (تجربی - ۸۹)

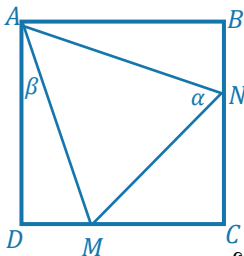
- (۱) ۳۹ (۲) ۵۶ (۳) ۵۸ (۴) ۶۱



تست ۷۷: در مربع $ABCD$ ، اگر $BN = DM$ باشد، کدام رابطه همواره بین α, β برقرار است؟

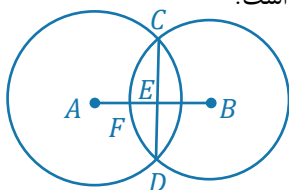
(۱) $\alpha + \beta = 90^\circ$ (۲) $\alpha - \beta = 45^\circ$

(۳) $\alpha + 2\beta = 90^\circ$ (۴) $\alpha = 2\beta$



تست ۷۸: در شکل زیر $BE = ED$ است و A و B مراکز دایره‌ها هستند. زاویه‌ی $\hat{CFA}$ چند درجه است؟

- (۱) ۹۲/۵ (۲) ۱۰۲/۵ (۳) ۱۱۲/۵ (۴) ۱۲۲/۵



تست ۷۹: بر روی قطر BD از مربع $ABCD$ ، نقطه‌ی E را طوری انتخاب می‌کنیم که $BE = BC$ باشد. سپس از نقطه‌ی E عمودی

بر BD خارج کرده‌ایم که DC را در نقطه‌ی F قطع کند. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{ABF}$ چند درجه است؟

- (۱) ۷۵ (۲) ۶۷/۵ (۳) ۶۵ (۴) ۶۰



اجزای مثلث

ارتفاع

تعریف: پاره‌خطی است که از یک رأس مثلث بر ضلع مقابل به آن رأس عمود می‌شود.



هر مثلث دارای سه ارتفاع است که هر سه همواره هم‌مرس هستند. (پیوست ۲۵)

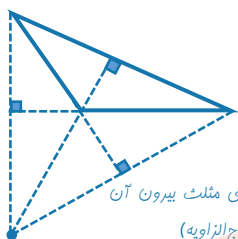


محل همرسی ارتفاع های یک مثلث بسته به نوع آن می تواند داخل، روی مثلث و بیرون از آن باشد.

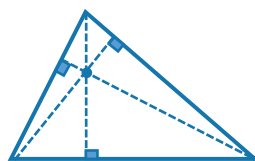
در هر مثلث همواره رابطه $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$ برقرار است (همون مساحت فودمون دیکه). این رابطه نشان می دهد ارتفاع های یک مثلث با طول اضلاعشان رابطه ی معکوس دارند و می تواند مقدمه ای برای نتیجه گیری هایی مانند روابط زیر باشد:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{p}{S} \quad (p \text{ برابر است با نصف محیط مثلث مئه همیشه!})$$

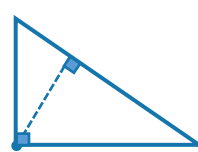
$$\frac{1}{h_a} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad ABC (\hat{A} = 90^\circ)$$



محل همرسی ارتفاع های مثلث بیرون آن
(مثلث منفرج الزاویه)



محل همرسی ارتفاع های مثلث درون آن
(مثلث حاده الزاویه)



محل همرسی ارتفاع های مثلث روی محیط آن
(مثلث قائم الزاویه)

تست ۸۰: در مثلثی اندازه ی دو ضلع ۱۰ و ۱۵ و مجموع ارتفاع های وارد بر آن ها برابر با ارتفاع سوم است. اندازه ی ضلع سوم کدام

است؟ (تجربی خارج - ۹۵)

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۷/۵ (۴) ۸

تست ۸۱: محل همرسی ارتفاع های مثلثی با اندازه ارتفاع های ۳ و ۴ و ۵ کدام گزینه است؟

- (۱) داخل مثلث (۲) روی مثلث (۳) بیرون مثلث (۴) غیرقابل تعیین

میانه

تعریف: پاره خطی است که از یک رأس مثلث آغاز شده و به وسط ضلع مقابل به آن رأس ختم می شود.

با رسم یکی از میانه های مثلث، دو مثلث هم مساحت (هم ارز یا معادل) ایجاد می شود. لذا با رسم هر سه میانه ی مثلث، شش مثلث هم مساحت خواهیم داشت.

هر مثلث دارای سه میانه است که هر سه همواره در نقطه ای درون مثلث هم رس هستند. (پیوست ۲۶)

نقطه ی همرسی میانه های یک مثلث مرکز ثقل آن است. (از نظر فیزیکی، نقطه ی ثقل یعنی جایی که همه ی وزن یک جسم در اون متمرکز شده)

میانه های یک مثلث هم دیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می کنند.

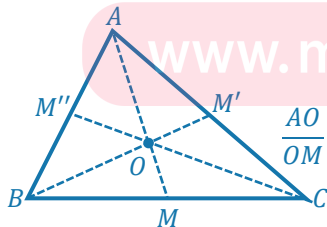
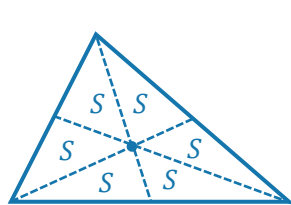
در مثلث قائم الزاویه، میانه ی وارد بر وتر نصف وتر است (قبلاً گفته بودم، مفضل احتیاط بازم گفتم)

این نکته فیللی کلیدی ها! متما بگیرش. دوسان، موارد زیادی دیده شده در مسائلی که اسم میانه هست احتمالاً می شه با امتداد دادن میانه به اندازه ی خودش مسئله رو حل کرد. به هر حال روی این نکته نمی شه قسم خورد اما آله راهی به ذهنش نرسید ممکن این نکته به درد بخوره!!

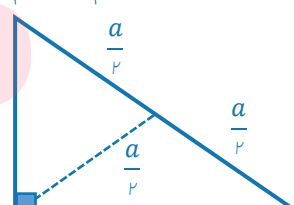
همواره برای مثلثی با ابعاد m_a, m_b, m_c (میانه های مثلث ABC) که مساحت آن برابر است با S' داریم: $S' = \frac{3}{4}S$ (پیوست ۲۷)

در مثلث دلخواه ABC همواره داریم: $2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$

در مورد ترتیب اندازه ی میانه ها هم قبلاً گفتیم که اگر در یک مثلث ترتیب اضلاع $a > b > c$ باشد، در نتیجه: $m_a < m_b < m_c$.



$$\frac{AO}{OM} = \frac{BO}{OM'} = \frac{CO}{OM''} = 2$$



تست ۸۲: در مثلث ABC ، AM و CN دو میانه ی عمود برهم اند. اگر $AM = 3$ و $CN = 4/5$ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

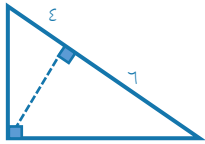
- (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) ۶ (۴) ۱۲

تست ۸۳: مساحت مثلث ABC با میانه های ۵، ۵ و ۸، کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۲ (۳) ۱۶ (۴) ۸

تست ۸۴: مساحت مثلثی با طول سه میانه‌ی ۶، ۸ و ۱۰ است، کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۴۸ (۴) ۱۸



تست ۸۵: در بزرگترین مثلث قائم‌الزاویه‌ی مقابل، اندازه‌ی بزرگ‌ترین میانه کدام است؟ (تجربی - ۸۶)

- (۱) $\sqrt{۵۰}$ (۲) $\sqrt{۶۵}$ (۳) $\sqrt{۷۰}$ (۴) $\sqrt{۷۵}$

تست ۸۶: چند نقطه در صفحه‌ی مثلث ABC وجود دارد که از وصل کردن آن نقاط به رأس‌های مثلث، سه مثلث هم‌ارز ایجاد شود؟

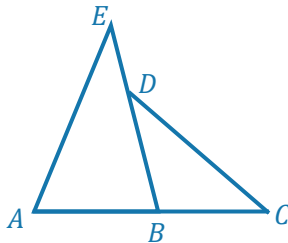
- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

تست ۸۷: در کدام گزینه، مساحت مثلثی که با معلومات دو ضلع و طول میانه‌ی وارد بر ضلع سوم رسم شده، بزرگ‌تر است؟

- (۱) $a = ۳, b = ۴, m_c = \frac{۵}{۲}$ (۲) $a = ۳, b = ۵, m_c = ۲$
(۳) $a = ۳, b = ۳, m_c = ۲$ (۴) $a = ۴, b = ۴, m_c = ۳$

تست ۸۸: در مثلث ABE ($\hat{A} = ۷۰^\circ$)، ضلع AB را از سمت B به اندازه‌ی خودش تا نقطه‌ی C ادامه می‌دهیم. اگر نقطه‌ی D روی BE چنان باشد که $AE = CD$ و $\hat{C} = ۴۵^\circ$ ، آنگاه زاویه‌ی $\hat{E}$ چند درجه است؟

- (۱) ۴۰ (۲) $۳۲/۵$ (۳) ۳۰ (۴) $۲۲/۵$



نیمساز

تعریف: نیم‌خطی است که یک زاویه را به دو زاویه‌ی برابر تقسیم می‌کند.



اگر بتوانیم یکم کلاسیک‌تر نیمساز رو تعریف کنیم اینطوری می‌گیم: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها از دو ضلع یک زاویه به یک اندازه است. خودمونیش یعنی اینکه اگر به نقطه‌ای روی نیمساز به زاویه در نظر بگیریم، فاصله‌ش تا دو ضلع زاویه یک‌به‌یک و برعکس نقطه‌ای که فاصله‌ش تا دو ضلع زاویه یکسان، شتماً روی نیمساز اون زاویه قرار داره!

نیمساز در مثلث

اگر در مثلث ABC ، AD نیمساز زاویه‌ی داخلی $\hat{A}$ و AD' نیمساز زاویه‌ی خارجی $\hat{A}$ و AH ارتفاع خارج شده از رأس $\hat{A}$ باشد، در این صورت خواهیم داشت: (دقت داریم که نیمساز خارجی به زاویه، همیشه در طرف ضلع کوچک‌تر قرار می‌گیره!)



قضیه نیمسازهای داخلی: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ (پیوست ۲۸)

$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$ (پیوست ۲۹)

$AD = \frac{2AB \times AC \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{AB + AC}$ (پیوست ۳۰)

قضیه نیمسازهای خارجی: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD'}{CD'}$ و $AD \perp AD'$

$\hat{H} \hat{A} D = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$ (پیوست ۳۱)

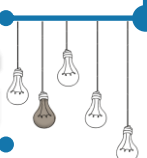
نیمسازهای زوایای داخلی یک مثلث همواره در نقطه‌ای درون مثلث هم‌رسند. (پیوست ۳۲)

نقطه‌ی هم‌رسی نیمسازهای زوایای داخلی یک مثلث، مرکز دایره‌ی محاطی آن است. یعنی دایره‌ای که درون مثلث واقع شده و بر هر سه ضلع آن مماس است. (این نقطه همواره داخل مثلث قرار داره)

هر نیمساز داخلی در یک مثلث با دو نیمساز خارجی دیگر آن هم‌رسند. این نقطه‌ی هم‌رسی مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث است؛

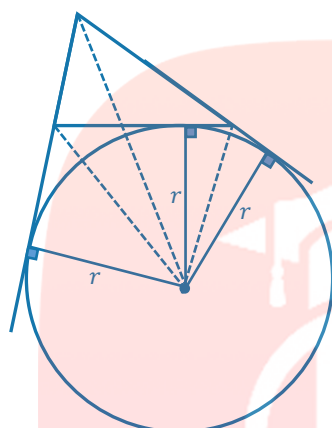
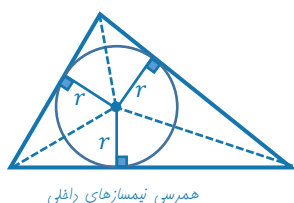
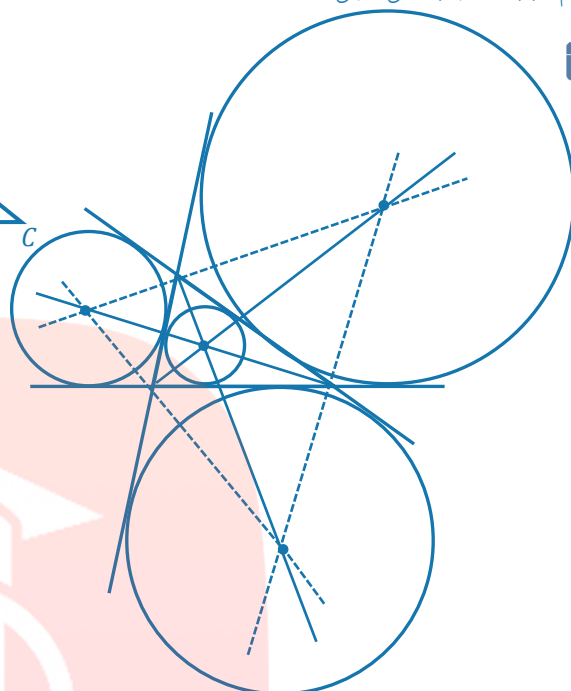
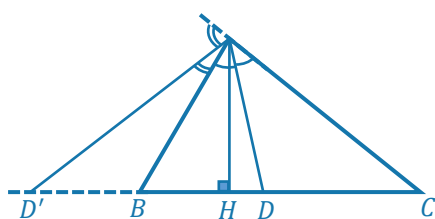
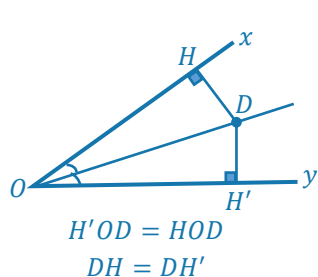
یعنی دایره‌ای که بیرون مثلث واقع شده و بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. (این نقطه همواره خارج مثلث قرار داره). (پیوست ۳۳)

هر مثلث دارای سه دایره‌ی محاطی خارجی است. (به مرور تصویری مراجعه شود!)





توجه: توجه! مرکز دایره‌ی مماسی ویژگی‌اش اینست که فاصله‌اش تا سه ضلع مثلث (یا امتداد آن‌ها) یکسان. پس با توجه به دو هم‌مرسی قبلی، در می‌یابیم - در می‌یابیم - در می‌یابیم - در می‌یابیم در صفحه‌ی مثلث همیشه چهار نقطه وجود دارد که فاصله‌ی هر یک از اون نقطه‌ها تا سه ضلع (یا امتداد آن‌ها) برابر است. یکیش مرکز دایره‌ی مماسی داخلی میشه، ۳ تای دیگم مرکزهای دایره‌ی مماسی خارجی...!



هم‌مرسی نیمسازهای یک مثلث

تست ۸۹: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($A = 90^\circ$) نیمساز و ارتفاع AD و AH را رسم می‌کنیم. $BC = 5$ و $AC = 4$ ، طول

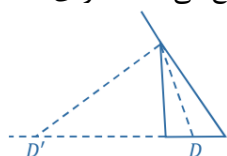
پاره خط DH را بیابید.

- (۱) $\frac{12}{35}$ (۲) $\frac{12}{45}$ (۳) $\frac{7}{10}$ (۴) $\frac{7}{15}$

تست ۹۰: در مثلثی به اضلاع ۸ و ۶ و ۵ واحد، نیمساز کوچک‌ترین زاویه‌ی آن ضلع مقابل را در D و D' قطع می‌کند. اندازه‌ی DD'

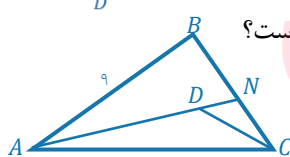
چقدر است؟ (ریاضی خارج - ۹۰)

- (۱) $\frac{195}{114}$ (۲) $\frac{102}{7}$ (۳) $\frac{120}{7}$ (۴) $\frac{124}{7}$



تست ۹۱: در شکل زیر، AN و CD نیمسازند. اگر $AD = 3DN$ ، آن‌گاه طول BC کدام است؟

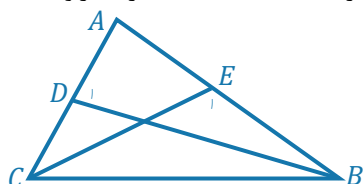
- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰



تست ۹۲: در شکل زیر، BD و CE نیمسازهای داخلی زاویه‌های B, C از مثلث ABC هستند. اگر $\hat{D}_1 = \hat{E}_1$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی

$\hat{A}$ چند درجه است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۳۰



تست ۹۳: در مثلث ABC ($AB < AC$)، ضلع BC را از هر طرف به اندازه‌های $BD = BA$ و $CE = CA$ امتداد می‌دهیم. مرکز

دایره‌ی محیطی مثلث ADE بر روی کدام جز مثلث ABC است؟ (ریاضی خارج - ۹۴)

- (۱) عمود منصف BC (۲) میانه‌ی نظیر ضلع BC (۳) ارتفاع وارد بر ضلع BC (۴) نیمساز داخلی زاویه‌ی A

برخورد دو نیمساز در مثلث (پیوست ۳۴)

در مثلث ABC اگر نیمسازهای دو زاویه‌ی داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند آنگاه: $\hat{BOC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$



در مثلث ABC اگر نیمسازهای زوایای داخلی $\hat{B}$ و خارجی $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند آنگاه: $\hat{BOC} = \frac{\hat{A}}{2}$

در مثلث ABC اگر نیمسازهای دو زاویه‌ی خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند آنگاه: $\hat{BOC} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$

تست ۹۴: در مثلث ABC ، نیمساز داخلی رأس C بر نیمساز داخلی رأس B عمود است. نوع این مثلث را تعیین کنید.

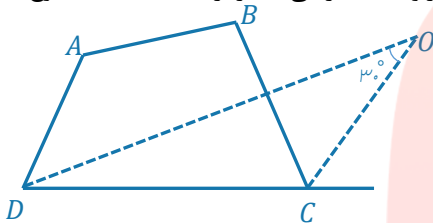
- (۱) متساوی‌الاضلاع (۲) متساوی‌الساقین (۳) قائم‌الزاویه (۴) چنین مثلی وجود ندارد.

تست ۹۵: در مثلث ABC نیمسازهای خارجی زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطه‌ی A' قطع کرده‌اند. اگر

- $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 224^\circ$ آنگاه اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A}$ کدام است؟
(۱) 88° (۲) 96° (۳) 92° (۴) 82°

تست ۹۶: در چهار ضلعی $ABCD$ اگر زاویه‌ی بین نیمساز زاویه‌ی داخلی $\hat{D}$ و نیمساز زاویه‌ی خارجی $\hat{C}$ برابر 30° باشد، مجموع

- زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ کدام است؟
(۱) 300° (۲) 240° (۳) 220° (۴) 280°



تست ۹۷: نیمساز داخلی زاویه‌ی $\hat{B}$ و نیمساز خارجی زاویه‌ی $\hat{C}$ از مثلث ABC در نقطه‌ی D متقاطع‌اند. اگر $\hat{CAD} = 71^\circ$ باشد،

- آنگاه $\hat{BDC}$ چند درجه است؟
(۱) 19° (۲) 20° (۳) 21° (۴) 22°

عمود منصف

تعریف: خطی است که یک پاره‌خط را نصف کرده و بر آن عمود باشد.

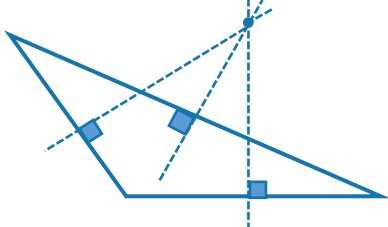
در واقع عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از دو سر پاره خط به یک اندازه است؛ یعنی هر نقطه روی عمود منصف پاره‌خط AB ، از نقاط A و B به یک فاصله است و برعکس نقطه‌ای که فاصله‌اش از A و B به یک اندازه باشد روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد!

عمود منصف‌های اضلاع یک مثلث همواره هم‌رس هستند. (پیوست ۳۰)

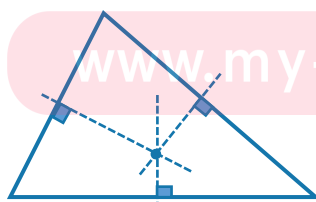
محل هم‌رسی عمود منصف اضلاع یک مثلث بسته به نوع آن می‌تواند داخل، روی مثلث و بیرون از آن باشد.

نقطه‌ی هم‌رسی عمود منصف اضلاع یک مثلث، مرکز دایره‌ی محیطی آن مثلث است و فاصله‌ی آن تا سه رأس مثلث یکسان خواهد بود.

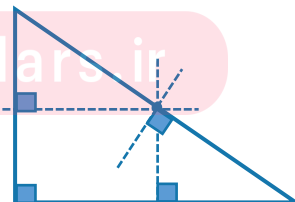
توجه! با توجه به هم‌رسی قبلی، در می‌یابیم — در می‌یابیم — در می‌یابیم در صفحه مثلث همیشه تنها یک نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن تا سه رأس برابر است؛ که اونم مرکز دایره‌ی محیطی...!



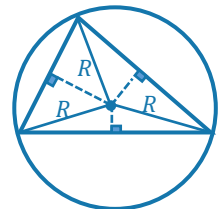
محل هم‌رسی عمود منصف‌های مثلث بیرون آن (مثلث منفرج‌الزاویه)



محل هم‌رسی عمود منصف‌های مثلث درون آن (مثلث حاده‌الزاویه)



محل هم‌رسی عمود منصف‌های مثلث روی محیط آن (مثلث قائم‌الزاویه)



تست ۹۸: در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$ عمود منصف‌های دو ساق مثلث، قاعده‌های BC را در M, N قطع می‌-

- کنند. کوچک‌ترین زاویه‌ی AMN چند درجه است؟ (تجربی - ۹۲)
(۱) 15° (۲) 20° (۳) 25° (۴) 30°

تست ۹۹: در مثلث ABC ، زاویه $\hat{A} = 126^\circ$ است. اگر عمود منصف های دو ضلع AB و AC یکدیگر را در نقطه O قطع کنند آنگاه زاویه $\hat{BOC}$ چند درجه خواهد بود؟

(۱) ۱۱۰ (۲) ۱۰۸ (۳) ۲۵۲ (۴) ۲۱۴

تست ۱۰۰: اندازه‌ی دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۶ و ۲ واحد است. عمود منصف وتر، امتداد ضلع کوچک‌تر را در M قطع می‌کند. فاصله‌ی M از نزدیک‌ترین رأس این مثلث چند واحد است؟ (ریاضی - ۸۴)

(۱) $7/5$ (۲) ۸ (۳) $\sqrt{80}$ (۴) $25/3$

تست ۱۰۱: مقوایی به شکل زیر با یک زاویه‌ی قائمه را، حداقل با چند برش می‌توان به مثلث‌های متساوی‌الساقین تقسیم کرد؟ (هنر - ۹۶)

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

تست ۱۰۲: در مثلث ABC داریم $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$. نیمساز داخلی زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع BC در نقطه‌ی M متقاطعند. زاویه‌ی $\hat{MBC}$ چند درجه است؟ (ریاضی خارج - ۸۹)

(۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

تست ۱۰۳: در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، $\hat{A} = 4\hat{B}$ است. عمود منصف‌های ساق‌ها، قاعده را به ترتیب در نقاط M, N قطع می‌کنند. اگر $BC = 24$ باشد، آنگاه مساحت مثلث AMN کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) $16\sqrt{3}$ (۳) ۱۶ (۴) $12\sqrt{3}$

گام دوم: نامساوی‌های مثلثی

قضیه‌ی نامساوی مثلث (ممار)؛ در هر مثلث مجموع طول دو ضلع همواره بزرگ‌تر است از طول ضلع سوم: (پیوست ۳۷)

$$a < b + c \quad b < a + c \quad c < a + b$$

که با کمی دست‌کاری داریم:

$$a < b + c \Rightarrow a - c < b \text{ یا } a - b < c$$

$$b < a + c \Rightarrow b - a < c \text{ یا } b - c < a$$

$$c < a + b \Rightarrow c - a < b \text{ یا } c - b < a$$

بنابراین مجموع همه‌ی این اتفاقات می‌شه:

در مثلث ABC با اضلاع a, b, c همواره سه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$a + b > c > |a - b|$$

$$a + c > b > |a - c|$$

$$b + c > a > |b - c|$$

عکس قضیه‌ی نامساوی مثلث؛ یعنی اگر ۳ تا عدد به شما دادن گفتن اندازه‌ی اضلاع مثلث هستند یا نه، باید بررسی کنید در روابط سه‌گانه‌ی بالا صدق می‌کنند یا خیر. برای بررسی یا جمع‌ها رو یک کنید یا منهاها رو که پیشنهاد من همون بررسی کردن جمع‌هاست! بزار راحتون کنم، فقط برای بزرگ‌ترین ضلع رابطه‌ی جمع رو بررسی کنید. یعنی اگر بزرگ‌ترین ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کم‌تر باشه قضیه آکیه!

تست ۱۰۴: مثلثی با اضلاع $4x - 1$ ، $2x + 1$ و $x + 5$ متساوی‌الساقین است. مجموع مقادیر ممکن x کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۵

نتایج قضیه نامساوی مثلث

اگر O نقطه‌ای دلخواه در مثلث ABC باشد، همواره: (پیوست ۳۸)

$$OA + OB < CA + CB \quad OB + OC < AB + AC \quad OA + OC < CA + BC$$

اگر O نقطه‌ای دلخواه در مثلث ABC باشد، نتیجه می‌شود: $\frac{a+b+c}{2} < OA + OB + OC < a + b + c$ ؛ یعنی:

$$p < OA + OB + OC < 2p \quad (p \text{ برابر است با نصف محیط مثلث})$$

اگر در رابطه‌ی قبل، نقطه‌ی O محل برخورد میانه‌ها باشد رابطه به شکل روبه‌رو تغییر می‌کند: $\frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c$

ضمناً برای میانه‌های m_a, m_b, m_c در مثلث ABC اینارو هم داریم:

$$\frac{|b-c|}{2} < m_a < \frac{b+c}{2} \quad \text{و این نتیجه می‌دهد که: } |m_b - m_c| < m_a < m_b + m_c \quad (\text{پیوست ۳۹})$$

$$\frac{|a-c|}{2} < m_b < \frac{a+c}{2} \quad \text{و این نتیجه می‌دهد که: } |m_a - m_c| < m_b < m_a + m_c$$

$$\frac{|a-b|}{2} < m_c < \frac{a+b}{2} \quad \text{و این نتیجه می‌دهد که: } |m_a - m_b| < m_c < m_a + m_b$$

$$\frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c < 2p \quad (\text{پیوست ۴۰})$$

برای ارتفاع‌های h_a, h_b, h_c در مثلث ABC داریم:

$$\left| \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right| < \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad (\text{پیوست ۴۱})$$

$$\left| \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_c} \right| < \frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c}$$

$$\left| \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} \right| < \frac{1}{h_c} < \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b}$$

$$h_a < \frac{b+c}{2}, \quad h_b < \frac{a+c}{2}, \quad h_c < \frac{a+b}{2} \quad (\text{پیوست ۴۲})$$

$$p < h_a + h_b + h_c < 2p \quad (\text{پیوست ۴۳})$$

قبلاً اشاره کردیم که در هر مثلث برای نیمساز، ارتفاع و میانه‌ی خارج شده از یک رأس (مثلاً رأس A) داریم: $h_a < d_a < m_a$

بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که: $h_a + h_b + h_c < d_a + d_b + d_c < m_a + m_b + m_c$

حالا اگر یکم باهوش باشیم، از همین عبارت و عبارت‌های $p < h_a + h_b + h_c < 2p$ و $\frac{3p}{2} < m_a + m_b + m_c < 2p$ نتیجه فواید گرفت که:

$$p < d_a + d_b + d_c < 2p$$

تست ۱۰۵: در مثلث ABC ، طول ضلع BC برابر ۶ و طول میانه‌ی AM برابر ۵ است. حدود تغییرات ضلع AB کدام است؟

$$3 < AB < 7 \quad (1) \quad 2 < AB < 7 \quad (2)$$

$$2 < AB < 8 \quad (3) \quad 3 < AB < 8 \quad (4)$$

تست ۱۰۶: مثلثی با معلوم بودن دو میانه‌ی $m_a = 9$ و $m_b = 12$ و ضلع a قابل رسم است. اندازه‌ی ضلع a کدام می‌تواند باشد؟

(ریاضی - ۸۴) (ریاضی خارج - ۸۶)

$$9 \quad (1) \quad 10 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 22 \quad (4)$$

تست ۱۰۷: چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است.

www.my-dars.ir

- در یک چهارضلعی محدب، همواره مجموع قطرهای بین محیط و نصف محیط است.

- در یک چهارضلعی محدب، همواره مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه تا چهار رأس بین نصف محیط و $1/5$ برابر محیط است.

- در یک چهارضلعی محدب، همواره مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه تا چهار رأس بزرگ‌تر یا مساوی مجموع قطرهایست.

- در یک چهارضلعی محدب، همواره مجموع دو ضلع مقابل از مجموع دو قطر کوچک‌تر است.

$$2 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$

گروه آموزشی عصر

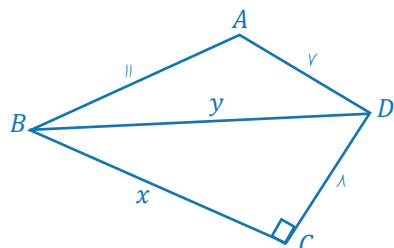
ASR_Group@outlook.com

@ASRschoo12

تست ۱۰۸: در مثلثی به طول اضلاع $3 - \sqrt{2}$ و $2 + \sqrt{2}$ واحد، نقطه‌ی M داخل مثلث تغییر مکان می‌دهد. کدام عدد برای

مجموع فواصل نقطه‌ی M از سه رأس مثلث، مورد قبول است؟ (ریاضی خارج - ۸۸)

- (۱) $5 - \sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۸



تست ۱۰۹: در شکل زیر مجموع مقادیر y کدام است؟ ($x, y \in \mathbb{N}$)

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۱ (۳) ۲۵ (۴) ۲۷

تست ۱۱۰: از نقطه‌ی هم‌مرسی نیم‌سازهای مثلث ABC (نقطه‌ی I)، خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. اگر $BD = 3$ و

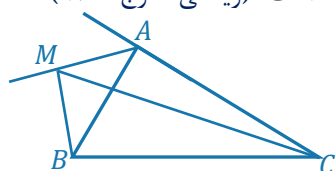
$CE = 7$ ، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار صحیح محیط دوزنقه‌ی $BDEC$ کدام است؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۳۸ (۳) ۴۰ (۴) ۳۹

تست ۱۱۱: در مثلثی به ابعاد $a \geq 8$ و ۷ و ۵، کدام عدد برای مجموع اندازه‌های سه میانه، مورد قبول است؟ (ریاضی خارج - ۸۹)

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۹ (۴) ۲۴

تست ۱۱۲: در شکل روبه‌رو، نقطه‌ی M روی نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی A است. نسبت $\frac{MB+MC}{AB+AC}$ چگونه است؟ (ریاضی خارج - ۹۴)



- (۱) بزرگتر از ۱ (۲) کمتر از ۱ (۳) برابر با ۱ (۴) غیر مشخص

تست ۱۱۳: از بین مثلث‌هایی که در ضلع $AB = 16$ مشترک و مساحت هر یک از آنان ۴۸ واحد مربع است، کم‌ترین مقدار محیط

کدام است؟ (ریاضی - ۸۹)

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۴ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸

قضیه‌ی نامساوی اضلاع و زوایا: در مثلث ABC همواره ضلع مقابل به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع مقابل به زاویه‌ی کوچک‌تر

و برعکس. (بزرگ‌تر یا بزرگ‌تر باز یا باز، کوچک‌تر یا برن دنبال بازیشون ...) $\hat{B} > \hat{C} \Leftrightarrow b > c$. (پیوست ۳۶)

در واقع در حالت کلی‌تر داریم:

$$a > b > c \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$$

با دایره نامساوی‌های زیر رو هم در تکمیل نکات این قضیه براتون بگم:

$$a > b > c \Leftrightarrow h_a < h_b < h_c \quad (\text{ارتفاع‌های مثلث } ABC \text{ هستند})$$

$$a > b > c \Leftrightarrow d_a < d_b < d_c \quad (\text{نیم‌سازهای مثلث } ABC \text{ هستند}) \quad (\text{پیوست ۴۴})$$

$$a > b > c \Leftrightarrow m_a < m_b < m_c \quad (\text{میانه‌های مثلث } ABC \text{ هستند})$$

تست ۱۱۴: در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A} > \hat{C}$ ، نیم‌ساز زاویه‌ی B و عمود منصف ضلع AB در نقطه‌ی D متقاطع‌اند. M و N پای

عمودهایی است که از نقطه‌ی D به ترتیب بر BA و BC رسم شده‌اند. کدام نابرابری درست است؟ (ریاضی - ۹۵)

$$NC < NB \quad (۲)$$

$$NC > NB \quad (۱)$$

$$AM < BN \quad (۴)$$

$$DA > DC \quad (۳)$$

تست ۱۱۵: در مثلث ABC ($AB > AC$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. کدام گزینه همواره صحیح است؟

$$\hat{B}AH < \hat{C}AH \quad (۲)$$

$$\hat{B}AH > \hat{C}AH \quad (۱)$$

$$\hat{A}HC > \hat{A}CB \quad (۴)$$

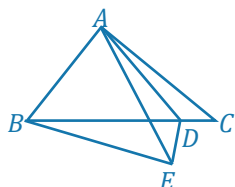
$$\hat{A}BC > \hat{A}CB \quad (۳)$$

تست ۱۱۶: نقطه‌ی D روی ضلع BC از مثلث ABC به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AB = BD$. کدام گزینه همواره درست نیست؟
($AB < BC$)

(۱) $AC > AD$ (۲) $AC > BD$ (۳) $AC > DC$ (۴) $AD + DC > AC$

قضیه‌ی لولا: اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داشته باشیم $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ و $\hat{A} > \hat{A}'$, آنگاه $BC > B'C'$ و برعکس، یعنی اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داشته باشیم $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ و $BC > B'C'$, آنگاه $\hat{A} > \hat{A}'$.

قضیه‌ی لولا فورش نتیجه‌ای از قضیه‌ی نامساوی مثلث! (پیوست ۴۰)



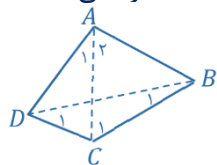
تست ۱۱۷: در شکل مقابل، $AE = AC$ و $\hat{EAD} = \hat{DAC}$. کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

(۱) $BD > BE$ (۲) $BC > BE$ (۳) $BD > CD$ (۴) $BE > DE$

تست ۱۱۸: در چهارضلعی $ABCD$ ، اگر $CD = CB$ و $\hat{ACB} > \hat{ACD}$ ، کدام نامساوی همواره برقرار است؟ (ریاضی خارج - ۹۲)

(۱) $AB > AC$ (۲) $AB > AD$ (۳) $AC > AB$ (۴) $AC > AD$

تست ۱۱۹: در چهارضلعی $ABCD$ ، $AB = AD$ و $CB > CD$. در مورد زاویه‌ها کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ (ریاضی - ۸۵)



(۱) $\hat{C}_1 > \hat{A}_1$ (۲) $\hat{A}_2 > \hat{A}_1$ (۳) $\hat{D}_1 > \hat{B}_1$ (۴) $\hat{D} > \hat{B}$

تست ۱۲۰: در مثلث ABC ($AB > AC$)، میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. کدام گزینه همواره صحیح است؟

(۱) $\hat{MAB} > \hat{MAC}$ (۲) $\hat{AMB} > \hat{AMC}$
(۳) $\hat{MAB} > \hat{AMC}$ (۴) $\hat{MAC} > \hat{AMB}$

تست ۱۲۱: در مثلث ABC ($AB < AC$)، نقطه‌ی D روی میانه‌ی AM است (D روی M نیست). کدام گزینه همواره صحیح است؟

(۱) $BD < CD$ (۲) $DC < DM$ (۳) $BD > DM$ (۴) $\hat{BAM} < \hat{CAM}$

تست ۱۲۲: در چهارضلعی $ABCD$ ، عمود منصف‌های دو ضلع مقابل AB و CD در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. اگر $BC > AD$ باشد،

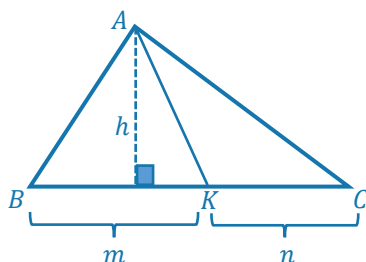
کدام نابرابری همواره صحیح است؟ (ریاضی - ۹۲)

(۱) $\hat{AMB} > \hat{BMC}$ (۲) $\hat{CAB} > \hat{CAD}$
(۳) $\hat{BMC} > \hat{AMD}$ (۴) $\hat{CMD} > \hat{AMB}$

فای درس
گروه آموزشی عصر

گام سوم: پاره‌فط سوایی در مثلث

تعریف: پاره‌خطی که یک رأس مثلث را به نقطه‌ای از ضلع روبه‌روی آن وصل کند پاره‌خط سوایی نامیده می‌شود. (سوا در لغت یعنی جدا کردن)
حال فرض کنید در مثلث ABC پاره‌خط سوایی AD رسم شده باشد، این پاره‌خط مثلث ABC را به دو مثلث ABD و ACD تقسیم می‌کند.

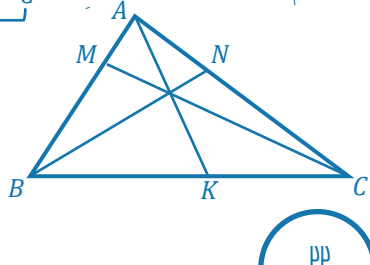


$$\frac{S_{ABK}}{S_{ACK}} = \frac{\frac{1}{2} \times h \times BK}{\frac{1}{2} \times h \times CK} = \frac{BK}{CK} = \frac{m}{n}$$

نسبت مساحت این دو مثلث برابر است با:

همین نکته بخشی از سوالات مساحت رو شامل میشه!

بالا به نکته از نتیجه‌ی قبل، اگر در مثلث ABC سه پاره‌فط سوایی هم‌رس بکشیم رابطه‌ی زیر همواره برقرار:



$$\frac{AM}{MB} \times \frac{BK}{KC} \times \frac{CN}{NA} = 1$$

(پیوست ۴۶)





یه تعداد نصفیت برادرانه واسه این تیپ سوالا (که مسامت به قسمتی از شکل رو می خوار و پاره‌های سوایی موجود ...) بعث می‌کنم؛ آویزه‌ی کوشش کن. اول اینکه اسم مسامت قسمتی از شکل رو X بزار. مسامتی که مقدارش واست معلومه یا مسامت قسمتی که می‌خوای مقدارش رو به دست بیاری. تو کام بعدی بین مسامت‌های اشکال مجاور با X په رابطه‌ای با اون دارن. مثلاً از روی نسبت ارتفاع‌ها یا قاعده‌ها، شعاع، طول، عرض و ... به این روابط می‌رسیم و اونارو بر حسب X می‌نویسیم. نهایتاً تو کام سوم اونپه که آزمون فواسته رو پیدا می‌کنیم. حالا برو سراخ تست بعدی!



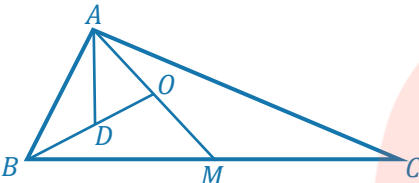
تست ۱۲۳: در مثلث ABC ، F وسط AB ، D وسط BC و E وسط BD است. اگر مساحت مثلث CEF برابر ۶۳ باشد، مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۱۱۸ (۲) ۱۲۸ (۳) ۱۶۸ (۴) ۱۲۶



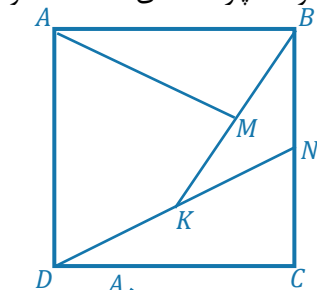
تست ۱۲۴: در شکل زیر نقطه‌ی O ، وسط میانه‌ی AM از مثلث ABC بوده و $OB = 2OD$ است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AOD است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲



تست ۱۲۵: در شکل روبه‌رو، $ABCD$ مربعی به طول ضلع ۴ است. نقطه‌های M ، N و K به ترتیب وسط پاره‌های BC ، BK و BC و DN هستند. مساحت چهارضلعی $AMKD$ چقدر است؟

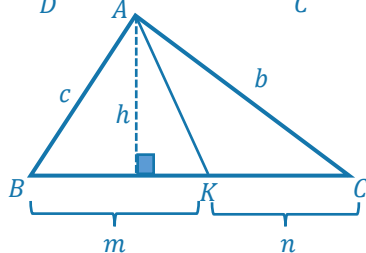
- (۱) ۹ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۷



فالی از لطف نیست که برونیم؛

قضیه‌ی استوارت: به طور کلی طول یک پاره‌خط سوایی از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود: (پیوست ۴۷)

$$AK^2 = \frac{mb^2 + nc^2}{a} - mn$$



اگر AK نیمساز زاویه‌ی A باشد، آنگاه: $AK^2 = bc - mn$

اگر AK میانه‌ی ضلع BC باشد، آنگاه: $AK^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

تست ۱۲۶: اضلاع مثلثی متناسب با اعداد ۲ و ۳ و ۴ هستند. نیمساز زاویه‌ی داخلی متوسط آن را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (ریاضی خارج - ۸۵)

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{5}$



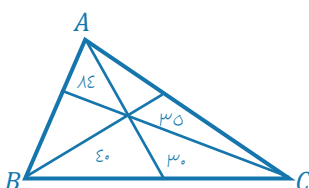
تست ۱۲۷: در مثلثی به اضلاع ۶ و ۵ و ۳ واحد، نیمساز کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی آن، بزرگ‌ترین ضلع مثلث را قطع می‌کند. مساحت مثلثی که در خارج مثلث اصلی تشکیل می‌شود چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (ریاضی - ۹۱)

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{9}{4}$



تست ۱۲۸: در مثلثی اضلاع را در یک جهت به اندازه‌ی دو برابر خود ادامه می‌دهیم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث حاصل چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹



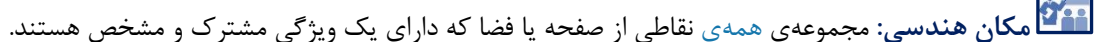
تست ۱۲۹: با توجه به شکل و مساحت مثلث‌های داده شده، مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۵۲ (۲) ۵۸ (۳) ۴۸ (۴) ۶۲



درسنامه
زاویه و مثلث





مکان‌های معروف؛ اینارو همیشه یادت باشه!

دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آنها تا یک نقطه برابرند.

دو فط موازی: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آنها تا یک فط برابرند.

نیمساز: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها تا دو ضلع یک زاویه برابرند.

عمود منصف: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها تا دو سر یک پاره‌خط برابرند.

قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین: مجموعه نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌ی هر یک از آن‌ها تا دو ساق (یا تا دو ضلع یک زاویه، یعنی زاویه رأس) برابر است با ارتفاع

وارد بر ساق.

امتداد قاعده‌ی مثلث متساوی الساقین: مجموعۀ نقاط، از صفحه که قعر، مطلق تفاضل فاصله‌ی هر یک از آن‌ها تا دو ساق (یا تا دو ضلع یک زاویه، یعنی زاویه رأس)

برابر است با ارتفاع وارد بر ساق.

نکته: مجموعه نقاط، از فضا که فاصله‌ی آنها تا یک نقطه برابرند.

استوانه: مجموعه نقاط، از فضا که فاصله‌ی آن‌ها تا یک خط برابرند.

صفحه‌ی عمود منصف: مجموعه نقاط، از فضا که فاصله‌ی آنها تا دو سر یک بازه خط برابرند.

دو صفحه‌ی موازی: مجموعه نقاطی از فضا که فاصله‌ی آنها تا یک صفحه برابرند.



صفحات، موازی

تست ۱۳۰: دو خط l, l' در یک صفحه و با زاویه‌ی 30° درجه متقاطعند. مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصلشان تا این دو

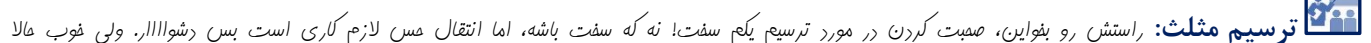
خط ۴ واحد باشد کدام است؟

(١) مستطيل، با طول ٨ (٢) مربع، با محيط ١٦ (٣) مستطيل، با قطر ١٦ (٤) مربع، با قطر ١٢

تست ۱۳۱: دو صفحه‌ی موازی هم و نقطه‌ی P به فاصله‌های ۵ و ۱۱ واحد از دو صفحه در بالای هر دو قرار دارد. مکان هندسه نقاطی

که از دو صفحه به یک فاصله و از نقطه‌ی P به فاصله‌ی ۱۰ واحد باشد، کدام است؟ (ب. باضی، خارج - ۹۱)

(۱) دایره‌ای، به شعاع ۶ (۲) یاره‌خط به طول ۶ (۳) دایره‌ای، به شعاع $4\sqrt{2}$ (۴) یاره‌خط به طول $4\sqrt{2}$



سعیمون رو کر کنیم، ما می توانیم.

[illegible]

سه ضلع ۲- اندازه‌ی دو ضلع و زاویه‌ی بینشون ۳- اندازه‌ی دو زاویه و یک ضلع. اما این همه‌ی ما‌برا نیست! در بعضی تست‌ها اطلاعات داده شده این شکلی نیستن، مثلاً فقط اندازه‌ی ضلع و زاویه در کار نیست! بلکه داده‌های مثل اندازه‌ی میانه یا ارتفاع رو به ما می‌دن. کاری که ما باید بکنیم اینه اطلاعات داده شده رو با کمک دانسته‌های قبلی،

طوری در کنار هم قرار بدهیم تا بتوانیم یک مثلث رسم کنیم. بدین منظور می‌توانیم از روش‌های زیر استفاده کنیم:





روش اول: سعی کنید مثلث فواسته شده رو ترسیم کنید. اسمش رو ABC بذارین.

بعد، اجزایی که در صورت سوال مقادیرشون داده شده رو در شکل ترسیمی مشخص کنید. مثلاً قرمز شون کنید.

سعی کنید مثلی که با کمک این اجزای قرمز رنگ تشکیل میشه رو ببینید. درون این مثلث رو کاملاً قرمز کنید. (مثلی که ما دنبالش هستیم باید دارای یکی از حالات رسم مثلث باشه!) حالا دنبال راهی بگردین تا مثلث ABC رو با کمک مثلث قرمز رنگ ایجاد کنید. اگر این راه پیدا شد، یعنی اینکه مسئله دارای پاسخ هست. یعنی مسئله تمام شده، غذا آمارس!! تعداد جواب های مسئله به تعداد مثلث های ABC قابل رسمی که از مثلث قرمز ایجاد شدن، بستگی داره!



روش دوم: استفاده از مکان هندسی ها. اجازه برین با ارائه ی چند ترسیم با استفاده از این روش، براتون توضیحش بدم. اما اینو برونین که:

داشتن طول ضلعی مثل BC و میانه ی m_a در ترسیم مثلث ABC یعنی، رسم کماتی به شعاع m_a و به مرکز M وسط ضلع BC . (میانه ی $AM = m_a$) یعنی فاصله ی نقطه ی A از نقطه ی M وسط ضلع BC ، m_a است.

داشتن طول ضلعی مثل BC و ارتفاع h_a در ترسیم مثلث ABC یعنی، رسم خطوط l, l' موازی ضلع BC و به فاصله ی h_a از آن. (ارتفاع h_a یعنی اینکه فاصله ی نقطه ی A از ضلع BC برابر h_a است. پس نقطه ی A روی خطوط موازی BC و با فاصله ی h_a از اون قرار داره)

داشتن طول ضلعی مثل BC و اندازه ی زاویه ی $\hat{A}$ در مثلث ABC یعنی، رسم کمان در فور زاویه ی $\hat{A}$ روبه رو به ضلع BC . (تو فصل دایره مفصل توضیحش می دم ...)



در صورت برخی از سوالات، طراح با عبارات چند مثلث، چند نوع مثلث و یا چند مثلث متمایز به استقبال شما می آید؛ و این عبارات بدین معنی است که با فرضیات ارائه شده، چند نوع مثلث غیر همنهشت و متفاوت می توانید رسم کنید. (لذا همه ی مثلث های همنهشت را یک دانه در نظر می گیریم)



همه ی حالت های ترسیم یک مثلث، مشروط به اینکه تنها یک مثلث متمایز ایجاد کنند، جز حالت های همنهشتی مثلث ها هستند.

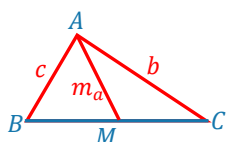


روابطی از قبیل قضیه ی سینوس ها و قضیه ی کسینوس ها، رابطه ای میان اندازه اضلاع و زوایای یک مثلث هستند؛ پس می تواند ابزاری برای ایجاد فرضیات مناسب ترسیم یک مثلث باشند. (مثلاً آله فرض سوال حالت ض ض ض بود، می شه با کمک قضیه ی سینوس ها اونو به حالت ض ض ض تبدیل کرد و مثلث را قابل رسم نمود.)



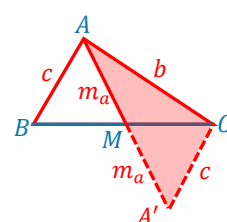
حالت های معروف ترسیم مثلث

رسم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و میانه ی نظیر ضلع سوم. (حداکثر ۱ مورد)



۱- از مثلث ABC اضلاع $AB = c$ ، $AC = b$ و میانه ی $AM = m_a$ معلوم هستند.

۲- میانه ی AM را به اندازه ی خودش تا نقطه ی A' ادامه می دهیم. مثلث های ABM و $A'MC$ بنا به حالت ض ض ض همنهشت هستند. لذا $CA' = AB = c$.



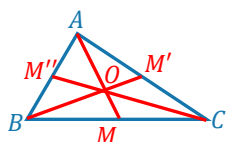
۳- تنها یک مثلث $AA'C$ با داشتن اندازه ی سه ضلع به طول های m_a, c, b مشروط به رعایت نامساوی های

مثلثی قابل رسم است. فقط همینو یک کنید: $|b - c| < m_a < b + c$

۴- بنابراین پس از رسم مثلث $AA'C$ میانه ی CM را در آن رسم کرده و به اندازه ی خود ادامه می دهیم تا

به نقطه ی B رسید و مثلث ABC حاصل شود. (جواب حداکثر یکی می شه، چون آله مثلث $AA'C$ قابل رسم نباشه، جوابی نخواهیم داشت)

رسم مثلث با معلوم بودن طول سه میانه ی آن. (حداکثر ۱ مورد)



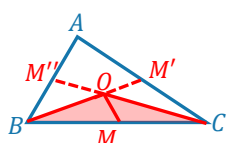
۱- از مثلث ABC طول میانه های $AM = m_a$ ، $BM = m_b$ و $CM = m_c$ معلوم هستند.

۲- می دانیم میانه های مثلث به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می کنند. لذا اگر O محل برخورد میانه های این

مثلث باشه، داریم $BO = \frac{2}{3}m_b$ ، $CO = \frac{2}{3}m_c$ و $OM = \frac{1}{3}m_a$. لذا از مثلث BOC طول

دو ضلع و میانه ی وارد بر ضلع سوم در اختیار است. پس مثلث BOC طبق حالت قبل با رعایت نامساوی های مثلثی قابل رسم است.

فقط همینو یک کنید: $|OB - OC| < OM < OB + OC \Rightarrow |m_b - m_c| < m_a < m_b + m_c$



۳- بنابراین پس از رسم مثلث BOC اضلاع BO و CO را به اندازه ی نصف خود ادامه می دهیم تا به نقاط M' و M'' برسیم.

از امتداد دادن پاره های BM'' و CM' و تقاطعشان، نقطه ی A حاصل می شود.

(جواب حداکثر یکی می شه، چون آله مثلث BOC قابل رسم نباشه، جوابی نخواهیم داشت)



رسم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم. (حداکثر ۲ مورد)

۱- از مثلث ABC اضلاع $AB = c$, $AC = b$ و ارتفاع $AH = h_a$ معلوم هستند.

۲- در مثلث ABH ، با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس، BH قابل دست‌یابی است. لذا مثلث ABH بنا به حالت ض‌ض‌ض رسم می‌شود. (به شرط رعایت نامساوی مثلث: $c > h_a$)

۳- در مثلث ACH ، با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس، CH قابل دست‌یابی است. لذا مثلث ACH بنا به حالت ض‌ض‌ض رسم می‌شود. (به شرط رعایت نامساوی مثلث: $b > h_a$)

۴- از کنار هم قرار دادن مثلث‌های ABH و ACH ، دو مثلث ABC غیر هم‌نهشت و متفاوت حاصل می‌شود. روش دوم:

۱- ارتفاع h_a یعنی اینکه فاصله‌ی نقطه‌ی A از ضلع BC برابر h_a است.

پس نقطه‌ی A روی خطی موازی با BC و با فاصله‌ی h_a از اون قرار داره.

لذا در ابتدا دو خط l' ، l'' موازی با l و با فاصله‌ی h_a از آن را رسم کرده و نقطه‌ی A رو به صورت دلخواه روی یکیشون (l') در نظر می‌گیریم. (شرایط l' ، l'' یکسان، پس ما فقط واسه یکیشون مسئله رو ادامه می‌دیم!)

۲- طول ضلع $AC = b$ یعنی اینکه فاصله‌ی رأس A از رأس C برابر با مقدار b هست.

پس یه کمان به مرکز A و شعاع b رسم می‌کنیم تا همه‌ی نامزد‌های نقطه‌ی C به دست بیان.

۴- مرحله‌ی ۳ رو مجدداً با کمائی به شعاع c تکرار می‌کنیم.

۵- تقاطع کمان‌های رسم شده با خط l نقاط B ، C را ایجاد می‌کند.

مثلث‌های ABC و $AB'C$ دو مثلث متمایز با شرایط فوق هستند که جواب مسئله خواهند بود.

دقت کن، اگر یکی از کمان‌ها به خط l مماس بشه ($b = h_a$ یا $c = h_a$)، اون موقع تعداد جواب مسئله یک خواهد بود و در صورت قطع نکردن اون ($b < h_a$ یا $c < h_a$)، جوابی وجود نخواهد داشت.

رسم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و ارتفاع وارد بر یکی از آن‌ها. (حداکثر ۲ مورد)

روش اول:

۱- از مثلث ABC اضلاع $BC = a$ ، $AC = b$ و ارتفاع $AH = h_a$ معلوم هستند.

بنابراین مثلث ACH با رعایت نامساوی‌های مثلثی قابل رسم است ($h_a < b$).

۲- با رسم مثلث ACH می‌توان به دو صورت به مثلث ABC رسید.

یه بار B رو سمت راست نقطه‌ی C می‌ذاریم، یه بار سمت چپ!

روش دوم:

۱- همه چیز مثل ترسیم قبلی! ابتدا ضلع $BC = a$ را رسم می‌کنیم.

۲- خطوط l ، l' موازی با BC و با فاصله‌ی h_a از آن رسم می‌کنیم (یکیشون کافی!).

۳- به مرکز رأس C کمانی به شعاع b رسم می‌کنیم. نقاط برخورد این کمان با خط موازی، نقاط

کاندیدای A هستند. مثلث‌های ABC و $A'BC$ جواب مسئله هستند. در صورتی که کمان رسم شده

بر خط l مماس باشد ($b = h_a$)، جواب مسئله یک مثلث خواهد بود و در صورت قطع نکردن اون

بر خط l ، جوابی وجود نخواهد داشت. ($b < h_a$)

رسم مثلث با معلوم بودن یک ضلع، ارتفاع وارد بر آن و یک ارتفاع دیگر. (حداکثر ۲ مورد)

۱- از مثلث ABC ضلع $BC = a$ ، ارتفاع‌های $AH = h_a$ و $BH' = h_b$ معلوم هستند.

۲- چون می‌دونیم در مثلث $a \cdot h_a = b \cdot h_b$ ، لذا طول ضلع $AC = b$ نیز به دست می‌آید.

۳- بنابراین این حالت همون حالت قبلی می‌شه و دیگر هیچ!...

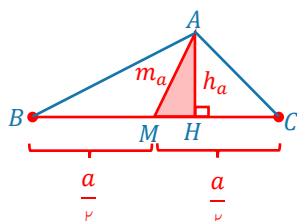
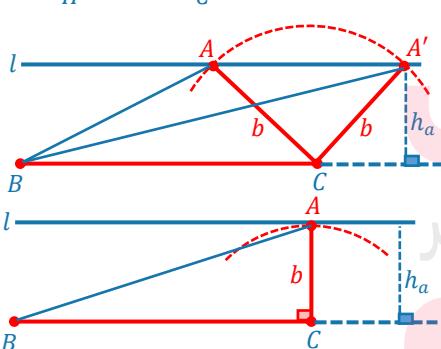
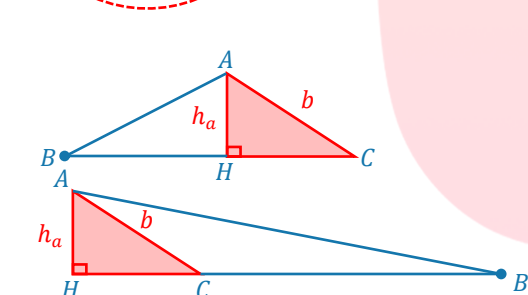
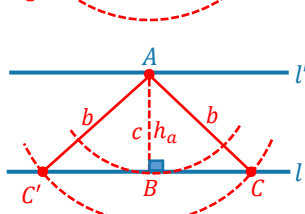
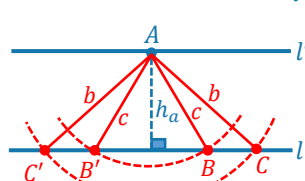
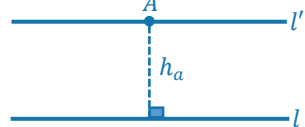
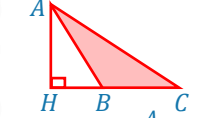
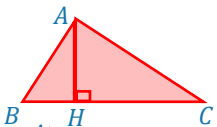
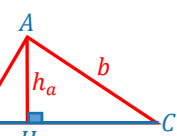
رسم مثلث با معلوم بودن یک ضلع و ارتفاع و میانه‌ی وارد بر آن. (حداکثر ۱ مورد)

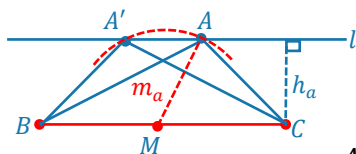
روش اول:

۱- از مثلث ABC ضلع $BC = a$ ، میانه‌ی $AM = m_a$ و ارتفاع $AH = h_a$ معلوم هستند.

۲- با این اطلاعات مثلث AHM قابل رسم است.

با امتداد دادن ضلع HM از دو طرف، نقاط B و C حاصل می‌شوند.





۱- ابتدا ضلع $BC = a$ را رسم می‌کنیم.

۲- خطوط l, l' را موازی با BC و با فاصله‌ی h_a از آن رسم می‌کنیم (یکپوشون کافی!).

۳- میانه‌ی $AM = m_a$ یعنی فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی M وسط ضلع BC ، m_a است.

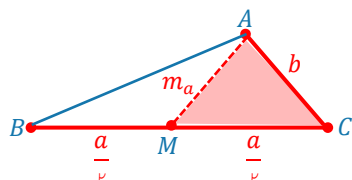
لذا کمائی به مرکز نقطه‌ی M وسط ضلع BC و شعاع m_a رسم می‌کنیم. نقاط برخورد این کمان با خط l کاندیدای نقطه‌ی A هستند.



وقت کنید جواب مسئله یک مثلث خواهر بود. چون مثلث‌های ABC و $A'BC$ هم‌نهشت هستند لذا مثلث‌های ایبار شده، متمایز نخواهند بود. البته اگر کمان رسم شده خط l رو قطع کنه که دیکه جوابی هم نداریم! کمان مماس هم باشه ($h_a = m_a$) همچنان جواب به دونس و مثلث متساوی‌الساقین می‌شه!

رسم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و میانه‌ی وارد بر یکی از آن‌ها. (حداکثر ۱ مورد)

روش اول:



۱- از مثلث ABC اضلاع $BC = a$ و $AC = b$ و میانه‌ی $AM = m_a$ معلوم هستند.

۲- با این اطلاعات مثلث AMC با رعایت نامساوی‌های مثلثی قابل رسم است. با امتداد دادن ضلع BM

به اندازه‌ی $\frac{a}{2}$ از سمت رأس M به رأس B می‌رسم و مثلث ABC حاصل می‌شود.

روش دوم:

۱- ابتدا ضلع $BC = a$ را رسم می‌کنیم.

۲- کمائی به شعاع b و به مرکز رأس C رسم می‌کنیم.

۳- کمائی به شعاع m_a و به مرکز نقطه‌ی M وسط ضلع BC رسم می‌کنیم.

۴- تقاطع این دو کمان نقطه‌ی A را به وجود می‌آورد.



اگر این دو کمان همدیگر رو قطع نکنن که جوابی نداریم. اگر مماس باشن که نقطه‌ی A میافته روی ضلع BC و باز جواب نداریم. اگر مماس در دو کمان در دو نقطه همدیگر رو قطع کنند، هر دو مثلث به وجود اومده با هم هم‌نهشت بوده و جواب مسئله در نهایت به دونس.



تست ۱۳۲: با معلوم بودن دو ضلع $AB = 4$ و $AC = 5$ و میانه‌ی $AM = 6$ چند مثلث قابل رسم است؟

(۱) فاقد جواب (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیش از ۲ جواب

تست ۱۳۳: چند مثلث ABC می‌توان رسم کرد که در آن ضلع $BC = 6$ ، ضلع $AC = 4$ و زاویه‌ی $\hat{B} = 30^\circ$ باشد؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

تست ۱۳۴: چند مثلث با معلومات $a = 6\sqrt{3}$ و $\hat{C} = 30^\circ$ و $m_a = 3$ می‌توان رسم کرد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

تست ۱۳۵: در مثلثی $\hat{A} = 45^\circ$ با فرض اینکه داشته باشیم $\hat{C} = 2a$ ، چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) هیچ (۴) بی‌شمار

www.my-dars.ir

تست ۱۳۶: B, C دو نقطه‌ی ثابت و A یک نقطه‌ی متحرک در یک صفحه هستند. مکان هندسی نقطه‌ی A به گونه‌ای که در مثلث

ABC ارتفاع AH برابر عدد ثابت h و میانه‌ی AM حداکثر برابر $2h$ باشد، کدام است؟

(۱) پاره‌خطی به طول $\sqrt{3}h$ (۲) پاره‌خطی به طول $2\sqrt{3}h$

(۳) دو پاره‌خط به طول‌های $\sqrt{3}h$ (۴) دو پاره‌خط به طول‌های $2\sqrt{3}h$



تست ۱۳۷: برای سه خط d_1, d_2, d_3 دقیقاً دو نقطه وجود دارد که از هر سه خط به یک فاصله باشد. وضعیت این سه خط کدام است؟

(۱) هم‌مس (۲) موازی (۳) دایره‌دو متقاطع (۴) دو خط موازی و یکی متقاطع با آن‌ها



ASR_Group@outlook.com

@ASRschoo2