فصل ۱: دنباله‌ها

دنباله‌ی اعداد

تابع $a(n)$ را یک دنباله می‌نامیم هرگاه دامنه‌ی آن اعداد طبیعی و برد آن زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد.

مثل: $\begin{cases} a: N \to R \\ a(n) = \dfrac{۲n}{n+۳} \end{cases}$.

جمله‌ی عمومی دنباله: ضابطه‌ی دنباله، یعنی $a(n)$ را معمولا با a_n نشان داده و به آن جمله‌ی عمومی دنباله می‌گوییم. دنباله را با اعضای برد آن (که به آن‌ها جملات دنباله می‌گوییم) نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات دنباله را با جمله‌ی عمومی ان به صورت a_n یا $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال دنباله‌ی $a(n) = ۴n - ۳$ را به صورت $a_n = ۴n - ۳$ یا $\{۴n - ۳\}$ و یا اعضای برد آن نشان می‌دهیم.

اگر به جای n به ترتیب اعداد ۱,۲,۳,۴,... را جایگذاری کنیم جملات دنباله به دست می‌آید.

مثال: چهار جمله‌ی اول دنباله‌های زیر را بنویسید.

۱) $a_n = (-۱)^{n+۱}$ ۲) $\left\{\dfrac{n}{n+۱}\right\}$ ۳) $b_n = ۱ + (-\dfrac{۱}{۲})^n$ ۴) $\left\{۱ + (\dfrac{۱}{۲})^n\right\}$

۵) $\{۱ + (-۱)^n\}$ ۶) $\left\{\dfrac{n^۲}{۲^n}\right\}$ ۷) $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{۲}\right\}$ ۸) $\left\{\dfrac{۱}{n}\sin n\pi\right\}$

دنباله‌ی صعودی:

دنباله‌ی a_n را صعودی گوییم هرگاه به ازای هر $n \in N$ داشته باشیم $a_{n+۱} \geq a_n$. (به عبارت دیگر هر جمله، از جمله‌ی قبلی خود بزرگ‌تر باشد) مثل دنباله‌ی $\{۲n+۱\}$ و $\left\{\cos\dfrac{۱}{n}\right\}$

دنباله‌ی نزولی:

دنباله‌ی a_n را نزولی گوییم هرگاه به ازای هر $n \in N$ داشته باشیم $a_{n+۱} \leq a_n$. (به عبارت دیگر هر جمله، از جمله‌ی قبلی خود کوچک‌تر باشد) مثل دنباله‌ی $\left\{\dfrac{۱}{n}\right\}$ و $\left\{\sin\dfrac{۱}{n}\right\}$

نکته: یک دنباله ممکن است نه صعودی و نه نزولی باشد. مثل دنباله‌ی $\{(-۱)^n\}$

روش‌های اثبات صعودی یا نزولی بودن دنباله:

۱) اگر $a_{n+۱} \geq a_n$ باشد، آن‌گاه دنباله صعودی و اگر $a_{n+۱} \leq a_n$ باشد، آن‌گاه دنباله نزولی است.

مثال $\dfrac{۴}{۶۰}$: ثابت کنید دنباله‌ی $\left\{\dfrac{n!}{۲^n}\right\}$، صعودی است.

۲) الف) اگر تمام جملات یک دنباله مثبت باشد در این صورت اگر $\dfrac{a_{n+۱}}{a_n} \geq ۱$ آن‌گاه دنباله صعودی و اگر $\dfrac{a_{n+۱}}{a_n} \leq ۱$، آن‌گاه دنباله نزولی است.

ب) اگر تمام جملات یک دنباله منفی باشد در این صورت اگر $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ آن‌گاه دنباله نزولی و اگر $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$، آن‌گاه دنباله صعودی است.

مثال $\frac{6}{61}$: نشان دهید دنباله‌ی $a_n = \frac{(n+2)^2}{2^{n+2}}$ نزولی است.

۳) اگر دنباله a_n را به صورت تابع $y = f(x)$ بنویسیم، آن‌گاه:

۱) اگر $f'(x) \geq 0$، آن‌گاه تابع f و در نتیجه دنباله‌ی a_n، صعودی و اگر $f'(x) \leq 0$، آن‌گاه تابع f و در نتیجه دنباله‌ی a_n، نزولی است. (دقت کنید در این حالت ریشه‌ی مخرج، بزرگ‌تر از یک نباشد. به عبارتی اگر ریشه‌ی مخرج عددی بزرگ‌تر از یک باشد، آن دنباله، صعودی یا نزولی نیست)

مثال $\frac{15}{61}$: به ازای کدام مقدار a دنباله‌ی $\left\{\frac{an+2}{3n-1}\right\}$ نزولی است؟

دنباله‌ی یکنوا:

دنباله‌ی a_n را یکنوا گوییم هرگاه یا صعودی و یا نزولی باشد.

دنباله‌ی کراندار از بالا:

دنباله‌ی a_n را کراندار از بالا گوییم هرگاه عددی حقیقی مثل M موجود باشد که $a_n \leq M$.

دنباله‌ی کراندار از پایین:

دنباله‌ی a_n را کراندار از پایین گوییم هرگاه عددی حقیقی مثل L موجود باشد که $a_n \geq L$.

دنباله‌ی کراندار:

دنباله‌ی a_n را کراندار کوییم هرگاه هم کران بالا و هم کران پایین داشته باشد.

نکته: دنباله‌ای که حد آن یکتا نباشد اما چند مقدار متمایز حقیقی باشد، کران‌دار است. و اگر حد دنباله بی‌نهایت شود، آن دنباله بی‌کران است.

مثال: کدام‌یک از دنباله‌های زیر صعودی و کران‌دار است؟

۱) $\left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{n^2+2}{n^2+1}\right\}$ ۳) $\left\{\cos\frac{\pi}{n}\right\}$ ۴) $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$

مثال: کدام‌یک از دنباله‌های زیر کران‌دار است؟

۱) $\left\{\sqrt{n}\right\}$ ۲) $\left\{n^2+\cos\frac{\pi}{n}\right\}$ ۳) $\left\{(-1)^n\sqrt{n}\right\}$ ۴) $\left\{(2-\frac{1}{2^n})^2\right\}$

همگرایی دنباله‌ها:

اگر جملات دنباله‌ی a_n به عددی مثل L نزدیک و نزدیک‌تر شوند، گوییم دنباله‌ی a_n به a همگراست.

تشخیص همگرایی یک دنباله:

$\lim\limits_{x\to+\infty} a_n$ را بررسی می‌کنیم. اگر جواب حد یک عدد حقیقی منحصر به فرد باشد، دنباله به آن عدد همگراست وگرنه دنباله واگراست.

نکته: واگرایی دنباله به یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n$ یکتا نباشد مثل: $a_n=(-۱)^n \to \lim\limits_{x\to+\infty} a_n=\begin{cases}۱ & n=۲k\\ -۱ & n=۲k-۱\end{cases}$ و $b_n=\sin\frac{n\pi}{۲}$.

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n=-\infty$ که در این حالت می‌گوییم دنباله به $+\infty$ و یا $-\infty$ واگراست.

مثل: $a_n=\frac{n^۲+۱}{n+۲}\to \lim\limits_{x\to+\infty} a_n=+\infty$.

مثال: همگرایی، واگرایی و واگرایی به $+\infty$ یا $-\infty$ دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

$۱)\left\{\frac{n^۲-۱}{n}\right\}$ $\quad ۲)\left\{(-۱)^n\frac{n+۱}{n}\right\}$ $\quad ۳)\left\{\frac{n}{\sqrt{n+۱}}\right\}$ $\quad ۴)\left\{\frac{۲^{n+۱}+۳^{n+۱}}{۲^{n-۱}+۳^{n-۱}}\right\}$

مثال: کدام‌یک از دنباله‌های زیر همگرا هستند؟ در صورت واگرا بودن، واگرایی دنباله را توضیح دهید.

$۱)\left\{(\frac{۱}{۳})^{n-۱}\right\}_{n=۱}$ $\quad ۲)\left\{۳^n\right\}_{n=۱}$ $\quad ۳)\left\{\log n\right\}_{n=۱}$ $\quad ۴)\left\{\log\frac{۱}{n}\right\}_{n=۱}$ $\quad ۵)\left\{\frac{\log(n^۵+۱)}{\log(n^۳+۲)}\right\}_{n=۱}$

مثال: در هر یک از دنباله‌های زیر، مشخص کنید که آیا دنباله:

الف) (از بالا یا پایین) کران‌دار است؟

ب) جملات دنباله، مثبت یا منفی‌اند؟

ج) صعودی یا نزولی است؟

د) همگرا یا واگراست؟ و اگر واگراست به $+\infty$ و یا $-\infty$ واگراست و یا هیچ‌کدام؟

$۱)\left\{\frac{۵n^۲}{n^۲+۱}\right\}$ $\quad ۲)\left\{\frac{۲n}{n^۲+۱}\right\}$ $\quad ۳)\left\{۴+\frac{(-۱)^n}{n}\right\}$ $\quad ۴)\left\{\sin\frac{۱}{n}\right\}$

$۵)\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$ $\quad ۶)\left\{n\cos\frac{n\pi}{۲}\right\}$ $\quad ۷)\left\{n\sin\frac{n\pi}{۲}\right\}$ $\quad ۸)\left\{n\cos\frac{(-۱)^n}{n}\right\}$

نامساوی برنولی: $(۱+a)^n\ge ۱+na$

نامساوی شوارتز: برای nهای بزرگ $(n\to+\infty)$ نامساوی‌های زیر برقرارند: $(a,b\ge ۲)$

$n^n>n!>a^n>n^b>\log n$

نکته: حد حاصل تقسیم هر دو جمله‌ی دلخواه رابطه‌ی بالا، یا صفر است یا بی‌نهایت. اگر حاصل صفر باشد، دنباله همگرا و اگر بی‌نهایت باشد، دنباله واگراست. به عنوان مثال دنباله‌ی $\left\{\frac{n!}{\log n}\right\}$ واگرا و دنباله‌ی $\left\{\frac{n^{۲۰}}{۲^n}\right\}$ همگراست.

نکته: هر دنباله‌ی همگرا، کران‌دار است ولی عکس این مطلب همواره درست نیست.

مثال: کران‌داری دنباله‌ی $\left\{\frac{۲۴n^۳+۴n-۲}{۸n^۳+۶}\right\}$ را بررسی کنید.

نکته: هر دنباله‌ی صعودی و از بالا کران‌دار همگراست.

نکته: هر دنباله‌ی نزولی و از پایین کران‌دار همگراست.

مثال: ابتدا نشان دهید که دنباله‌های زیر همگرا هستند؛ سپس حد آن‌ها را حساب کنید.

۱) $\left\{1+\frac{1}{n^2+1}\right\}$ ۲) $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ ۳) $\left\{\sin\frac{\pi}{2n}\right\}$

نکته: دنباله‌ی $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$، صعودی و از بالا کران‌دار است، لذا همگراست. (همگرا به e)

نکته: دنباله‌ی $a_n=(1-\frac{1}{n})^n$، صعودی و از بالا کران‌دار است، لذا همگراست. (همگرا به e^{-1})

نکته: دنباله‌ی $a_n=(1+\frac{1}{n})^{an}$ به e^a همگراست.

مثال: حد دنباله‌های زیر را حدس بزنید.

$a_n=(1+\frac{1}{n})^{2n}$ $b_n=(1-\frac{1}{n})^{3n}$ $c_n=(1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}$ $d_n=(\frac{n+1}{n})^{\frac{n}{4}}$

نکته: اگر $a_n\neq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ و $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{(a_n-1)b_n}$.

مثال حد دنباله‌ی $a_n=(\frac{3n+7}{3n+2})^{n+1}$ را به دست آورید.

قضیه‌ی فشردگی در دنباله‌ها:

اگر $a_n\le b_n\le c_n$ و $\lim\limits_{x\to\infty}a_n=\lim\limits_{x\to\infty}c_n=L$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to\infty}b_n=L$

مثال: با استفاده از قضیه‌ی فشردگی نشان دهید $\left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$ همگراست.

جبر دنباله‌ها:

فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی همگرا باشند و c عددی ثابت باشد، در این صورت:

الف) دنباله‌های $\{a_n\pm b_n\}$ و $\{a_n.b_n\}$ و $\{c.a_n\}$ همگرا هستند و بعلاوه:

$\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n.b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n.\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

ب)هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$، آن‌گاه دنباله‌ی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ نیز همگراست و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$.

نکته: اگر a_n همگرا و b_n واگرا باشد، آن‌گاه $a_n\pm b_n$ و $\frac{b_n}{a_n}$ نیز واگراست ولی در مورد همگرایی و یا واگرایی $a_n.b_n$ و $\frac{a_n}{b_n}$ نمی‌توان حرفی زد. ($a_n=\frac{1}{n^2}$ همگرا و $b_n=n$ واگرا و $a_n=1$ همگرا و $b_n=(-1)^n$ واگرا)

نکته: اگر a_n و b_n هر دو واگرا باشند، آن‌گاه در مورد همگرایی و واگرایی هیچ‌کدام از دنباله‌های $a_n \pm b_n$، $a_n.b_n$، $\frac{a_n}{b_n}$ و $\frac{b_n}{a_n}$ حرفی نمی‌توان زد.

نکته: اگر تعدادی متناهی جمله به یک دنباله‌ی همگرا اضافه و یا از ان کم شود، تاثیری در همگرایی و واگرایی دنباله ندارد. به عنوان مثال اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+۲} = L$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-۱} = L$.

مثال: اگر $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = \sqrt{۷+a_n}$، در این صورت حد دنباله‌ی a_n چقدر است؟

مثال: فرض کنیم دنباله‌ی $\{p_n\}$ همگرا و a و b دو عدد ثابت باشند به طوری که $p_{n+۱} = \frac{bp_n}{a+p_n}$، حد این دنباله را پیدا کنید.

مقدمه‌ای بر حد دنباله از روی تعریف:

مثال: جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{۵n^۲}{n^۲+۲}\right\}$ از جمله‌ی چندم به بعد از $\frac{۱}{۲۰}$ کمتر خواهند بود.

مثال: مقدار n از چه عددی باید بزرگ‌تر باشد تا نابرابری $\left|\frac{۲n}{n+۱}-۲\right| < ۰/۰۰۰۱$ برقرار باشد؟

مثال: در دنباله‌ی $a_n = \frac{۲\sqrt{n}}{۱+\sqrt{n}}$ از کدام جمله به بعد، رابطه‌ی $|a_n - ۲| < \frac{۱}{۵}$ برقرار است؟

تعریف حد دنباله به روش ε:

دنباله‌ی $\{a_n\}$ دارای حد L است هرگاه:

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists M \in N \,;\, n \ge m \;\Rightarrow\; |a_n - L| < \varepsilon$$

و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = L$ و می‌گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ به L همگراست.

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۳n+۱}{۵n-۱} = \frac{۳}{۵}$

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید $\left\{\frac{n^۲}{۲n^۲-۱}\right\}$ به $\frac{۱}{۲}$ همگراست.

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید $\left\{\frac{۳n^۲+۱}{۲n^۲+۷}\right\}$ به $\frac{۳}{۲}$ همگراست.

مثال: ابتدا حد دنباله‌ی $\left\{\frac{n-۱}{n}\right\}_{n=۱}$ را حدس زده و سپس حدس خود را به روش ε اثبات کنید.

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید $\left\{\frac{۲n^۲+\sin n}{n^۲}\right\}$ به ۲ همگراست.

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید $\left\{۳-(\frac{۱}{۲})^n\right\}$ به ۳ همگراست.

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید $\left\{\frac{n^۲-۱}{۶n^۳+۱}\right\}$ به ۰ همگراست.

واگرایی دنباله به $+\infty$ و $-\infty$

تعریف: گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا به $+\infty$ است هرگاه:

$$\forall k\in R^{+}\quad \exists M\in N\ ;\ n\ge M\Rightarrow a_n>k$$

تعریف: گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا به $-\infty$ است هرگاه:

$$\forall k\in R^{-}\quad \exists M\in N\ ;\ n\ge M\Rightarrow a_n<k$$

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید $\{n^2\}$ به $+\infty$ واگراست.

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید $\{\sqrt{2n}\}$ واگراست.

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید $\{1000-n^2\}$ واگراست.

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n}=\infty$.

مثال: با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید $\left\{\dfrac{5n^2-3n+11}{2n+1}\right\}$ به $+\infty$ واگراست.

مثال: ثابت کنید هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$.

مثال: فرض کنیم همواره $a_n>0$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$، ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

مثال: فرض کنیم همواره $a_n<0$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$، ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

کران بالا و کران پایین یک مجموعه

اصل تمامیت اعداد حقیقی:

هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالا نیز هست.

به طور معادل می‌توان گفت:

هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران پایین باشد، دارای بزرگ‌ترین کران پایین نیز هست.

سوپریمم و اینفیمم یک مجموعه: کوچک‌ترین کران بالای یک مجموع را سوپریمم و بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه را اینفیمم گوییم.

مثال: سوپریمم و اینفیمم مجموعه‌های زیر را بنویسید.

۱) $A=(-2,3]$ ۲) $B=[4,\sqrt{30}]$ ۳) $C=\{x\mid x^2-4<0\}$ ۴) $D=\left\{x\mid \dfrac{1}{x-2}>1\right\}$

فصل ۲: حدو پیوستگی

حد تابع از روی نمودار

وقتی می‌توان از حد یک تابع در یک نقطه صحبت کرد که تابع، یک همسایگی چپ یا راست (یا همسایگی دو طرفه) در آن نقطه داشته باشد.

در صورتی که در یک نقطه، همسایگی دو طرفه موجود باشد، تابع وقتی در آن نقطه حد دارد که حد چپ و راست درآن نقطه موجود (یک عدد حقیقی باشد) و باهم برابر باشند.

در صورتی که در یک نقطه، فقط همسایگی چپ (یا راست) موجود باشد، حد تابع، همان حد چپ (یا حد راست) خواهد بود.

مثال: تابع هوی‌ساید به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

الف) نمودار تابع هوی‌ساید را رسم کنید.

ب) مقدار $\lim\limits_{x\to 0^-} H(t)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} H(t)$ را مشخص کنید.

مثال: تابع علامت (signum) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$sgn(x)=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

الف) نمودار تابع علامت را رسم کنید.

ب) مقدار $\lim\limits_{x\to 0^-} sgn(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} sgn(x)$ را مشخص کنید.

حد توابع شامل جزء صحیح

مثال: نمودار تابع $f(x)=[x]+[-x]$ را رسم نموده و حدهای زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

مثال: با رسم نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]}$ در بازه‌ی $[-1,1]$، مقدار هر یک از عبارت‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{[x]}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{[x]}$

مثال: حد توابع زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{[x]-2}{x-2}$ ب) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}$

مثال: مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]$ را به دست آورید.

مثال: مقدار $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x+[x]-[2x])$ را بیابید.

مثال: تابع $f(x)=\left[\dfrac{4x^2+3}{x^2+1}\right]$ در چند نقطه دارای حد است؟ (چرا؟)

تعریف دنباله‌ای حد

گوییم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ هرگاه برای هر دنباله مثل a_n که $a_n\to a$ و $a_n\neq a$ ثابت شود $f(a_n)\to L$.
(به عبارتی $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=L$)

نکته: برای اثبات این‌که $\lim\limits_{x\to a}(x)$ موجود نیست، باید دو دنباله مثل a_n و b_n که $a_n\to a$ و $a_n\neq a$ و $b_n\to b$ و $b_n\neq b$ بیابیم به طوری که $f(a_n)\to L_1$ و $f(b_n)\to L_2$.

مثال: به کمک تعریف دنباله‌ای حد ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ در نقطه‌ی $x=0$ حد ندارد. (دی ۹۲)

مثال: به کمک تعریف دنباله‌ای حد ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ وجود ندارد.

مثال: به کمک تعریف دنباله‌ای حد ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ در نقطه‌ی $x=0$ حد ندارد. (خرداد ۹۳)

مثال: به کمک تعریف دنباله‌ای حد ثابت کنید تابع $g(x)=\cos\dfrac{1}{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$ حد ندارد.

مثال: به کمک تعریف دنباله‌ای حد ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(1-x\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$ وجود ندارد. $\left(a_n=\dfrac{1}{n},\ b_n=\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)$

مثال: به کمک تعریف دنباله‌ای حد ثابت کنید تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ x-1 & x>0\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ حد ندارد.

نکته: تابع دیریکله که به صورت $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in Q^c\end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست.

مثال: به کمک تعریف دنباله‌ای حد ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\in Q\\ 3x+1 & x\in Q^c\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=\dfrac{1}{2}$ دارای حد است و مقدار حد را مشخص کنید.

حدهای یک طرفه

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\leq 1\\ x^2+1 & x>1\end{cases}$ را در نظر بگیرید و به کمک تعریف حد راست، ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2$

مثال: به کمک تعریف دنباله‌ای حد ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ موجود نیست.

مثال: به کمک تعریف دنباله‌ای حد ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$ حد ندارد.

مثال: دو تابع به نام‌های f و g مثال بزنید که $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ وجود داشته باشد ولی نه $\lim_{x\to a}f(x)$ وجود داشته باشد و نه $\lim_{x\to a}g(x)$.

مثال: دو تابع به نام‌های f و g مثال بزنید که $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$ وجود داشته باشد ولی نه $\lim_{x\to a}f(x)$ وجود داشته باشد و نه $\lim_{x\to a}g(x)$.

مثال: حد توابع زیر را به دست آورید. (ص ۸۹ کتاب درسی)

قضیه‌ی فشردگی

مثال: اگر به ازای هر $x\neq 0$ داشته باشیم $3-x^2\le f(x)\le 3+x^2$، مطلوب است $\lim_{x\to 0}f(x)$.

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$.

مثال: نشان دهید که اگر $\lim_{x\to a}|f(x)|=0$، آن‌گاه $\lim_{x\to a}f(x)=0$.

مثال: ثابت کنید $\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

قضیه‌ی صفر در کران‌دار

قضیه: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=0$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$.

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$.

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to 1}(x-1)^2\cos\frac{1}{x-1}=0$.

مثال: نشان دهید $\lim_{x\to 0}x^2[x]=0$.

مثال: تابع دیریکله با ضابطه‌ی $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in Q^c\end{cases}$ داده شده است. ثابت کنید $\lim_{x\to 0}xD(x)=0$.

نکته: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

مثال: حد توابع زیر را به دست آورید.

۱) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$ ۲) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{3x}$ ۳) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$

رفع ابهام حدود $\frac{0}{0}$

مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$ را حساب کنید.

مثال: عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$.

پیوستگی تابع:

شرط این‌که بتوان از پیوستگی تابع f در نقطه‌ی a صحبت کرد آن است:

الف) تابع در a تعریف شده باشد. (a عضو دامنه‌ی تابع f باشد)

ب) تابع f در همسایگی چپ یا راست (و یا در همسایگی دو طرفه a) تعریف شده باشد.

تعریف پیوستگی: تابع f در نقطه $x=a$ وقتی پیوسته است که حد چپ = حد راست = مقدار تابع در نقطه‌ی a.

پیوستگی تابع از روی نمودار:

پیوستگی تابع از روی ضابطه:

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱} & x\neq ۱\\ ۴ & x=۱\end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

مثال: نشان دهید تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته است.

مثال: در $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[۳]{x+۸}-۲}{x} & x\neq ۰\\ a & x=۰\end{cases}$ مقدار a را چنان انتخاب کنید که تابع در $x=۰$ پیوسته باشد.

مثال: به ازای چه مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq ۰\\ a & x=۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته است؟

مثال: عددهای a و b راچنان انتخاب کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}a+[x] & x<۰\\ b & x=۰\\ \dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos x}} & x>۰\end{cases}$$

پیوستگی راست و چپ:

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ را در اعداد صحیح بررسی کنید.

نکته: تابع $f(x)=[x]$ در نقاط غیر صحیح پیوسته بوده ولی در نقاط صحیح ناپیوسته است. (در نقاط صحیح از راست پیوسته است)

مثال: تابع $f(x)=\left[\dfrac{x}{۲}\right]$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=[\sin x]$ را در نقطه‌ی $x=\pi$ بررسی کنید. (پیوستگی راست و چپ)

مثال: نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[\sin x]$ را در بازه‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ مشخص کنید.

نکته: اگر تابع f در نقطه‌ای پیوسته باشد، آن‌گاه $|f|$ نیز در ان نقطه پیوسته است ولی عکس این مطلب همواره درست نیست.

نکته: اگر تابع f در a پیوسته و تابع g در a ناپیوسته باشد آن‌گاه $f \pm g$ در a ناپیوسته است.

مثال: دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی مجموع آن‌ها در آن نقطه پیوسته باشد.

مثال: دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی ضرب آن‌ها در آن نقطه پیوسته باشد.

نکته: مجموع و حاصل‌ضرب دو تابع پیوسته، تابعی پیوسته است.

پیوستگی در نقاط انتهایی: اگر تابع f در نقطه‌ی a فقط همسایگی راست داشته باشد در این صورت منظور از پیوستگی تابع در a، همان پیوستگی راست تابع در a می‌باشد. (به طریق مشابه برای همسایگی چپ)

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.

پیوستگی در یک بازه: تابع f را در یک بازه پیوسته گوییم هرگاه در تمام نقاط آن بازه پیوسته باشد.

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ را در دامنه‌اش بررسی کنید.

نکته: توابع گویا در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته‌اند.

مثال: توابع زیر روی چه بازه‌هایی پیوسته‌اند؟

۱) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-1}$

۲) $g(x)=\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

پیوستگی توابع مثلثاتی

نکته: توبع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در هر نقطه از R پیوسته‌اند.

نکته: تابع $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ به جز در نقاطی که $\cos x=0$، پیوسته است و داریم: $\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

نکته: تابع $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ به جز در نقاطی که $\sin x=0$، پیوسته است و داریم: $\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi$.

مثال: تابع $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\sin x}$ در چه نقاطی پیوسته است؟

مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=[x]\sin \pi x$ روی R پیوسته است.

نکته: تابع $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in Q \\ h(x) & x\in Q^c \end{cases}$ فقط در نقاطی که $g(x)=h(x)$ پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in Q \\ 0 & x\in Q^c \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است.

ویژگی‌های مهم توابع پیوسته

قضیه‌ی بولزانو: اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$، آن‌گاه حداقل یک عدد مانند c در بازه‌ی باز (a,b) وجود دارد که $f(c)=0$.

مثال: با استفاده از قضیه‌ی بولزانو ثابت کنید معادله‌ی $x^2+x-3=0$ ریشه‌ای در بازه‌ی $(1,2)$ دارد.

مثال: نشان دهید معادله‌ی $x-\cos x=0$ ریشه‌ای در بازه‌ی $(0,1)$ دارد.

مثال: نشان دهید معادله‌ی $x^5+x^4+2x^3-x+2=0$ در بازه‌ی $[-2,0]$ دارای جواب است.

مثال: ثابت کنید معادله‌ی $\sin x - x^2 + x + 1 = 0$ حداقل دو ریشه در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ دارد.

مثال: حدود a را چنان بیابید که معادله‌ی $x^3+x+a=0$ در بازه‌ی $(0,1)$ حداقل دارای یک ریشه باشد.

نکته: اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد باشد، آن‌گاه معادله‌ی $p(x)=0$ حداقل دارای یک ریشه حقیقی است.

قضیه‌ی مقدار میانی: فرض کنید f روی بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در این صورت حداقل یک عدد مانند c در بازه‌ی $[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=k$.
(به عبارتی خط $y=k$ نمودار تابع f را قطع می‌کند.)

مثال: نشان دهید که خط $y=2$ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2(x-3)^2+x$ را قطع می‌کند.

مثال: آیا تابع $f(x)=\frac{x^3}{4}+\sin \pi x+4$ در بازه‌ی $[-2,2]$ مقدار ۵ را می‌تواند اختیار کند؟

پیوستگی تابع وارون یک تابع پیوسته

نکته: نمودار توابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ تقارن دارند؛ به عبارتی برای رسم نمودار تابع f^{-1}، کافیست نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

فرض کنید f تابعی یک به یک و پیوسته باشد که دامنه‌ی آن بازه‌ی بسته‌ی D است. اگر f^{-1} با دامنه‌ی B، تابع وارون f باشد، آن‌گاه f^{-1} در هر نقطه از B پیوسته است.

حدهای نامتناهی

$\frac{a<0}{0^-}$ $\qquad$ $\frac{a>0}{0^-}=-\infty$ $\qquad$ $\frac{a<0}{0^+}=-\infty$ $\qquad$ $\frac{a>0}{0^+}=+\infty$

مثال: حدود زیر را به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-1}{(x-2)^2}$ $\qquad$ ۲) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{x+1}{x+2}$ $\qquad$ ۳) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{[x]-1}{x^2-1}$

۴) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x$ $\qquad$ ۵) $\lim\limits_{x\to 0^+}\cot x$

حد توابع کسری و مجانب قائم

خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می‌گوییم هرگاه حد تابع f (یا حد چپ و یا حد راست) در نقطه‌ی a برابر با $+\infty$ و یا $-\infty$ شود.

به عبارتی برای تعیین مجانب قائم تابع f، حد تابع f را به ازای ریشه‌های مخرج به دست می‌آوریم. (دقت کنید ریشه‌ی مخرج عبارت‌های رادیکالی با ریشه‌ی زوج را منفی نکند و همچنین اگر تابع فقط شامل یک کسر باشد و آن کسر به حالت $\frac{0}{0}$ تبدیل شود، در این صورت مجانب قائم نخواهد بود مگر این‌که تابع شامل کسر دیگری باشد که حد آن کسر در $x=a$ بی نهایت شود.

مثال: مجانب قائم نمودار توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x)=\frac{-3}{x^2-4}$ $\qquad$ ۲) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-3}}$ $\qquad$ ۳) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}+\frac{2}{\sqrt{x-3}}$

$4)\ f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ $\qquad$ $5)\ f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x^2-1}$ $\qquad$ $6)\ g(x)=\tan x\ ,\ -\pi\le x\le\pi$

حد در بی‌نهایت و مجانب افقی

خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع f گوییم به شرطی که $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.

به عبارتی برای تعیین مجانب افقی، باید حد تابع را در صورت امکان، هم در $+\infty$ و هم در $-\infty$ حساب کنیم.

نکته: توابعی که دامنه‌ی تعریف آن‌ها کران‌دار باشد، مجانب افقی ندارند.

مثال: مجانب افقی نمودار توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$1)\ y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ $\qquad$ $2)\ y=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ $3)\ y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{\sqrt{3-x}}$ $\qquad$ $4)\ y=\sqrt{x^2+x}-x$

$5)\ y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad$ $6)\ y=\dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad$ $7)\ y=\sqrt{4-x^2}$

حد در بی‌نهایت و مجانب مایل

مجانب مایل هر تابع به صورت $y=mx+b$ (یک خط مایل) می‌باشد.

روش‌های تعیین مجانب مایل:

۱) اگر f، یک تابع گویا باشد، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم. اگر باقی‌مانده صفر نشود، در این صورت، خارج قسمت $= y$، مجانب مایل خواهد بود.

۲) مقدار m و b از فرمول‌های زیر به دست می‌آیند.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\quad ,\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)$$

مثال: مجانب مایل نمودار توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$1)\ f(x)=\dfrac{x^5}{x^4-1}$ $\qquad$ $2)\ y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2+3}$ $\qquad$ $3)\ 2x+\sqrt{x^2+3}$ $\qquad$ $4)\ y=x-\sqrt{x^2+2x}$

مثال: اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو خط مجانب مایل تابع $y=\sqrt{x^2+4x}$ را حساب کنید.

فصل ۳: مشتق و کاربردهای آن

تعریف مشتق:

فرض کنیم a یک نقطه‌ی درونی از دامنه‌ی تابع f باشد، در این صورت مشتق تابع f در $x=a$ را می‌توان از فرمول‌های زیر به دست آورد. (به شرطی که این حدها عددی حقیقی باشد)

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مشتق راست:

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b)$ تعریف شده باشد، در این صورت مشتق راست تابع در a به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مشتق چپ نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود.

۱. مشتق تابع $f(x)=5x^2+1$ را در نقطه‌ی به طول $x=3$، به وسیله‌ی فرایند حد پیدا کنید.

۲. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در $x_0=1$ به دست آورید.

مشتق‌پذیری در یک نقطه

تابع f را در نقطه‌ی $x=a$ مشتق‌پذیر گوییم هرگاه در آن نقطه مشتق داشته باشد. (مشتق چپ و راست باهم برابر باشند)

۳. مشتق‌پذیری توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

۱) $f(x)=|x-1|\ ,\ x_0=1$

۲) $f(x)=x|x|\ ,\ x_0=0$

۳) $f(x)=|x^2-1|\ ,\ x_0=1$

۴) $f(x)=x[x]\ ,\ x_0=0$

۵) $f(x)=\sqrt[3]{x-2}\ ,\ x_0=2$

۶) $f(x)=x\,\mathrm{sgn}(x)\ ,\ x_0=0$

۷) $f(x)=(x-2)^2[x]\ ,\ x_0=2$

۸) $f(x)=|\sin x|\ ,\ x_0=0$

۴. فرض کنید $f(x)=\sin x\left[\cos\frac{x}{2}\right]$، مشتق چپ و راست تابع f را در نقطه‌ی $x=\pi$ حساب کنید.

۵. مشتق چپ و راست تابع $f(x)=x[x^2+3]$ را در نقطه‌ی $x_0=0$ در صورت وجود بیابید.

۶. مشتق چپ و راست تابع $f(x)=|x-1|+2|x-2|$ رادر نقطه‌ی $x=1$ در صورت وجود بیابید.

۷. با فرض این‌که $f(x)=\sqrt[9]{x^2}$، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}$ را به دست آورید.

۸. فرض کنید $f(x)=2x^3-x+1$ باشد، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}$ را به دست آورید.

۹. فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x^3 & |x|\geq 1\\ 2x^2-1 & |x|<1\end{cases}$، حاصل $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-1}{h}$ را بیابید.

* مقدار مشتق تابع f در نقطه‌ی a همان شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه‌ی a می‌باشد.

مثال: آیا تابع زیر در نقطه‌ی مشخص شده خط مماس دارد؟ در صورت وجود معادله‌ی خط مماس را بنویسید.

$f(x)=\sin x \quad , \qquad x=0$

مثال: معادله‌ی خط مماس و قائم بر منحنی تابع $y=\sqrt{x}$ را در نقطه‌ی $(4,2)$ بیابید. (با محاسبه‌ی شیب خط مماس به کمک تعریف)

معادله‌ی خط مماس قائم

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق f (یا مشتق چپ یا مشتق راست) در a بی‌نهایت شود، در این صورت خط $x=a$ خط مماس قائم نمودار تابع f خواهد بود.

۱۰. نشان دهید خط $x=1$، مماس قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ می‌باشد.

تابع مشتق

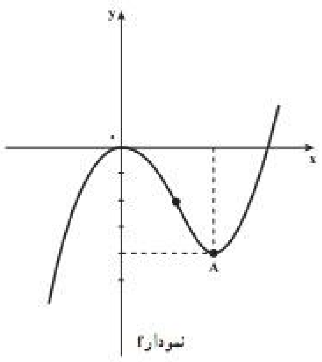
مشتق تابع f را در حالت کلی می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

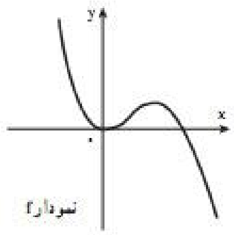
مثال: مشتق تابع $f(x)=x^2$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x}$، ضابطه‌ی تابع f' را به دست آورده و به کمک نمودار f، نمودار f' را رسم کنید.

مثال: نمودار تابع f در شکل زیر نشان داده شده است. با استفاده از آن نمودار تابع f' را به صورت تقریبی رسم کنید.



مثال: نمودار تابع f در شکل زیر نشان داده شده است. با استفاده از آن نمودار تابع f' را به صورت تقریبی رسم کنید.



آهنگ متوسط و آهنگ آنی (لحظه‌ای) تغییر یک تابع

آهنگ لحظه‌ای تغییرات تابع $y=f(x)$ وقتی که $x=a$ باشد برابر است با $f'(a)$

آهنگ متوسط تغییرات تابع $y=f(x)$ وقتی که متغیر از $x_۱$ به $x_۲$ تغییر می‌کند برابر است با: $\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$.

۱۱. معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=\frac{۱}{۲}t^۲-۳t+۱$ می‌باشد:

الف) سرعت متوسط این متحرک را در فاصله‌ی زمانی $t=۰$ تا $t=۴$ به دست آورید.

ب)آهنگ آنی تغییرات $f(t)$ را در $t=۷$ بیابید.

۱۲. آهنگ تغییر حجم یک مکعب نسبت به طول ضلع آن را وقتی که ضلع آن ۱۰ سانتی‌متر است بیابید. (شهریور ۹۲)

۱۳. آهنگ تغییر مساحت دایره را نسبت به قطر آن بیابید. (دی ۹۲)

۱۴. اگر هوا را به داخل بالنی بدمیم، آهنگ تغییر حجم بالن، وقتی که شعاع آن ۱۵ سانتی متر است، چقدر است و آن را توصیف کنید.

۱۵. حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه، بر حسب لیتر برابر است با $v(t)=۲۵۰(۱۶-t)^۲$، آهنگ لحظه‌ای تخلیه‌ی آب بعد از ۴ دقیقه چقدر است و آن را توصیف کنید.

آهنگ تغییر در علم اقتصاد

اگر $f(x)$ تابع هزینه‌ی تولید x واحد کالا بر حسب تومان باشد در این صورت:

الف) هزینه‌ی افزایش تولید از a کالا به b کالا برابر است با $f(b)-f(a)$.

ب) هزینه‌ی واقعی تولید nامین کالا برابر است با $f(n)-f(n-۱)$.

ج) هزینه‌ی نهایی تولید در سطح a کالا عبارت است از $f'(a)$.

$f'(a)$ یعنی اگر در لحظه‌ای که سطح تولید a واحد کالا است، برای تولید یک عدد کالای دیگر به اندازه‌ی $f'(a)$ تومان دیگر لازم است.

۱۶. هزینه‌ی ساخت x یخچال، $c(x)$ تومان است که در آن $c(x)=۸۰۰۰۰۰۰+۴۰۰۰۰۰x-۵۰۰x^۲$ می‌باشد. هزینه‌ی تولید ۱۰۱ امین یخچال چقدر است و معنی آن را توضیح دهید.

۱۷. فرض کنید تابع هزینه‌ی تولید x واحد از محصولی $c(x)=۰/۰۵x^۲-۳x$ و سطح تولید روزانه ۱۰۰ واحد است.

الف) هزینه‌ی افزایش تولید از ۱۰۰ به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟

ب) هزینه‌ی نهایی در این سطح تولید چقدر است؟

۱۸. یک کارخانه‌ی پارچه بافی، طاقه‌هایی از پارچه‌ای به عرض ثابت تولید می‌کند. هزینه‌ی تولید x متر از این پارچه $c(x)$ تومان است.

الف) معنی $c'(x)$ چیست؟

ب) معنی $c'(۱۰۰۰)=۹۰۰$ چیست؟

نقطه‌ی گوشه

نقطه‌ی $(a,f(a))$ را یک نقطه‌ی گوشه می‌نامیم هرگاه در نقطه‌ی $x=a$ مشتق چپ و راست، موجود باشند ولی باهم برابر نباشند.

* اگر زاویه‌ی بین دو مماس چپ و راست باشیب‌های m_1 و m_2 را با θ نشان دهیم آن‌گاه: $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

۱۹.با محاسبه‌ی مشتق چپ و راست تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=0$، نشان دهید مبدا مختصات یک نقطه‌ی گوشه برای f است و سپس اندازه‌ی زاویه‌ی ایجاد شده در نقطه‌ی گوشه را به دست آورید.

۲۰. ثابت کنید مبدا مختصات یک نقطه‌ی گوشه برای تابع $f(x)=\begin{cases}x & x<0\\ x^2 & x\geq 0\end{cases}$، می‌باشد و اندازه‌ی زاویه‌ی ایجاد شده در گوشه را به دست آورید.

۲۱. نشان دهید نقطه‌ی $x=1$ یک نقطه‌ی گوشه برای تابع $f(x)=|x^2-1|$ است. سپس اندازه‌ی زاویه‌ی ایجاد شده در نقطه‌ی گوشه را به دست آورید.

۲۲. نشان دهید نقطه‌ی $x=2$ یک نقطه‌ی گوشه برای تابع $f(x)=|x^2-2x|$ است. سپس اندازه‌ی تانژانت زاویه‌ی ایجاد شده در نقطه‌ی گوشه را به دست آورید. (خرداد ۹۲)

نقطه‌ی بازگشتی

نقطه‌ی $(a,f(a))$ را نقطه‌ی بازگشتی تابع f می‌گوییم هرگاه مشتق چپ و راست f در نقطه‌ی a هر دو بی‌نهایت و با علامت‌های مختلف باشند.

$$\begin{cases}f'_+(a)=+\infty\\ f'_-(a)=-\infty\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}f'_+(a)=-\infty\\ f'_-(a)=+\infty\end{cases}$$

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) به ازای هر $x\neq 0$، $f'(x)$ را پیدا کنید. (ضابطه‌ی تابع مشتق)

ج) نشان دهید که تابع در $(0,0)$ مماس قائم دارد و نمودار f را رسم کنید.

*** تابع در نقاط زیر مشتق پذیر نیست:**

۱. در نقطه‌ای که ناپیوسته باشد.

۲. در نقطه‌ای که مماس قائم داشته باشد. (از جمله در نقطه‌ی بازگشتی)

۳. در نقطه‌ی گوشه

نتایج اولیه‌ی مشتق پذیری

ارتباط بین پیوستگی و مشتق‌پذیری

پیوستگی شرط لازم برای مشتق پذیری است نه شرط کافی؛ یعنی برای این‌که یک تابع مشتق‌پذیر باشد باید پیوسته باشد. در عین حال ممکن است یک تابع پیوسته باشد ولی مشتق‌پذیر نباشد.

۲۳. ثابت کنید اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد، آن‌گاه در a پیوسته است.

۲۴. تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است، ثابت کنید تابع $g(x)=(x-a)f(x)$ در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است.

۲۵. مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3+1 & x\geq 1\\ -x^2+1 & x\geq 0\end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

۲۶. مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x^2 & x\geq 0\end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.

۲۷. مقدار a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}(x+1)^3 & x\leq 0\\ ax+a+b & x>0\end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد.

۲۸. به ازای چه مقادیری از a و b و c تابع $f(x)=\begin{cases}x^3 & , & x<1\\ ax^2+bx+c & , & x\geq 1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ مشتق مرتبه‌ی دوم دارد؟

۲۹. با محاسبه‌ی مشتق اول، دوم و سوم تابع $f(x)=\sin x$، مشتق nام تابع f را حدس بزنید.

۳۰. اگر تابع‌های f و g در a مشتق پذیر باشند و c یک عدد ثابت باشد، در این صورت توابع زیر همگی در a مشتق‌پذیر هستند.

۱) $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

۲) $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$

۳) $(f.g)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$

۴) $(cf)'(a)=cf'(a)$

۵) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

یادآوری و تکمیل فرمول‌های مشتق‌گیری (مشتق تابع نمایی، تابع ln، تابع ضمنی)

۳۱. مشتق توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=\sqrt{\tan x+\cot x}$

۲) $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}$

۳) $y=\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}$

۴) $y=\sqrt[4]{\frac{x}{x^2+1}}$

۵) $f(x)=\sin(\cos x)$

۶) $f(x)=e^{\tan x}$

۷) $f(x)=\sqrt{x}e^{5x}$

۸) $f(x)=\ln|x^2-1|$

۹) $y=\ln|\sin x|$

۱۰) $y=\frac{\ln x}{e^x}$

۱۱) $f(x)=\ln|x+\sqrt{x}|$

۱۲) $f(x)=\ln|\ln\sin x|$

۱۳) $x^3+y^3=4xy$

۱۴) $\cos\sqrt{y}=y^2\sin x$

۱۵) $\sqrt{xy}+\cos xy=1$

۳۲. اگر $x+y^4+1=y+x^2+xy^2$ باشد، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در نقطه‌ی $(1,1)$ بیابید.

۳۳. مشتق چهارم تابع $f(x)=(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)$ را در $x=1$ حساب کنید.

۳۴. ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم f را چنان انتخاب کنید که $f(1)=2$ و $f'(1)=3$ و $f''(1)=4$ باشد.

۳۵. ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم f را چنان بیابید که $f(-1)=-6$، $f'(-1)=4$ و $f''(-1)=-2$ باشد. (دی ۹۱)

۳۶. دامنه‌ی مشتق‌پذیری توابع $y=\sqrt{x}$ و $y=|x-1|$ را بیابید.

۳۷. طول نقاطی را تعیین کنید که خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^4-2x^2$ در آن نقاط افقی باشد.

۳۸. نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=x^2+x$ پیدا کنید که در ان نقطه، خط مماس بر منحنی تابع، موازی قاطعی باشد که دو نقطه با طول‌های $x=1$ و $x=3$ واقع بر منحنی تابع را به هم وصل می‌کند.

۴۰. در چه نقاطی نمودار $f(x)=x^2e^{-x^2}$ دارای مماس افقی است؟

۴۱. اگر $x+y^4+1=y+x^2+xy^2$، $\dfrac{dy}{dx}$ را در نقطه‌ی $(2,1)$ بیابید.

۴۲. اگر $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$، $\dfrac{dy}{dx}$ را در نقطه‌ی $(4,1)$ بیابید.

۴۳. در چه نقاطی روی نمودار $x^2-xy+y^2=3$ مماس بر منحنی افقی است؟ (خرداد ۹۲)

۴۴. شیب خط مماس بر منحنی $x^3+4x^2y-3y^3=0$ را در نقطه‌ی $(-1,1)$ بنویسید.

۴۵. خط $y=ax+b$ نمودار $x^2+y^2-xy-1=0$ را در نقاط M و N قطع می‌کند. a و b را چنان حساب کنید که مماس در نقاط M و N خط عمود بر محور x باشد.

۴۶. مقدارهایی از λ را پیدا کنید که به ازای آن‌ها $y=e^{\lambda x}$ در معادله‌ی دیفرانسیل $y''+6y'+8y=0$ صدق کند.

۴۷. اگر $f(x)=\dfrac{x+1}{x}\operatorname{sgn}(x^2-x+1)$ باشد، $f'(x)$ را حساب کنید.

۴۸. اگر $f(x)=x|x^2-1|$ باشد، $f'(x)$ را حساب کنید و دامنه‌ی مشتق‌پذیری f را به دست آورید.

* اگر از رابطه‌ی مکان – زمان، نسبت به زمان مشتق بگیریم، معادله‌ی سرعت – زمان به دست می‌آید و اگر از معادله‌ی سرعت – زمان نسبت به زمان مشتق بگیریم، معادله‌ی شتاب زمان به دست می‌آید.

مثال: معادله‌ی حرکت ذره‌ای به صورت $s(t)=t^3-4t^2+2t+3$ است. (s بر حسب سانتی‌متر و t بر حسب ثانیه است) شتاب این ذره را به عنوان تابعی از زمان پیدا کنید. پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب چقدر است؟

مثال: فنری از سمت چپ به دیواری متصل است و جسمی به انتهای راست فنر متصل است و به طور افقی روی سطح صاف نوسان می‌کند. معادله‌ی حرکت این جسم $x(t)=6\sin t$ است. (s x بر حسب سانتی‌متر و t بر حسب ثانیه است)

الف) سرعت و شتاب این جسم را در لحظه‌ی به دست آورید.

ب) موقعیت، سرعت و شتاب جسم مورد نظر را در زمان $t=\dfrac{2\pi}{3}$ و جهت حرکت در این زمان چگونه است؟

معادله‌ی خط مماس و قائم بر منحنی از یک نقطه (واقع در روی منحنی یا خارج منحنی)

۴۹. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=x^3-2x$ را در نقطه‌ی به طول $x=2$ واقع بر منحنی بنویسید.

۵۰. معادله‌ی خط مماس بر نمودار $y=\dfrac{\ln x}{x}$ را در نقطه‌ی $A(1,0)$ بنویسید.

۵۱. معادله‌ی خط قائم بر نمودار $y=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ را در نقطه‌ی $(0,\frac{1}{2})$ پیدا کنید.

۵۲. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=e^{2x}\cos \pi x$ را در نقطه‌ی $(0,1)$ پیدا کنید.

۵۳. معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=e^{2x}+x+1$ را در نقطه‌ای به طول صفر روی منحنی بنویسید. (شهریور ۹۲)

۵۴. معادله‌ی خط مماس بر $y=\sqrt[3]{x-1}$ را در نقطه‌ی $(1,0)$ بنویسید.

۵۵. معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y^2=\sin(x+y)$ را در نقطه‌ی $(\pi,0)$ روی منحنی بنویسید.

۵۶. معدله‌ی خط مماس بر نمودار $x^3+y^3=3xy$ را در نقطه‌ی $A(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ بنویسید.

۵۷. معادله‌ی خط مماس بر دایره‌ی $x^2+y^2=4$ را در نقطه‌ی $(1,\sqrt{3})$ بنویسید.

۵۸. از نقطه‌ی $A(0,-1)$ دو خط ماس بر منحنی $f(x)=x^2+x$ رسم شده است. معادلات این دو خط مماس را به دست آورید.

۵۹. از نقطه‌ی $A(2,5)$ دو خط ماس بر منحنی $f(x)=4x-x^2$ رسم شده است. معادلات این دو خط مماس را به دست آورید.

قاعده‌ی زنجیری مشتق (مشتق تابع مرکب)

۱. اگر تابع g در x و تابع f در $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع مرکب fog در نقطه‌ی x مشتق‌پذیر است و $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$.

۲. اگر y تابعی از u و u نیز تابعی از x باشد، آنگاه مشتق y نسبت به x از رابطه‌یزیر به دست می‌آید: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$.

مثال: اگر $y=\cos u$ و $u=x^3+2x$ باشد، عبارت $\dfrac{dy}{dx}$ را به دست آورید.

۶۰. اگر $g(x)=x^3-1$ و $f'(x)=\sqrt{3x+16}$ باشد، مقدار عددی $(fog)'(1)$ را بیابید.

۶۱. اگر $f'(0)=4$، $g(2)=0$ و $g'(2)=3$ باشد، مشتق تابع fog را در نقطه‌ی $x_0=2$ بیابید.

۶۲. اگر $f(0)=0$ و $f(x)=\sin(4x-f(x))$، آن‌گاه $f'(0)$ را به دست آورید.

۶۳. اگر $f(x^3+6x)=g(\sin 3x+\sin 2x)$ و $f'(0)=4$ باشد، $g'(0)$ را به دست آورید.

۶۴. ثابت کنید اگر تابع f زوج و مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع مشتقش فرد است.

۶۵. ثابت کنید اگر تابع f فرد و مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه تابع مشتقش زوج است.

۶۶. با فرض این‌که تابع f زوج و تابع g فرد و $f'(1)=2$ و $g'(1)=3$، مقدار $(f+g)'(-1)$ را حساب کنید.

۶۷. با فرض این‌که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم باشد و به ازای هر عدد حقیقی x، $g(x)=f(2-x^2)$ و $f'(2)=2$، مقدار $g''(0)$ را حساب کنید.

آهنگ‌های تغییر وابسته

* اگر $y=f(x)$ باشد، در این صورت برای تعیین آهنگ لحظه‌ای تغییرات y نسبت به x، در نقطه‌ی $x=a$، ابتدا از تابع مشتق گرفته و سپس مقدار a را جایگذاری می‌کنیم.

مثال: آهنگ تغییرات مساحت یک دایره نسبت به شعاع آن را در لحظه‌ای که شعاع برابر با ۳ سانتی‌متر است بیابید.

* اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد، آن گاه مشتق y نسبت به x از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. (صورت دیگری از قاعده‌ی زنجیری)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

۶۸. بالنی را از هوا پر می‌کنیم، به طوری که حجم آن با آهنگ ۸۰ سانتی متر مکعب بر ثانیه افزایش می یابد. وقتی شعاع بالن ۲۰ سانتی متر است، شعاع بالن با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

۶۹. شعاع کره‌ای با آهنگ ۳ میلی متر بر ثانیه بزرگ می‌شود. در لحظه‌ای که قطر کره ۶۰ میلی‌متر است، حجم کره با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

۷۰. مخزنی استوانه‌ای به شعاع ۳ متر را با آهنگ ۲ متر مکعب بر دقیقه از آب پر می‌کنیم. ارتفاع آب با چه آهنگی بالا می‌آید؟

مشتق تابع معکوس

اگر $(a,b)\in f$ بوده و f تابعی یک به یک باشد، در این صورت $(f^{-1})'(b)$ برابر است با $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$.

۷۱. اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ باشد، $(f^{-1})'(2)$ را بیابید.

۷۲. فرض کنید $f(x)=2x^3+3x^2+6x+1$، مقدار $(f^{-1})'(1)$ را در صورت وجود پیدا کنید.

۷۳. تابع $f(x)=1+e^{2x}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1})'(2)$ را در صورت وجود بیابید. (دی ۹۱)

۷۴. اگر $f(x)=x^3+2x$ باشد، معادله‌ی خط قائم بر نمودار f^{-1} را در نقطه‌ی $(3,1)$ بنویسید.

۷۵. فرض کنید f^{-1} وارون تابع مشتق پذیر f باشد و $g(x)=f^{-1}(x)+1$، اگر $f(1)=2$ و $f'(1)=3$، مقدار $g'(2)$ را بیابید. (شهریور ۹۲)

۷۶. فرض کنید f^{-1} تابع وارون تابع مشتق پذیر f باشد و $g(x)=\frac{1}{f^{-1}(x)}$، اگر $f(1)=2$ و $f'(1)=\frac{1}{8}$، مقدار $g'(2)$ را بیابید.

۷۷. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ وارون پذیر و مشتق پذیر است و $f'(x)=\sqrt{9+f^2(x)}$، مقدار $(f^{-1})'(4)$ را پیدا کنید.

توابع صعودی و نزولی

اگر تابع f پیوسته باشد، در این صورت:

* در نقاطی که $f'(x)\geq 0$ باشد، تابع f صعودی و در نقاطی که $f'(x)>0$ باشد، تابع f صعودی اکید است.

* در نقاطی که $f'(x)\leq 0$ باشد، تابع f نزولی و در نقاطی که $f'(x)<0$ باشد، تابع f نزولی اکید است.

۷۸. مشخص کنید تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=2x^3-3x^2-12x+7$ در کجاها صعودی اکید و در کجاها نزولی اکید است؟

۷۹. تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ در چه بازه‌ای صعودی اکید و در چه بازه‌ای نزولی اکید است؟

۸۰. تابع f با ضابطه‌ی $g(x)=\frac{x}{1+x^2}$ روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا نزولی اکید است؟

نکته: اگر تابع f در یک بازه مجانب قائم داشته باشد، آنگاه در این بازه یکنوا نیست. به عنوان مثال تابع $y=\tan x$ در بازه‌ی $(۰,\pi)$ یکنوا نیست چون در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}\in(۰,\pi)$ مجانب قائم دارد.

نکته: در توابع ناپیوسته، از روش فوق نمی‌توان استفاده کرد و بهتر است از روش رسم نمودار استفاده کنیم. مثل بررسی صعودی و نزولی بودن توابع $y=x+[x]$ و $y=x-[x]$ و $y=\tan x$.

نقطه بحرانی

* نقطه‌ی درونی $c\in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f گوییم، هرگاه $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.
* به عبارت دیگر، برای تعیین نقاط بحرانی تابع f، نقاطی درونی از تابع را به دست می‌آوریم که در آن نقاط یا مشتق تابع مساوی صفر شود و یا مشتق موجود نباشد.

(مشتق ناپذیرها: نقاط ناپیوسته، نقاط نوک تیز یا گوشه، نقاطی که در آن‌ها مماس موازی محور y ها است)

نکته: نقاط انتهایی بازه، نمی‌توانند بحرانی باشند.

مثال: نقطه‌ی $x=۰$ برای توابع $f(x)=x^۲$, $f(x)=|x|$, $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ یک نقطه‌ی بحرانی است ولی برای توابع $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{۱}{x}$ بحرانی نیست.

نکته: ریشه‌های داخل قدر مطلق در صورتی که نقطه‌ی درونی باشند، بحرانی‌اند.

نکته: در توابع به فرم $y=|u|$، برای یافتن نقاط بحرانی، $u=۰$ و $u'=۰$ را حل می‌کنیم.

نکته: در توابع به فرم $y=|u|.v$، برای یافتن نقاط بحرانی، $u=۰$ را حل می کنیم و نقاط بحرانی $y=u.v$ را تعیین می‌کنیم.

نکته: اگر بخشی از نمودار تابع، خطی موازی محور x ها باشد، تمام نقاط آن خط، بحرانی خواهند بود چون در تمام آن نقاط مشتق برابر با صفر است.(در این حالت تابع بی‌شمار نقطه‌ی بحرانی دارد)

۸۱. نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x)=-۲x^۳-۳x^۲$　　　　۲) $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$

۳) $f(x)=\sqrt[۳]{x}$　　　　۴) $y=\frac{۱}{x^۲-۱}$

۵) $y=\frac{x}{x^۲}$　　　　۶) $f(x)=x\left|x^۲-۱\right|$

۷) $f(x)=|x-۱|\sqrt[۳]{x^۲}$　　　　۸) $f(x)=\sin^۲ x+۲\cos x \quad ۰\le x\le ۲\pi$

۹) $f(x)=\sin x+\cos x \ , x\in[۰,۲\pi]$　　　　۱۰) $y=\left|x^۳-۳x\right|$

۱۱) $y=|\cos x|,\ x\in[۰,۲\pi]$　　　　۱۲) $y=۲xe^x$

۱۳) $y=(x^۲-۹)\sqrt{x}$　　　　۱۴) $y=\begin{cases} ۳x-x^۳ & , \quad x<۲ \\ x^۲+۴x & , \quad x\ge ۲\end{cases}$

$$15)\ y=\begin{cases} x & , \quad -1\le x<0 \\ 2x^2-x, & \quad 0\le x\le 1 \end{cases} \qquad 16)\ y=\begin{cases} x^2-x & , \quad -1\le x<1 \\ x^3-4x & , \quad 1<x\le 3 \end{cases}$$

$$17)\ y=[x]$$

اکسترمم مطلق (سراسری)

* تابع f در نقطه‌ی $x=a$ ماکسیمم مطلق دارد هرگاه به ازای هر $x\in D_f$، داشته باشیم: $f(a)\ge f(x)$.
* تابع f در نقطه‌ی $x=a$ مینیمم مطلق دارد هرگاه به ازای هر $x\in D_f$، داشته باشیم: $f(a)\le f(x)$.

نکته: یک تابع ممکن است در یک بازه، ماکزیمم مطلق و یا مینیمم مطلق نداشته باشد.

قضیه: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه در این بازه هم مقدار ماکسیمم و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

*** اکسترمم مطلق در یکی از نقاط زیر رخ می‌دهد:**

الف) در نقاط انتهایی بازه

ب) در نقاط درونی بازه که در آن‌ها مشتق تابع برابر با صفر است.

ج) در نقاط درونی بازه که در آن‌ها تابع مشتق‌پذیر نیست.

برای تعیین اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته‌ی f در بازه‌ی $[a,b]$ مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم.

الف) نقاط بحرانی تابع را پیدا کرده و مقدار تابع را در این نقاط تعیین می‌کنیم.

ب) $f(a)$ و $f(b)$ را تعیین می‌کنیم.

ج) مقادیر به دست آمده در قسمت‌های بالا را باهم مقایسه کرده و ماکسیمم و مینیمم مطلق را به دست می‌آوریم.

۸۲. نقاط اکسترمم مطلق توابع زیر را در بازه‌ی داده شده بیابید.

$$1)\ f(x)=-2x^3-3x^2,\ x\in\left[-\frac{1}{2},2\right] \qquad 2)\ f(x)=(x-1)x^{\frac{2}{3}},\ x\in[-1,1]$$

$$3)\ f(x)=\frac{1}{1+x^2},\ x\in[-1,2] \qquad 4)\ f(x)=x|x|,\ x\in[-1,2]$$

$$5)\ f(x)=x+1+\frac{4}{x+1},\ x\in[0,2] \qquad 6)\ f(x)=\begin{cases} x^2-x & ,-1\le x\le 1 \\ 3x-3 & ,1<x\le 3 \end{cases}$$

$$7)\ f(x)=\cos^2 x+\sin x \quad , \quad x\in[0,\pi]$$

بهینه سازی

پس از مدل سازی، تابع را بر حسب یک متغیر نوشته و اکسترمم آن را به دست می‌آوریم.

۸۳. مجموع دو عدد مثبت برابر ۹ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آن‌ها را پیدا کنید.

۸۴. حاصل ضرب دو عدد مثبت برابر ۸ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آن‌ها را پیدا کنید.

۸۵. مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی را بیابید که در نیم‌دایره‌ای به شعاع R محاط شده است و یک ضلع آن روی قطر نیم‌دایره قرار دارد.

۸۶. می‌خواهیم یک مخروط به مولد ۲۰ بسازیم. ارتفاع مخروط چقدر باشد تا حجم آن ماکزیمم شود.

۸۷. می‌خواهیم در کره‌ای به شعاع R یک استوانه‌ی دوار قائم محاط کنیم. که بزرگ‌ترین حجم را داشته باشد. در این صورت شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را بیابید.

اکسترمم نسبی (موضعی)

* اگر در یک همسایگی نقطه‌ی a داشته باشیم $f(a) \geq f(x)$، در این صورت تابع f در $x=a$ ماکسیمم نسبی دارد.

* اگر در یک همسایگی نقطه‌ی a داشته باشیم $f(a) \leq f(x)$، در این صورت تابع f در $x=a$ مینیمم نسبی دارد.

* اکسترمم‌های نسبی در نقاط انتهایی بازه رخ نمی‌دهند.

تعیین نقاط اکسترمم نسبی با استفاده از آزمون مشتق اول

* نقاطی را می‌یابیم که در آن‌ها $f'(x)=0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد و در آن نقاط یک همسایگی دو طرفه موجود باشد.
اگر در این نقاط، مشتق تغییر علامت دهد، تابع در ان نقطه اکسترمم نسبی دارد.

۸۸. نقاط ماکزیم و مینیمم نسبی توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x)=x^4+2x^3-5x^2$

۲) $f(x)=x|x|$

۳) $f(x)=x^2e^{-x}$

۴) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

۵) $f(x)=x^2$

۶) $f(x)=x^3$

۷) $f(x)=3x^5-5x^3+15$

۸) $f(x)=|x^2-1|$

۹) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$

۱۰) $f(x)=\ln|x^2-1|$

۱۱) $f(x)=\cos^2 x+\sin x \ ,\ 0\leq x\leq 2\pi$

۱۲) $f(x)=\dfrac{\cos x}{2+\sin x} \ ,\ 0\leq x\leq 2\pi$

تعیین نقاط اکسترمم نسبی با استفاده از آزمون مشتق دوم

* $f'(x)=0$ را حل کرده و جواب‌های آن را به دست می‌آوریم. (فرض کنیم $x=c$ یک جواب معادله باشد)
اگر $f''(c)<0$ باشد، نقطه‌ی به طول c ماکزیمم نسبی است.
اگر $f''(c)>0$ باشد، نقطه‌ی به طول c مینیمم نسبی است.
اگر $f''(c)=0$ باشد، در این صورت این آزمون نتیجه نمی‌دهد.

۸۹. با اعمال آزمون مشتق دوم، مقادیر اکسترمم‌های موضعی تابع $f(x)=x^4-4x+1$ را در صورت وجود بیابید. (دی ۹۱)

۹۰. با اعمال آزمون مشتق دوم، نوع اکسترمم موضعی تابع $f(x)=xe^{-x}$ را تعیین کنید. (خرداد ۹۲)

۹۲. مقادیر اکسترمم تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ را در صورت وجود بیابید. چرا در نقاط $x=\pm 2$ مماس‌های عمود بر محور طول‌ها وجود دارد؟

۹۳. مقدارهای ماکزیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{3}x-2\cos x$ را روی بازه‌ی $(0,2\pi)$ پیدا کنید.

جهت تقعر منحنی یک تابع

اگر نمودار f روی بازه‌ی I بالای همه‌ی مماس‌هایش باشد، آن‌گاه جهت تقعر نمودار f به سمت بالاست.

اگر نمودار f روی بازه‌ی I پایین همه‌ی مماس‌هایش باشد، آن‌گاه جهت تقعر نمودار f به سمت پایین است.

* در بازه‌ای که $f''(x)>0$ باشد، جهت تقعر نمودار تابع f به سمت بالاست.
* در بازه‌ای که $f''(x)<0$ باشد، جهت تقعر نمودار تابع f به سمت پایین است.

مثال: جهت تقعر نودار تابع $f(x)=x^3$ را تعیین کنید.

مثال: جهت تقعر نودار تابع $f(x)=x^3-3x^2$ را تعیین کنید.

مثال: جهت تقعر نودار تابع $f(x)=x^4$ را تعیین کنید.

نقطه‌ی عطف نمودار یک تابع

گوییم نقطه‌ی درونی $(c,f(c))$ یک نقطه‌ی عطف نمودار تابع f است هرگاه:

الف) تابع در این نقطه پیوسته باشد.

ب) نمودار تابع در این نقط خط مماس داشته باشد.

ج) جهت تقعر نمودار تابع در این نقطه عوض شود.

* در نقطه‌ی عطف مماس بر منحنی، از منحنی عبور می‌کند.
* در نقطه‌ی عطف $f''(c)=0$ یا $f''(c)$ موجود نیست.
* نقطه‌ی عطف روی منحنی قرار دارد.
* در صورتی که f پیوسته و غیر خطی باشد، اکسترمم‌های f' نقاط عطف f هستند.
* در چند جمله‌ای درجه‌ی سوم، نقطه‌ی عطف، مرکزتقارن منحنی است.
* برای به دست آوردن نقطه‌ی عطف، نقاطی را به دست می‌آوریم که در آن‌ها $f''=0$ یا f'' موجود نیست، اگر در آن نقاط جهت تقعر عوض شود، آن نقاط نقطه‌ی عطف نمودار تابع f خواهند بود.

۹۴. جهت تقعر منحنی f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ را به کمک قضیه‌ی تقعر بررسی نموده و نقطه‌ی عطف تابع را در صورت وجود پیدا کنید.

۹۵. جهت تقعر نمودار توابع زیر بررسی کرده و نقطه‌ی عطف آن‌ها را در صورت وجود بیابید.

۱) $f(x)=x^4-4x^3$ ۲) $f(x)=x^6$

۳) $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$

۹۶. تابع f با ضابطه‌ی $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ روی چه بازه‌هایی تقعر رو به بالا یا رو به پایین دارد؟

۹۷. به ازای چه مقداری از a، نقطه‌ای به طول ۱، نقطه ی عطف منحنی $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3+3ax^2$ می‌باشد؟

۹۸. مقادیر b,a را چنان بیابید که نقطه‌ی $(1,2)$ نقطه‌ی عطف تابع $y=ax^3+bx^2+4$ باشد.

۹۹. به ازای چه مقداری از a، تقعر منحنی f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۴}+ax^{۳}+۳x^{۲}$ همواره رو به بالاست؟

جدول رفتار و نمودار توابع

* برای رسم نمودار توابع با استفاده از مشتق، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. دامنه‌ی تابع را به دست می‌آوریم.

۲. محل برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات را به دست می‌آورریم. (یک بار $x=۰$ و محاسبه‌ی y و یک بار $y=۰$ و محاسبه‌ی x)

۳. مجانب‌های نمودار منحنی را در صورت وجود تعیین می کنیم.

۴. y' را به دست آورده و از حل معادله‌ی $y'=۰$ نقاط اکسترمم را به دست می‌آوریم.

۵. y'' را به دست آورده و از حل $y''=۰$ نقطه‌ی عطف را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

۶. جدول تغییرات را رسم کرده و در صورت لزوم از نقاط کمکی استفاده می‌کنیم و از روی جدول، صعودی و نزولی بودن تابع و همچنین جهت تقعر نمودار تابع را مشخص می‌کنیم.

۷. نمودار تابع را با توجه به جدول تغییرات رسم می‌کنیم.

۱۰۰. جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $f(x)=۳x^{۳}-۹x$ ۲) $f(x)=x^{۴}-۸x^{۲}+۷$

۳) $f(x)=\dfrac{x+۱}{x-۲}$ ۴) $f(x)=\dfrac{x-۲}{x}$

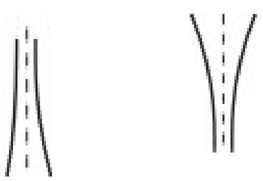
۵) $f(x)=\dfrac{x^{۲}}{x^{۲}-۱}$ ۶) $f(x)=x+\sqrt{x^{۲}-۱}$

۷) $f(x)=\sin x+\sqrt{۳}\cos x \ , ۰\le x\le ۲\pi$ ۸) $f(x)=\dfrac{۱-\sin x}{۱+\cos x} \ , ۰\le x\le ۲\pi$

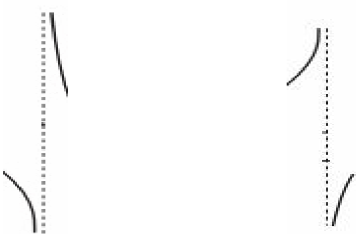
۹) $f(x)=\dfrac{۱}{۱+e^{-x}}$

* نکاتی در باره نمودار شناسی:

۱. اگر تابع f در اطراف $x=a$ به صورت زیر باشد، مخرج در $x=a$ ریشه‌ی مضاعف دارد.



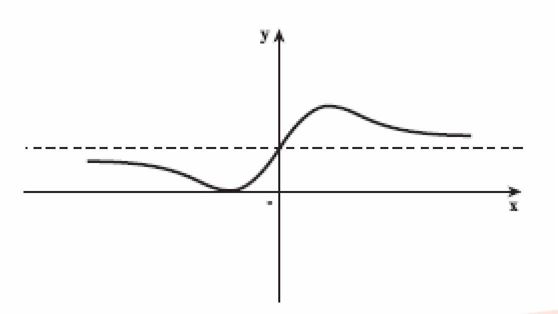
۲. اگر تابع f در اطراف $x=a$ به صورت زیر باشد، مخرج در $x=a$ ریشه‌ی ساده دارد.



۳. اگر تابع بر محور x ها مماس باشد، معادله‌ی $y=۰$ ریشه‌ی مضاعف دارد.

۴. اگر نمودار در نقطه‌ی $x=a$ تو خالی باشد، صورت و مخرج کسر به ازای $x=a$ صفر می‌شوند.

۱۰۱. مقادیر a و b را چنان بیابید که نمودار تابع f با ضابطه‌ی $y=\frac{x^{۲}+ax+۱}{۲x^{۲}+b}$ به صورت زیر باشد.



۱۰۲. شکل زیر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^{۳}+ax^{۲}}{x^{۲}+bx+c}$ است. مقدار عددی $(bc-a)$ را بیابید.

فصل ٤: انتگرال

نماد $\sum$.

معمولا برای راحتی کار، مجموع $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ را به صورت $\sum_{k=1}^{n} a_k$ نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال: $\sum_{i=3}^{6} 2i = 2(3) + 2(4) + 2(5) + 2(6) = 6 + 8 + 10 + 12 = 36$.

خواص سیگما

در محاسبات مربوط به سیگما، از فرمول‌های زیر می‌توان استفاده کرد.

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$2)\ \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{n} c = n.c$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m}$$

$$5)\ \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{m=1}^{n} a_m$$

$$6)\ \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(k+1) = f(1) - f(n+1) \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} f(k+1) - f(k) = f(n+1) - f(1)$$

$$7)\ \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$8)\ \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$9)\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$10)\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$11)\ \sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

۱. جمع‌های زیر را بسط دهید.

$۱)\sum_{k=۱}^{۱۰۰} k$ $۲)\sum_{i=۱}^{۲۰}(i^{۲}+۴i)$

$۳)\sum_{i=۱}^{n}(i+۲)$ $۴)\sum_{i=۱}^{n}((i+۱)^{۳}-i^{۳})$

$۵)\sum_{n=۱}^{۹۹}\log\frac{n}{n+۱}$ $۶)\sum_{k=۱}^{n}(\frac{k}{k+۱}-\frac{k+۱}{k+۲})$

۲. جمع $\sum_{i=۱}^{۱۵}(i-۱)^{۲}$ را بسط داده و حاصل آن را محاسبه کنید. (شهریور ۹۲)

۳. جمع های زیر را با استفاده از نماد $\sum$ بنویسید.

$۱)۵+۶+۷+۸+۹$ $۲)۲+۲+۲+...+۲$ (۲۰۰بار)

$۳)۱+x+x^{۲}+x^{۳}+...+x^{n}$ $۴)\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۴}+\frac{۳}{۸}+...+\frac{n}{۲^{n}}$

مساحت به عنوان حد مجموع (روش مستطیلی)

برای محاسبه‌ی مساحت زیر نمودار تابع نامنفی و کران‌دار $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ مراحل زیر را طی می‌کنیم.

$۱)\Delta x=\frac{b-a}{n}$

$۲)x_i=a+i\Delta x=a+i(\frac{b-a}{n})$

$۳)S_n=\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x$

$۴)A=\lim_{n\to\infty}S_n$

۴. مساحت ناحیه‌ای را بیابید که تحت خط مستقیم $y=x+۱$ و محدود به خطوط $x=۰$ تا $x=۲$ باشد. (دی ۹۲)

۵. . مساحت ناحیه‌ای را بیابید که تحت خط مستقیم $y=۳x+۴$، بالای $y=۰$ و محدود به خطوط $x=-۱$ تا $x=۲$ باشد.

۶. مساحت ناحیه‌ی تحت $y=x^{۲}$ بالای $y=۰$، از $x=۰$ تا $x=۲$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۲)

۷. مساحت ناحیه ای را بیابید که محدود به نمودار $y=x^{۲}-۱$ و زیر خط $y=۰$ باشد.

مجموع ریمان (مجموع بالا و پایین ریمان)

در افراز بازه‌ی $[a,b]$ به $n+۱$ نقطه، n بازه خواهیم داشت که در ان طول بازه‌ها برابر است با $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. فرض کنیم l_i طول نقطه‌ی مینیمم مطلق بازه‌ی iام و u_i طول نقطه‌ی ماکزیمم مطلق بازه‌ی iام باشد. (منظور از بازه‌ی iام، بازه‌ی $[x_{i-۱},x_i]$ می‌باشد)، در این صورت:

مجموع پایین ریمان: $L_n = \sum_{i=1}^{n} f(l_i) = (f(l_1) + f(l_2) + \dots + f(l_n))\Delta x$

مجموع بالای ریمان: $U_n = \sum_{i=1}^{n} f(u_i) = (f(u_1) + f(u_2) + \dots + f(u_n))\Delta x$

۸. مجموع بالا و مجموع پایین ریمان تابع $f(x) = 4x^2 + 1$ را در بازه‌ی $[0,2]$ برای $n = 4$ به دست آورید.

۹. مجموع پایین را برای تابع $f(x) = -x + 2$ بر بازه‌ی $[0,2]$ به ازای $n = 3$ به دست آورید. (شهریور ۹۲)

۱۰. مجموع‌های بالا و پایین را برای تابع $y = \frac{1}{x}$ بر بازه‌ی $[1,2]$، با نتخاب $n = 5$ محاسبه کنید.

۱۱. مجموع‌های بالا و پایین را برای تابع $y = \cos x$ بر بازه‌ی $[0,2\pi]$، با نتخاب $n = 4$ محاسبه کنید.

۱۲. مجموع‌های بالا و پایین را برای تابع $y = \sin x$ بر بازه‌ی $[0,\pi]$، با نتخاب $n = 6$ محاسبه کنید.

انتگرال نامعین

اگر $F'(x) = f(x)$ باشد در این صورت $F(x)$ را یک تابع اولیه‌ی $f(x)$ می‌گوییم و در این صورت $\int f(x)dx = F(x)$.

به عنوان مثال $\int 2xdx = x^2 + c$.

فرمول‌های انتگرال نامعین:

۰) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

۱) $\int dx = x + c$

۲) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$

۳) $\int \sqrt[n]{x^m}dx = \int x^{\frac{m}{n}}dx = \frac{1}{\frac{m}{n}+1}x^{\frac{m}{n}+1} + c$

۴) $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$

۵) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

۶) $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

۷) $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + c \qquad \int \sin xdx = -\cos x + c$

۸) $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c \qquad \int \cos xdx = \sin x + c$

۹) $\int \tan axdx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + c \qquad \int \tan xdx = -\ln|\cos x| + c$

$$۱۰)\int \cot ax dx = \frac{۱}{a}\ln|\sin ax| + c \qquad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + c$$

$$۱۱)\int \frac{۱}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} dx = \sin^{-۱}\frac{x}{a} + c$$

$$۱۲)\int \frac{-۱}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} dx = \cos^{-۱}\frac{x}{a} + c$$

$$۱۳)\int \frac{۱}{a^۲ + x^۲} dx = \frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{x}{a} + c$$

$$۱۳)\int \frac{-۱}{a^۲ + x^۲} dx = \frac{۱}{a}\cot^{-۱}\frac{x}{a} + c$$

محاسبه‌ی انتگرال معین و نامعین با استفاده از قوانین انتگرال

۱۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\int \frac{۳x^۲ - x}{x} dx \qquad ۲)\int \frac{x^۲ + ۲}{\sqrt{x}} dx$$

$$۳)\int \frac{(x + ۲)^۳}{x} dx \qquad ۴)\int \frac{x^۲ + \sqrt{x} + ۱}{۲x^۲} dx$$

$$۵)\int \sqrt{(۱ - \sqrt{x})^۲ + ۴\sqrt{x}}\, dx \qquad ۶)\int \frac{۱ + e^{۲x}}{e^x} dx$$

$$۷)\int \left(\frac{۲}{x^۲} - \sin ۳x\right) dx \qquad ۸)\int \sin ۴x \cos ۲x\, dx$$

$$۹)\int (\sin ۲x + \tan x) dx \qquad ۱۰)\int (\sin ۳x - \cos ۲x) dx$$

$$۱۱)\int \sin^۲ x\, dx$$

انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

خواص انتگرال نامعین

$$۱)\int_a^a f(x)dx = ۰$$

$$۲)\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$۳) f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

۱۳. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$۱)\int_{-۱}^{۲} (x^۲ - ۳x + ۲) dx \qquad ۲)\int_۰^a x^۲ dx$$

۳) $\int_{0}^{4} x\sqrt[3]{x}\,dx$

۴) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x}$

۵) $\int_{-2}^{-1} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})dx$

۶) $\int_{1}^{2} (\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2})dx$

۷) $\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx$

۸) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$

۹) $\int_{0}^{\frac{4\pi}{3}} |\sin x|\,dx$

۱۰) $\int_{1}^{2} \frac{x^2+2}{x}dx$

۱۱) $\int_{0}^{2} |\sqrt{x} - 1|\,dx$

۱۲) $\int_{-1}^{1} \sqrt{|x| - x}\,dx$

۱۳) $\int_{-1}^{2} x|x-1|\,dx$

۱۴) $\int_{0}^{2} x^2[x]\,dx$

۱۵) $\int_{1}^{3} [x]\,dx$

۱۶) $\int_{0}^{2} (x - [x])\,dx$

۱۷) $\int_{-1}^{2} [x]|x-1|\,dx$

۱۸) $\int_{0}^{2} (x^{2[x]} + 1)\,dx$

۱۹) $\int_{-2}^{2} \left[\frac{x}{2}\right] dx$

۲۰) $\int_{0}^{1} |3x-1|[3x]\,dx$

۱۹) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$

۱۴. مساحت ناحیه‌ای از صفحه را که تحت نمودار تابع $y = 3x - x^2$ بوده و در نقاط تقاطع با محور xها به این محور محدود می باشد محاسبه کنید.

۱۵. مساحت یک طاق تحت $y = \sin x$ را محاسبه کنید.

قضیه: هر تابع پیوسته بر یک بازه‌ی بسته انتگرال‌پذیر است.

قضیه: هرگاه تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و m و M به ترتیب مقادیر مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع f بر این بازه باشند، آن‌گاه: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

اثبات:

$$m \le f(x) \le M \Rightarrow \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

رابطه ی بالا را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت. $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$

نکته: به $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ مقدار متوسط (مقدار میانگین) تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ می‌گوییم.

۱۶. مقدار متوسط تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در بازه‌ی $[0,2]$ به دست آورید.

۱۷. مقدار متوسط تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در بازه‌ی $[0,2]$ به دست آورید.

۱۸. مقدار میانگین تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x[x]$ را در بازه‌ی $[-1,1]$ به دست آورید. (خرداد ۹۲)

۱۹. مقدار میانگین تابع $f(x)=e^{-x}+\cos x$ را بر بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ به دست آورید.

۲۰. مقدار میانگین تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ را بر بازه‌ی $[0,\pi]$ حساب کنید.

۲۰. اگر مقدار متوسط تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ در بازه‌ی $[1,a]$ برابر $\frac{2}{a-1}$ باشد، مقدار a را حساب کنید.

مشتق‌گیری از انتگرال

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad \Rightarrow \quad F'(x)=f(x)$$

$$F(x)=\int_u^v f(t)dt \quad \Rightarrow \quad F'(x)=v'f(v)-u'f(u)$$

۲۱. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

۱) $f(x)=\int_2^x \sin^3 5t\,dt$ ۲) $F(x)=\int_x^2 e^{7t+1}dt$

۳) $G(x)=x^2\int_0^{5x} e^{-t^2}dt$

۲۲. اگر $F(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^3}\,dt$ باشد، آن‌گاه $F''(2)$ را بیابید.

۲۳. اگر $f(x)=\int_2^x \frac{dt}{\sqrt{2t+5}}$، معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی بنویسید.

قضیه‌ی مقدار میانگین در انتگرال ها: هرگاه f بر بازه‌ی $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد، در این صورت نقطه‌ای مانند c از این بازه هست به طوری که: $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$.

اثبات: می‌دانیم $M \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le m$ که در آن m و M به ترتیب مقادیر مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ هستند. چون f پیوسته است بنابر قضیه‌ی مقدار میانی هر مقدار بین مینیمم و ماکزیمم خود را اختیار می‌کند. بنابر این نقطه‌ای مثل $c\in[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$ در نتیجه $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$.

فصل	نوبت اول	نوبت دوم و شهریور
صفر	۲	۲
یک	۵/۵	
دو	۱۰/۵	۲
سه	۲ تا آخر بخش ۳	۱۲
چهار	-	۴
جمع	۲۰	