بسم الله الرحمن الرحیم

بیست درس ریاضی ۲ در ۲۰ صفحه

جزوه حاضر جمع بندی و خلاصه ای از نکات مهم ۷ فصل ریاضی ۲ پایه ی یازدهم رشته تجربی می باشد، که هدف از تهیه آن مرور و دسته بندی مطالب آموخته شده در کتاب است. با توجه به حجم کم و هدف مد نظر(آمادگی برای امتحان پایان ترم) بدیهی است که این فایل به تنهایی همه تیپ سوالاتی که ممکن است در آزمون پایانی طرح شود را پوشش نخواهد داد. صد البته که تسلط بر تمامی مباحث مطرح شده در کتاب درسی، و حل تمامی تمرینات کتاب اولین قدم در نتیجه گیری مطلوب در آزمون پایانی سال خواهد بود. امیدوارم جزوه حاضر برای دانش آموزان عزیز مفید واقع شود.قطعا این جزوه دارای اشکالاتی است که امید است همکاران گرانقدر من و نیز دانش آموزان عزیز برای رفع آنها با اینجانب در ارتباط باشند.

سعید بیرامی-شهرستان میانه-۰۹۳۶۴۶۴۵۹۵۰

درس اول: هندسه ی تحلیلی

شیب خط $ax+by+c=۰$ برابر است با $m=-\frac{a}{b}$

دو خط موازیند هر گاه: $m_۱=m_۲$ و بر هم عمودند هرگاه $m_۱m_۲=-۱$

فاصله دو نقطه:

فاصله دو نقطه $A=(x_۱,y_۱)$ و $B=(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

نقطه وسط پاره خط:

اگر نقطه M وسط پاره خط AB باشد ، دارای مختصات زیر خواهد بود.

$$M=\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)$$

فاصله نقطه از خط:

فاصله نقطه $A=(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۱

مثال۱

فاصله نقطه $A=(۱,-۲)$ را از خط $-۲x+۲y-۱=۰$ به دست آورید.

حل

$$d=\frac{|-۲(۱)+۲(-۲)+(-۱)|}{\sqrt{(-۲)^۲+۲^۲}}=\frac{|-۷|}{\sqrt{۸}}=\frac{۷}{\sqrt{۸}}$$

مثال۲

نشان دهید که خطوط به معادلات $۳x+۵y+۷=۰$ و $۵x-۳y-۲=۰$ بر هم عمودند.

حل

$$۳x+۵y+۷=۰\rightarrow m_۱=-\frac{۳}{۵}$$

$$۵x-۳y-۲=۰\rightarrow m_۲=\frac{۵}{۳}\rightarrow m_۱\times m_۲=-۱$$

مثال۳

مثلث ABC با رئوس $A(۳,-۲)$و $B(۳,٤)$ و $C(-۱,۱)$ را در نظر بگیرید.معادله میانهAM را به دست آورید.

۲

حل

$$x_M=\frac{۳+(-۱)}{۲}=۱\ ,\qquad y_M=\frac{۴+۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$m_{AM}=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{\frac{۵}{۲}+۲}{۱-۳}=\frac{\frac{۹}{۲}}{-۲}=\frac{-۹}{۴}$$

$$y-(-۲)=\frac{-۹}{۴}(x-۳)\rightarrow y=\frac{-۹}{۴}x+\frac{۱۹}{۴}$$

مثال ٤

نشان دهید مثلث ABC با رئوس $A(۳و۱)$و $B(۶,۰)$ و $C(۴,۴)$ قائم الزاویه است.

حل

$$AB=\sqrt{(۶-۳)^۲+(۰-۱)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

$$AC=\sqrt{(۴-۳)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

$$BC=\sqrt{(۴-۶)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}$$

$$\sqrt{۲۰}^۲=\sqrt{۱۰}^۲+\sqrt{۱۰}^۲\rightarrow BC^۲=AB^۲+AC^۲$$

طبق رابطه فیثاغورس مثلث قائم الزاویه است.

۳

تمرین ۱

قطر دایره ای به مرکز $(-۱,۲)$ که بر خط به معادله $x+y=۱$ مماس باشد چقدر است؟

تمرین ۲

یکی از اضلاع مربعی بر خط $y=۲x-۱$ واقع است.اگر $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

تمرین ۳

مساحت مثلث ABC به مختصات $A(۰,۱)$ و $B(۳,۴)$ و $C(-۱,۱)$ را به دست آورید.

٤

فصل اول　　　　　　　　***هندسه تحلیلی و جبر***

درس دوم: معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

روش تغییر متغیر

$x^۴ - ۱۰x^۲ + ۹ = ۰ \to x^۲ = t \to t^۲ - ۱۰t + ۹ = ۰$

مجموع و حاصلضرب ریشه های معادله درجه۲

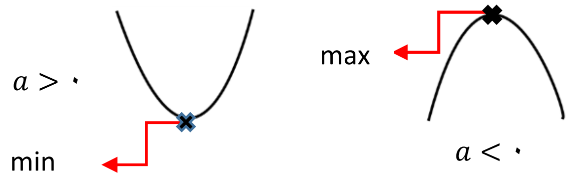
اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند داریم:

حاصلضرب ریشه ها : $P = \frac{c}{a}$ حاصل جمع ریشه ها: $S = -\frac{b}{a}$

معادله درجه دومی که مجموع ریشه هایش S و حاصلضرب ریشه هایش P باشد به فرم $x^۲ - Sx + P = ۰$ خواهد بود.

ماکزیمم و مینیمم سهمی

در سهمی $y = ax^۲ + bx + c$



طول نقطه مینیمم و ماکزیمم از رابطه $x = \frac{-b}{۲a}$ به دست می آید.

با جایگذاری طول مینیم یا ماکزیمم در معادله سهمی مقدارمینیمم و ماکزیمم تابع به دست می آید.

۱

تشخیص علامت ریشه های احتمالی تابع

مثال۱

در مورد تعداد و علامت ریشه های احتمالی $y = x^۲ + ۶x + ۵ = ۰$ تحقیق کنید.

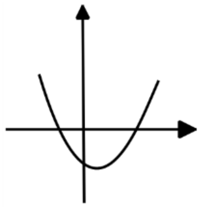
حل

$\Delta = ۱۶ > ۰$ دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

$P = \frac{c}{a} = ۵ > ۰$ ریشه ها هم علامتند.

$S = \frac{-b}{a} = -۶ < ۰$ ریشه ها هر دو منفی هستند.

تشخیص علامت ضرایب از روی نمودار



دهانه سهمی رو به بالا $a > ۰$

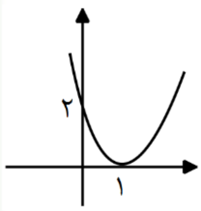
تابع محور y ها را در قسمت منفی قطع کرده $c < ۰$

مجموع دو ریشه مثبت است. $-\frac{b}{a} > ۰ \to b < ۰$

۲

نوشتن ضابطه تابع از روی نمودار

فرض کنیم نمودار مقابل مربوط به $f(x) = ax^۲ + bx + c$ است



راس سهمی $x = \frac{-b}{۲a} = ۱ \to ۲a + b = ۰$

$f(۰) = ۲ \to c = ۲$ و $f(۱) = ۰ \to a + b + c = ۰$

$a + b = -۲ ,\quad ۲a + b = ۰ \to a = ۲ \ , b = -۴$

$f(x) = ۲x^۲ - ۴x + ۲$

مثال ها

مثال۱: معادله $(x^۲ - ۱)^۴ + (x^۲ - ۱)^۲ - ۲ = ۰$ را حل کنید.

$(x^۲ - ۱)^۲ = t \to t^۲ + t - ۲ = ۰ \to t = -۲ ,\quad t = ۱$

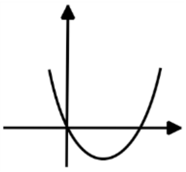
$(x^۲ - ۱)^۲ = -۲$ غ ق ق $\to (x^۲ - ۱)^۲ = ۱ \to x^۲ = ۲$

$x = \pm\sqrt{۲}$

۳

تمرین ۱

شکل روبه رو مربوط به تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ است



الف) علامت a و b را تعیین کنید.

ب)مقدار c را بیابید

.

تمرین ۲-بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^۲ + ۴x + ۱$ را تعیین کنید.

تمرین ۳- اگر α و β ریشه های معادله $۲x^۲ - ۵x - ۶ = ۰$ باشند، مقدار عددی $(\alpha - \beta)^۲$ را به دست آورید.

۴

درس سوم: معادلات گویا . معادلات رادیکالی

معادلات گویا

ابتدا مخرج ها را تجزیه کرده و ک.م.م مخرج ها را تعیین می کنیم.
سپس کل معادله را در ک.م.م ضرب می کنیم.
معادله جدید را حل کرده و جواب های قابل قبول را تعیین می کنیم.

مثال۱

معادله $\frac{x}{2-x}+\frac{2}{x}=5$ را حل کنید.

طرفین ضرب در ک.م.م $\rightarrow$ ک.م.م $= x(2-x) \rightarrow$

$$x(x)+2(2-x)=5(x)(2-x)$$

$$x^2+4-2x=10x-5x^2 \rightarrow 6x^2-12x+4=0$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{6}$$

نکته: عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به عدد طلایی معروف است که مقدار تقریبی آن ۱.۶۱۸ می باشد.

معادلات رادیکالی

ابتدا عبارت رادیکالی را به یک طرف معادله می آوریم و بعد از به توان رساندن و خارج کردن از حالت رادیکالی معادله جدید را حل کرده و جوابهای صدق شده را تعیین می کنیم.

۱

مثال ۲

معادلات زیر را حل کنید.

$$\sqrt{2+x}=x$$

$$2+x=x^2 \rightarrow x^2-x-2=0$$

$(x-2)(x+1)=0 \rightarrow x=2$ ق ق

$x=-1$ غ ق ق در معادله صدق نمی کند

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+6}=1$$

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+6}+1$$

$$x+3=3x+6+2\sqrt{3x+6}+1$$

$$-2x-4=2\sqrt{3x+6} \rightarrow -x-2=\sqrt{3x+6}$$

بار دیگر طرفین به توان ۲

$$x^2+4x+4=3x+6 \rightarrow x^2+x-2=0$$

$x=1$ ق ق $\qquad x=-2$ غ ق ق

۲

مثال ۳

دو کارگر با هم کاری را ۱۰ روزه تمام می کنند. اگر سرعت کار یکی از آن ها ۲ برابر دیگری باشد، هر کارگر به تنهایی کار را چند روزه تمام می کند.

حل : دو کارگر در یک روز $\frac{1}{10}$ کار را انجام می دهند.کارگر اول در x روز کار را تمام می کند یعنی در یک روز $\frac{1}{x}$ کار را انجام می دهد، و کارگر دوم در یک روز $\frac{1}{2x}$ کار را انجام می دهد.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{10}\xrightarrow{\times 2x}2+1=\frac{x}{5}\rightarrow x=15 \quad , \quad 2x=30$$

مثال ٤

عدد صحیحی بیابید که حاصل جمع آن با جذرش برابر ٦ باشد.

حل:

$$x+\sqrt{x}=6 \rightarrow \sqrt{x}=-x+6$$

$$x=x^2-12x+36 \rightarrow x^2-13x+36=0$$

$$(x-9)(x-4)=0$$

$x=9$ غ ق ق , $\qquad x=4$ ق ق

۳

تمرین ۱

معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{x(x-2)}=\frac{x-4}{x-2}$$

تمرین ۲

معادلات زیر را حل کنید.

$$2\sqrt{x}=\sqrt{3x+9}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x-2}}-\sqrt{2x-2}=0$$

تمرین ۳

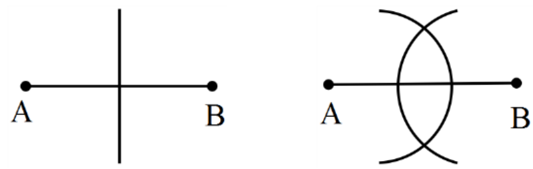
اگر دو ماشین کشت چمن مصنوعی که سرعت یکی از آنها سه برابر دیگری است ، بتوانند در ٦ ساعت چمن یک زمین فوتبال را بکارند، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟

٤

درس اول: ترسیم های هندسی

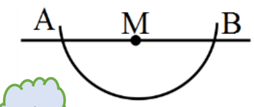
رسم عمود منصف پاره خط AB

دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و یک بار از نقطه A و بار دیگر از B کمان هایی می زنیم. با وصل کردن محل تلاقی کمان ها عمود منصف به دست خواهد آمد.



رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه روی آن

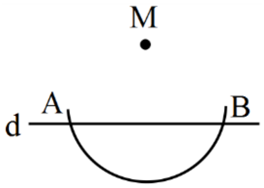
ابتدا به مرکز آن نقطه و به طول مشخص به کمک پرگار کمانی رسم می کنیم و محل تلاقی آن کمان با خط مفروض را نقاط A و B می نامیم . در پایان مانند بالا عمود منصف AB را رسم می کنیم.



۱

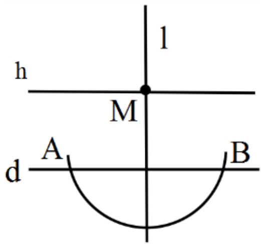
رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه خارج آن

دهانه پرگار را بیش از فاصله M از خط D باز کرده و به مرکز M کمانی می زنیم تا خط d را در نقاطAو B قطع کند. در این حالت عمودمنصف AB از M می گذرد.



رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه خارج آن

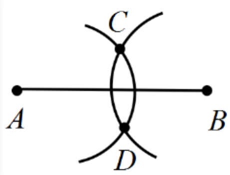
با استفاده از روش بالا ابتدا خط l را عمودبر d و گذرنده از M رسم می کنیم وبه طریق مشابه خط h را عمود بر lو گذرنده از M رسم می کنیم پس دو خط d و h موازی همند.



۲

مثال۱: پاره خط AB به طول ٤ سانتی متر را در نظر بگیرید.نقاطی را بیابید که فاصله آن ها از نقطه A برابر ۳ سانتی متر و از نقطه B برابر ۲ سانتی متر باشد.

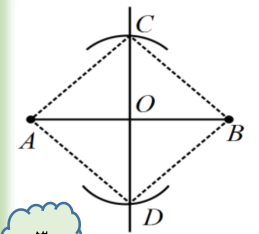
حل:به مرکزهای A و B کمان هایی به ترتیب با شعاع های ۳و ۲ رسم می کنیم تا همدیگر را در نقاط C و Dقطع کنند. فاصله نقاط C و D به ترتیب از A و B برابر ۳ و ۲ است.



مثال۲: مربعی به قطر ٦ سانتی متر رسم کنید.

حل: پاره خط $AB = ٦cm$ را رسم می کنیم. سپس عمودمنصف AB را رسم کرده محل تقاطع را O می نامیم. به مرکز O و به شعاع ۳، دو کمان می زنیم تا عمود منصف را در نقاط C و D قطع کند.

ABCD مربع است.



۳

تمرین ۱

خط d_1 را موازی خط d و به فاصله ٤ سانتی متر از آن رسم کنید.

تمرین ۲

مثلثی رسم کنید که طول سه ضلع آن ۳و٤و٥ سانتی متر باشد.

تمرین ۳

نیم ساز زاویه xoy را رسم کنید.(با توضیح جزئیات ترسیم)

تمرین ٤

مثلث دلخواه ABCرا رسم کنید. عمود منصف های اضلاع AB و ACرا رسم کنیدتا همدیگر را در نقطه O قطع کنند. به مرکز A و شعاع OA دایره ای رسم کنید.

الف) نشان دهید این دایره از نقاط B و C نیز می گذرد.

ب) نشان دهید عمود منصف BC نیز از نقطه C می گذرد.

٤

@madrese_riazi -سعید بیرامی-۰۹۳۶۴۶۴۵۹۵۰-میانه

درس دوم: استدلال و قضیه تالس

استدلال استقرایی: استدلالی که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه ای کلی از آن گرفته می شود، یعنی از جزء به کل می رسیم.

استدلال استنتاجی: استدلالی که بر اساس نتیجه گیری منطقی برپایه واقعیت هایی که درستی آن ها را پذیرفته ایم، بیان می شود.

عکس قضیه شرطی: اگر در یک قضیه شرطی جای فرض و حکم را عوض کنیم، به عکس قضیه شرطی می رسیم.

مثال: متوازی الاضلاعی که دو قطر برابر داشته باشد، یک مستطیل است.

عکس قضیه: اگر یک متوازی الاضلاع مستطیل باشد، آن گاه دو قطر آن با هم برابرند.

قضیه دو شرطی: اگر یک قضیه شرطی و عکس آن هر دو درست باشند، آن را قضیه دو شرطی گوییم.

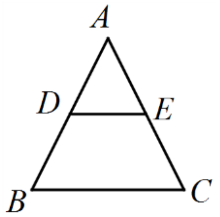
مثال: قضیه" در دو مثلث متشابه،اضلاع متناظر متناسب هستند" را به صورت دو شرطی بنویسید.

حل: دو مثلث متشابه اند اگر و فقط اگر اضلاعشان متناسب باشند .

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد نتیجه گیری کلی غلط است، مثال نقض گوییم.

مثال: برای حکم " اگر a عددی زوج باشد،آن گاه $a^{2}+1$ مضرب ۵ است" مثال نقض بیاورید. **حل:** اگر $a=4$ آن گاه $a^{2}+1$ برابر ۱۷ می شود که مضرب ۵ نیست.

قضیه تالس



$$DE\|BC \rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

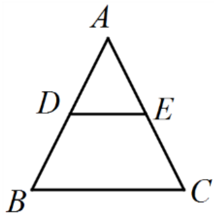
نتایج قضیه تالس

۱) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

۲) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$, $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$

۳) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

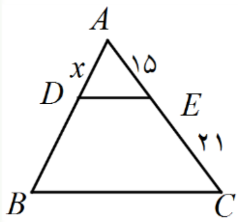
عکس قضیه تالس



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \rightarrow DE\|BC$$

مثال ۱

در شکل روبه رو $DE\|BC$ مقدار x را به دست آورید.($AB=24$)

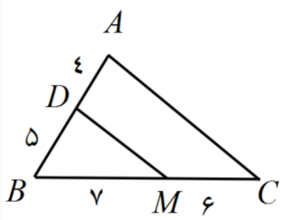


$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \rightarrow \frac{x}{24}=\frac{15}{36}$$

$$x=\frac{24\times 15}{36}=10$$

مثال ۲

آیا می توانیم مثلث ABC را به صورت رو به رو داشته باشیم، به طوری که در آن $DM\|AC$ باشد؟

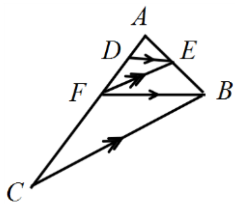


حل: باید از عکس قضیه تالس برقراری تناسب زیر را بررسی کنیم.

$\frac{BD}{DA}=\frac{BM}{MC} \rightarrow \frac{5}{4}\neq\frac{7}{6} \rightarrow DM$ موازی نیست AC

مثال۳

در مثلث ABC ثابت کنید $\frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$



$$\Delta ABF: DE\|FB \rightarrow \frac{AD}{DF}=\frac{AE}{BE}$$

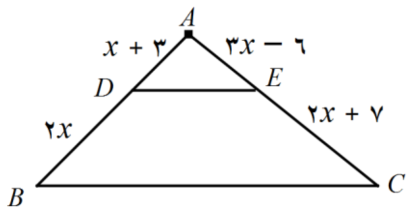
$$\Delta ABC: EF\|BC \rightarrow \frac{AF}{FC}=\frac{AE}{BE}$$

$$\rightarrow \frac{AD}{DF}=\frac{AF}{FC}$$

تمرین۱: عکس قضیه " اگر دو مثلث همنهشت باشند، آن گاه هم مساحتند." را بنویسید. سپس به کمک مثال نقض نشان دهیدعکس قضیه درست نیست.

تمرین ۲ : برهان خلف را تعریف کنید.

تمرین۳: در شکل زیر پاره خط DE موازی BC است.مقدار مجهول را بیابید.

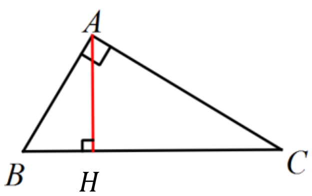


درس سوم: تشابه مثلث ها

حالت های تشابه دو مثلث

- هر گاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه اند.(زز)
- هر گاه اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آن ها برابر باشند، دو مثلث متشابه اند.(ض ز ض)
- هر گاه اندازه های سه ضلع از مثلثی با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه اند.(ض ض ض)

روابط طولی در مثلث قائم الزاویه



$۱) BC^۲ = AB^۲ + AC^۲$

$۲) AB \times AC = AH \times BC$

$۳) AH^۲ = BH \times HC$

$۴) AB^۲ = BH \times BC$

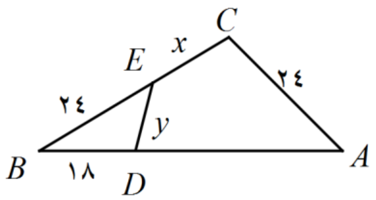
$۵) AC^۲ = CH \times BC$

رابطه بین نسبت ارتفاع های متناظر، مساحت و محیط دو مثلث متشابه با نسبت تشابه

فرض کنیم دو مثلث ABC و DEF متشابه و نسبت تشابه آن ها K باشد در این صورت:

۱) نسبت ارتفاع های متناظر برابر K است.
۲) نسبت مساحت های متناظر برابر $K^۲$ است.
۳) نسبت محیط های دو مثلث متناظر برابر K است.

مثال ۱ : در شکل مقابل $\hat{C} = \widehat{BDE}$ و $BA = ۴۸$ طول x و y را بیابید.



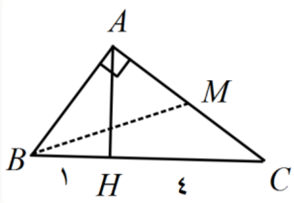
حل: دو مثلث ABC و BDE به نا به حالت (زز) متشابه اند، چون $\hat{B} = \hat{B}$ و $\hat{C} = \widehat{BDE}$ لذا داریم:

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD} \rightarrow \quad \frac{۲۴}{y} = \frac{۴۸}{۲۴} \rightarrow y = ۱۲$$

$$\frac{۴۸}{۲۴} = \frac{۲۴ + x}{۱۸} \rightarrow x = ۱۲$$

مثال۲

در مثلث قائم الزاویه ای، ارتفاع وارد بر وتر دو قطعه به طولهای ۱ و ۴ روی وتر ایجاد می کند. طول میانه متوسط این مثلث را بیابید.



$$AB^۲ = BH \times BC = ۱ \times ۵ \rightarrow AB = \sqrt{۵}$$

$$AC^۲ = CH \times BC = ۴ \times ۵ = ۲۰ \rightarrow AC = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$$AM = \frac{۱}{۲} AC = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۵} = \sqrt{۵}$$

$$BM^۲ = AB^۲ + AM^۲ = ۵ + ۵ = ۱۰ \rightarrow BM = \sqrt{۱۰}$$

مثال۳: اندازه محیط های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۵ و ۵ است. اگر مساحت مثلث بزرگ تر ۲۷ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچکتر را به دست آورید.

حل:

$$K = \frac{P_۲}{P_۱} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

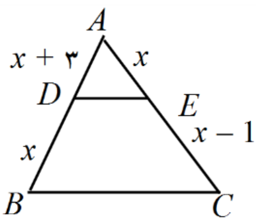
$$\frac{S_۲}{S_۱} = \left(\frac{P_۲}{P_۱}\right)^۲ \rightarrow \frac{S_۲}{S_۱} = ۹ \rightarrow S_۱ = \frac{S_۲}{۹} = \frac{۲۷}{۹} = ۳$$

تمرین ۱

ثابت کنید در دو مثلث متشابه نسبت نیم ساز های نظیر با نسبت تشابه دو مثلث برابر است.

تمرین ۳

در شکل زیر مساحت مثلث بزرگتر چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟($BC \| DE$)(راهنمایی: ابتدا با استفاده از قضیه تالس مقدار x را بیابید و سپس تشابه دو مثلث ADE و ABC را ثابت کنید و با توجه به اینکه نسبت مساحت های متناظر برابر $K^۲$ است جواب را بیابید)



فصل سوم — *تابع*

درس اول: آشنایی با برخی از انواع توابع

توابع گویا: هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا است، هر گاه $P(x)$ و Q(x) چند جمله ای باشند و Q(x) صفر نباشد.

دامنه توابع گویا

$R-\{\text{ریشه های مخرج}\}$

تذکر: در تعیین دامنه نباید توابع را ساده کنیم

تساوی دو تابع: دو تابع f و g مساویند هر گاه:

$D_f=D_g$ و $f(x)=g(x)$

دامنه توابع رادیکالی $\sqrt[n]{f(x)}$

۱. اگر n زوج باشد ، $f(x)\geq ۰$

۲. اگر n فرد باشد، کافی است دامنه $f(x)$ را حساب کنیم.

رسم تابع به کمک انتقال

برای رسم $y=f(x)+k$ نمودار تابع f(x) را kواحد در راستای محور y ها انتقال می دهیم.

برای رسم $y=f(x+k)$ نمودار تابع f(x) را رسم می کنیم ، اگر $k>۰$ باشد، k واحد به سمت چپ و اگر $k<۰$ باشد k واحد به سمت راست انتقال می دهیم.

تابع جزء صحیح

تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح خود عدد را نسبت می دهد و به هر عدد غیر صحیح، بزرگترین عدد صحیح کوچک تر از آن را نسبت می دهد.

$[۶]=۶\;,\;[۳/۷۵]=۳\;,\qquad[-۲/۲۵]=-۳$

رسم تابع شامل جزء صحیح

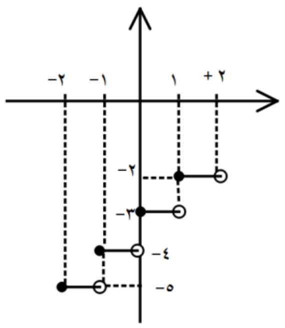
تابع $f(x)=[x]-۳$ را در بازه $[-۲,۲)$ رسم کنید.

$-۲\leq x<-۱\rightarrow[x]=-۲\rightarrow y=-۲-۳=-۵$

$-۱\leq x<۰\rightarrow[x]=-۱\rightarrow y=-۱-۳=-۴$

$۰\leq x<۱\rightarrow[x]=۰\rightarrow y=۰-۳=-۳$

$۱\leq x<۲\rightarrow[x]=۱\rightarrow y=۱-۳=-۲$



مثال ۱ آیا دو تابع داده شده زیر باهم مساویند؟

$f(x)=\sqrt{x^۲-x}\quad,\quad g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۱}$

$D_f: x^۲-x\geq ۰\rightarrow\; x(x-۱)\geq$

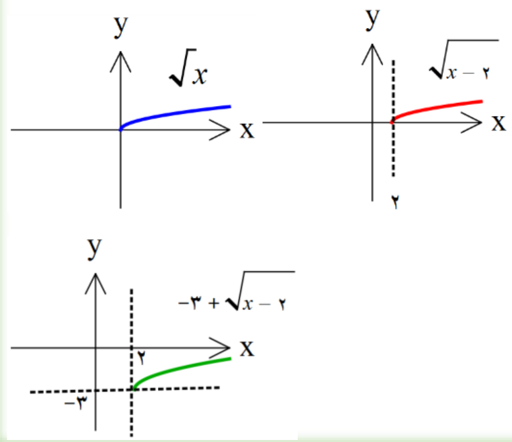
بعد از تعیین علامت داریم:

$D_f=(-\infty,۰]\cup[۱,+\infty)$

$D_g=\begin{cases}x\geq ۰\\ x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱\end{cases}\quad\overset{\cap}{\Rightarrow}\quad D_g=[۱,+\infty)$

چون دامنه دو تابع یکی نیست پس با هم برابر نیستند.

مثال ۲ نمودار تابع $y=-۳+\sqrt{x-۲}$ را رسم کنید.



تمرین

تمرین ۱

نمودار تابع $y=۲+\sqrt{x+۲}$ را رسم کنید.

تمرین ۲

دامنه توابع زیر را به دست آورید.

$\frac{x+۵}{x^۲-۴x+۴}$

$\sqrt{\frac{۲-x}{x+۳}}$

تمرین -۳

نمودار تابع $y=۳+[۲x]$ را دربازه $[-۲,۲)$ رسم کنید.

نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را دربازه $[-۴,۴)$ رسم کنید.

درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک به یک

تابع یک به یک

تابع f را یک یه یک گوییم هرگاه هیچ دو زوج مرتبی دارای مولفه های دوم برابر نباشند و در صورت مساوی بودن مولفه های دوم، مولفه های اول آن ها نیز برابر باشند.

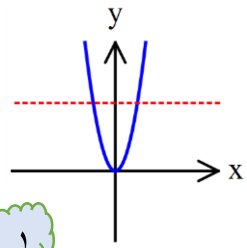
در نمودار ون تابع یک به یک، به هیچ عضوی از مجموعه دوم، دو پیکان وارد نمی شود..

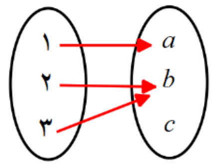
اگر خطی موازی محور x ها رسم کنیم باید تابع یک به یک را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال:

هیچ یک از توابع زیر یک به یک نیستند.

$\{(-۲,۳),(۲,۳),(۳,-۲)\}$





۱

تابع وارون

تابعی وارون پذیر است که یک به یک باشد. با تعویض جای تمام مولفه های اول و دوم وارون تابع به دست می آید.

نکته:

- اگر نقطه $A=(x,y)$ روی تابع f باشد، در این صورت $A'=(y,x)$ روی تابع $f^{-۱}$ است.
- نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ نسبت به نیم سازهای ناحیه اول و سوم قرینه یکدیگرند.

ضابطه تابع وارون

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معادله $y=f(x)$ x را بر حسب y به دست آورده و سپس با جابه جا کردن y و x، ضابطه تابع را به دست می آوریم.

مثال:

ضابطه وارون تابع $f(x)=۲x+۱$ را به دست آورید.

$$y=۲x+۱\rightarrow ۲x=y-۱\rightarrow x=\frac{y-۱}{۲}$$

$$f^{-۱}(y)=\frac{y-۱}{۲}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}$$

۲

مثال۱:

تحقیق کنید که آیا $f(x)=\frac{۲}{x}+۳$ و $g(x)=\frac{۲}{x-۳}$ وارون یکدیگرند یا خیر؟

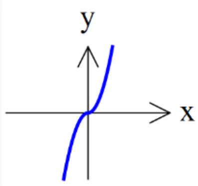
حل: بله چون:

$$g(x)=y=\frac{۲}{x-۳}\rightarrow yx-۳y=۲\rightarrow yx=۳y+۲$$

$$x=۳+\frac{۲}{y}\rightarrow g^{-۱}(x)=۳+\frac{۲}{x}=f(x)$$

مثال۲: یک به یک بودن تابع $f(x)=x|x|$ را از روی نمودار بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$$

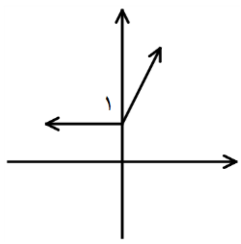


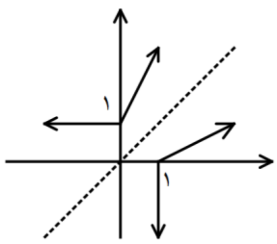
بله یک به یک است زیرا هر خطی موازی محور x ها رسم کنیم نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

۳

مثال۳

نمودار وارون تابع زیر را رسم کنید.





تمرین۱: مقدارهای a و b را طوری تعیین کنید که تابع داده شده یک به یک باشد.

$f=\{(۱,a-b),(۲,٤),(۳,۲a+b),(a-b,٤),(۳,۷)\}$

تمرین ۲: آیا تابع $f(x)=x^۲-۲x$ یک به یک است؟ چرا؟

تمرین ۲: ضابطه وارون تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۳}$ را به دست آورید.

تمرین ۳: نمودار دو تابع f و g را رسم کنید که دامنه هر دو برابر $[-۱,۳]$ و برد هر دو برابر $[-۱,۲]$ باشد و f یک به یک باشد ولی g یک به یک نباشد.

٤

درس سوم: اعمال جبری روی توابع

$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x) \quad , \quad D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$

$(f\,.\,g)(x)=f(x)\,.\,g(x) \quad , \quad D_{f\,.\,g}=D_f\cap D_g$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}$

مثال: دو تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ و $g(x)=\sqrt{x+۴}$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $(f+g)(۰)$ را به دست آورید.

ب) دامنه $\frac{f}{g}$ رتعیین کنید.

$(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=-\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۳}{۲}$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}$

$D_f=R-\{۲\}\ ,D_g=[-۴\,,+\infty)$

$D_f\cap D_g=[-۴\,,+\infty)-\{۲\}$

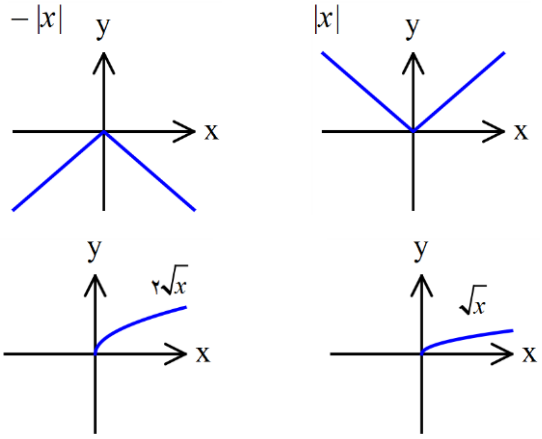
$g(x)=۰\rightarrow x+۴=۰\rightarrow x=-۴$

$D_{\frac{f}{g}}=[-۴\,,+\infty)-\{۲\}-\{-۴\}=(-۴\,,+\infty)$

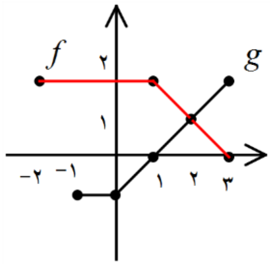
۱

رسم نمودار $y=kf(x)$

الف) اگر $k>۰$ ، کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ را k برابر کنیم. ب) اگر $k<۰$ ، کافی است نمودار $y=|k|f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



مثال: با توجه به نمودار مقابل نمودار هر یک از توابع $f+g$ و $g-f$ را رسم کنید.



۲

حل

$D_f=[-۲,۳]\ ,D_g=[-۱,۳]\rightarrow D_{f+g}=D_{g-f}=[-۱\ ,۳]$

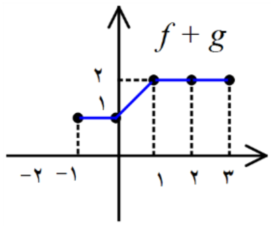
$(f+g)(-۱)=f(-۱)+g(-۱)=۲+(-۱)=۱$

$(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=۲+(-۱)=۱$

$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۲+(۰)=۲$

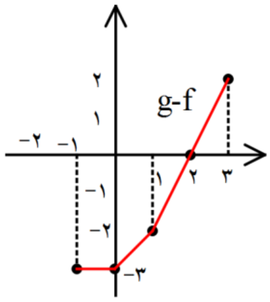
$(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۱+(۱)=۲$

$(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۰+(۲)=۲$



به طریق مشابه نمودار $g-f$ به صورت زیر خواهد بود.

۳



تمرین ۱:

اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x-۱}{x^۲}$ باشند، دامنه $\frac{f}{g}(x)$ را به دست آورید.

تمرین ۲: اگر $f(x)=۳-x^۲$ و $g(x)=-۲$ باشند:

الف) نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.

ب) مقدار $(f\,.\,g)(۰)$ را به دست آورید.

تمرین ۳: با توجه به نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

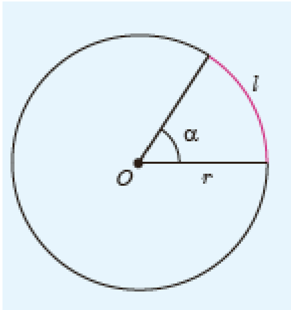
$g(x)=۱-۲\sqrt{x-۱}$

۴

درس اول: واحدهای اندازه گیری زاویه

رادیان

۱ رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان روبه روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.



اگر l طول کمان روبه روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازه زاویه بر حسب رادیان باشد، رابطه زیر برقرار است.

$$l = r\alpha$$

که l و r هم واحدند.

اگر D اندازه زاویه α برحسب درجه و R اندازه زاویه α برحسب رادیان باشد، آن گاه

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi\text{رادیان}}$$

۱

مثال ۱:

زاویه ۱۵۰° را برحسب رادیان و ۲ رادیان را برحسب درجه بنویسید.

حل:

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

$$D = ۱۵۰^\circ \rightarrow R = ۱۵۰^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} = \frac{۵\pi}{۶}\text{رادیان}$$

$$R = ۲\text{ رادیان} \rightarrow D = ۲ \times \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} = \frac{۳۶۰}{۳/۱۴} \cong ۱۱۴/۶۴^\circ$$

مثال ۲ :

در یک دایره به قطر ۲۰ سانتی متر، طول کمان متناظر با زاویه $\theta = ۴۱^\circ$ چه قدر است؟ $(\pi = ۳/۱۴)$

حل:

$$\theta = ۴۱^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ}$$

$$l = r\theta = ۱۰ \times ۴۱^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} \cong ۷/۱cm$$

۲

مثال ۳:

شعاع چرخ جلوی موتوری دو برابر شعاع چرخ عقب آن است. شعاع چرخ جلو ۲۵ سانتی متر است. اگر چرخ عقب ۱ متر روی زمین کشیده شود، چرخ جلو چند درجه می پیماید؟

$$\left(\text{چرخ عقب}\right) l = \left(\text{چرخ جلو}\right) l = ۱۰۰cm$$

$$\left(\text{چرخ جلو}\right) l = r\alpha \rightarrow ۱۰۰ = ۲۵\alpha \rightarrow \alpha = ۴\text{رادیان}$$

$$R = ۴\text{ رادیان}: D = ۴ \times \frac{۱۸۰}{\pi} \cong ۲۲۹/۲^\circ$$

مثال ۴: در دایره ای به مساحت ۳۱۴ سانتی متر مربع، طول کمان متناظر با زاویه $\frac{\pi}{۱۰}$ رادیان چه قدر است؟ $(\pi = ۳/۱۴)$

$$S = \pi r^۲ \rightarrow ۳۱۴ = \frac{۳}{۱۴} \times r^۲ \rightarrow r = \sqrt{\frac{۳۱۴}{۳/۱۴}} = ۱۰$$

$$l = r\alpha = ۱۰ \times \frac{\pi}{۱۰} = \pi$$

۳

تمرین ۱

طول کمان مقابل به زاویه ۵ رادیان در دایره ای به شعاع ۲/۵ سانتی متر، چند دسی متر است؟

تمرین ۲

تفاضل اندازه دو زاویه برحسب درجه ۳۰ و مجموع آن ها برحسب رادیان برابر $\frac{۴\pi}{۹}$ می باشد. اندازه دو زاویه را برحسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۳

ظرف چه مدت بر حسب دقیقه، عقربه دقیقه شمار $\frac{۱۱\pi}{۶}$ رادیان طی می کند؟

۴

درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	ت ن	۰	ت ن	۰
$\cot\theta$	ت ن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	ت ن	۰	ت ن

	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

۱

مثال ۱: اگر $\cos\alpha = \frac{-۳}{۵}$ سایر نسبت های مثلثاتی را به دست آورید.

$$\sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha \to \sin^۲\alpha = ۱ - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۶}{۲۵}$$

$$\sin\alpha = \frac{۴}{۵} \xRightarrow{\cos\alpha<۰} \text{ناحیه دو}$$

$$\to \tan\alpha = -\frac{۴}{۳} \text{ و } \cot\alpha = -\frac{۳}{۴}$$

$$\sin\alpha = -\frac{۴}{۵} \xRightarrow{\cos\alpha<۰} \text{ناحیه سوم} \to \tan\alpha = \frac{۴}{۳} \text{ و } \cot\alpha = \frac{۳}{۴}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

مثال: حاصل $A = \cot\left(-\frac{\pi}{۶}\right) + \sin(-\frac{\pi}{۳})$ را بیابید.

$$\cot\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = -\cot\frac{\pi}{۶} = -\sqrt{۳}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \to A = -\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۲

نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$$

مثال: حاصل مقادیر زیر را به دست آورید.

$$\sin\frac{۵\pi}{۶} = \sin\left(\frac{۶\pi - \pi}{۶}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{۶}\right) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۴} = \cos(\frac{۴\pi + \pi}{۴}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم

$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \tan\alpha$$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

۳

$$\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -\cot\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cot(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\tan\alpha$$

مثال: حاصل مقادیر زیر را به دست آورید.

$$\sin ۱۲۰^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}\right) = \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

نسبت های مثلثاتی با مجموع یا تفاضل مضارب زوجπ رادیان

هر وقت مضرب زوج π دیدیم روی آن خط کشیده و صفر در نظر می گیریم.

$$\sin(۲k\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

مثال: حاصل مقدیر زیر را به دست آورید.

$$\tan(-۶۰۰^\circ) = -\tan ۶۰۰^\circ = -\tan(۴\pi - ۱۲۰^\circ)$$

$$= \tan(۱۲۰^\circ) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

$$\cos ۴۰۵^\circ = \cos(۳۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرین : حاصل عبارت زیر را بیابید.

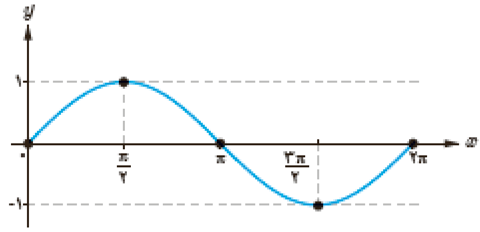
$$\sin ۱۳۵^\circ + \cos ۴۵^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ) + \cot ۳۱۵^\circ$$

۴

درس سوم: توابع مثلثاتی

رسم تابع $y = \sin x$

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\sin x$	۰	۱	۰	-۱	۰



-دامنه تابع $y = \sin x$ برابر R و برد آن $[-۱,۱]$ می باشد.

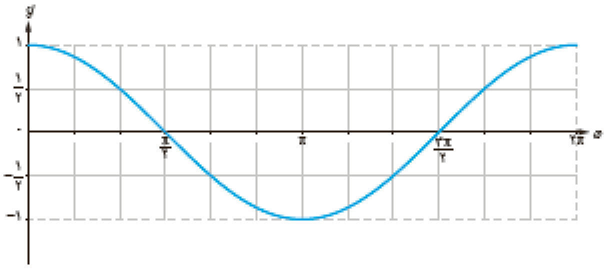
-این تابع محور x ها را در نقاط به طول $x = k\pi$ قطع می کند. $k \in Z$

- ماکزیمم این تابع برابر ۱ و در نقاطی به طول $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ و مینیمم آن برابر -۱ و در نقاطی به طول $x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ یا $x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$ می باشد. $(k \in Z)$

۱

رسم تابع $y = \cos x$

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\cos x$	۱	۰	-۱	۰	۱



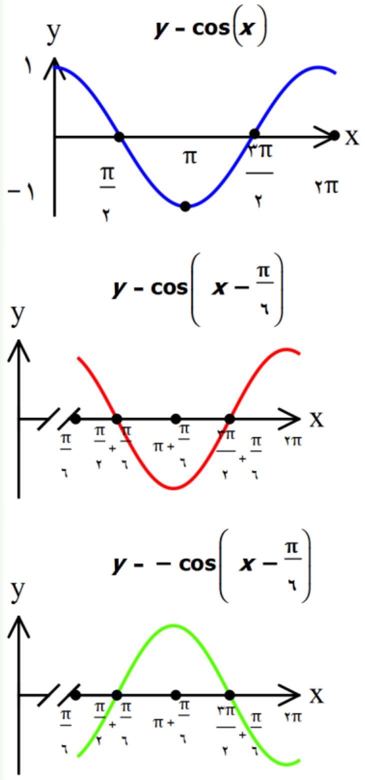
-دامنه تابع $y = \cos x$ برابر R و برد آن $[-۱,۱]$ می باشد.

-این تابع محور x ها را در نقاطی به طول $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ قطع می کند. $k \in Z$

- ماکزیمم این تابع برابر ۱ و در نقاطی به طول $x = ۲k\pi$ و مینیمم آن برابر -۱ و در نقاطی به طول $x = (۲k + ۱)\pi$ می باشد. $(k \in Z)$

۲

مثال ۱: نمودار تابع $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{۶}\right)$ را در بازه $[۰ , ۲\pi]$ رسم کنید.



۳

مثال ۲:

کمترین و بیشترین مقدار تابع زیر را به دست آورید.

$$y = -\frac{۱}{۲}\cos\left(۳x - \frac{\pi}{۶}\right) - \frac{۳}{۲}$$

$$-۱ \le \cos\left(۳x - \frac{\pi}{۶}\right) \le ۱ \qquad \to \times -\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲} \ge -\frac{۱}{۲}\cos\left(۳x - \frac{\pi}{۶}\right) \ge -\frac{۱}{۲} \to \quad -\frac{۳}{۲}$$

$$-۱ \ge -\frac{۱}{۲}\cos\left(۳x - \frac{\pi}{۶}\right) - \frac{۳}{۲} \ge -۲ \to -۲ \le y \le -۱$$

تمرین

نمودار توابع زیر را در بازه $[۰ , ۲\pi]$ رسم کنید.

$$y = ۱ + \sin(x + \frac{\pi}{۴})$$

$$y = ۲\cos(x - \frac{\pi}{۳}) - ۱$$

۴

درس اول: تابع نمایی و ویژگی های آن

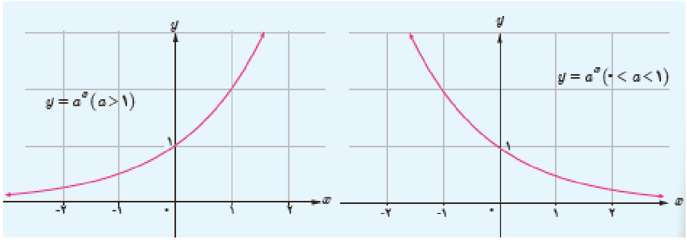
تابع نمایی:

تابع $y = a^{x}$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x یک متغیر باشد، یک تابع نمایی است.

مانند:

$$f(x) = ۳^{x}\ ,\qquad g(x) = ۶^{-x} = (\frac{۱}{۶})^{x}\ ,\quad h(x) = ۳^{x+۲} - ۴$$

نمودار تابع نمایی



ویژگی های تابع نمایی:

۱- دامنه آن ها R و برد آن ها $(۰\ ,+\infty)$ است.

۲- یک به یک هستند.

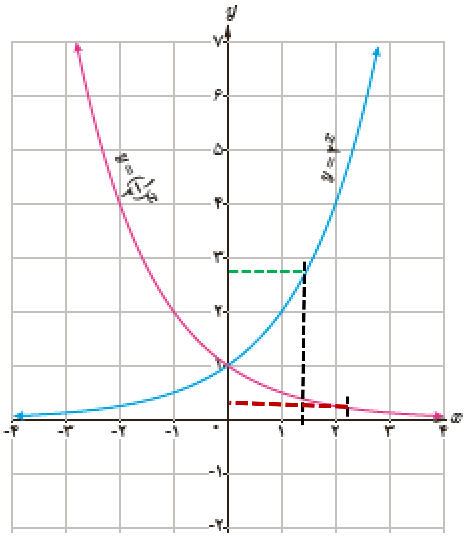
۳- همواره از نقطه $(۰\ ,۱)$ می گذرند.

۱

مثال: الف) نمودار توابع با ضابطه های $y = ۲^{x}$ و $y = (\frac{۱}{۲})^{x}$ را رسم کنید.

x	y
-4	0.0625
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8

$y = ۲^{x}$



ب) مقدار تقریبی عددهای $(\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۵}}$ و $۲^{\sqrt{۲}}$ را از روی نمودار به دست آورید. **حل**

$$۲^{\sqrt{۲}} \cong ۲/۶\ ,\ (\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۵}} \cong ۰/۲$$

ج) نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه اند؟

حل نسبت به محور y ها

۲

معادله نمایی: برای حل معادله نمایی کافی است در دو طرف تساوی، دو عبارت نمایی هم پایه ایجاد کنیم و سپس توان هایی را که در آن ها مجهول وجود دارد، برابرقراردهیم.

مثال۱: معادله $۹^{x} = ۳^{x^{۲}-۴x}$ را حل کنید.

$$۳^{۲x} = ۳^{x^{۲}-۴x} \to x^{۲} - ۴x - ۲x = ۰ \to x^{۲} - ۶x = ۰$$

$$x(x-۶) = ۰ \to x = ۰\ ,\qquad x = ۶$$

مثال۲: معادله زیر را حل کنید.

$$(۰/۲)^{x-۱} \times ۲۵^{۳x} = \sqrt{۵} \times \left(\frac{۱}{۱۲۵}\right)^{۲-x}$$

$$\left(\frac{۱}{۵}\right)^{x-۱} \times ۵^{۶x} = ۵^{\frac{۱}{۲}} \times (۵^{-۳})^{۲-x}$$

$$۵^{۱-x} \times ۵^{۶x} = ۵^{\frac{۱}{۲}} \times ۵^{-۶+۳x} \to ۵^{۱+۵x} = ۵^{۳x-\frac{۱۱}{۲}}$$

$$۱ + ۵x = ۳x - \frac{۱۱}{۲} \to ۲x = \frac{-۱۳}{۲} \to x = \frac{-۱۳}{۴}$$

نکته: اگر پایه عددی بزرگ تر از ۱ باشد، آن گاه هر چه توان بیشتر باشد، عدد بزرگ تر می باشد و اگر پایه، عددی بین صفر و یک باشد، آن گاه هرچه توان بزرگ تر باشد، عدد کوچک تر است.

۳

مثال۳: اگر $۱/۱^{x} < ۱/۱^{y}$ باشد، آن گاه چه رابطه ای بین $\left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^{x}$ و $\left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^{y}$ برقرار است؟

$$\frac{۱^{x}}{۱} < \frac{۱^{y}}{۱} \to x < y$$

$$\frac{\sqrt{۵}}{۳} < ۱ \to \left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^{x} > \left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^{y}$$

نکته: در برخی معادلات نمایی تغییر متغیر می تواند مفید باشد.

مثال: معادله $۳^{۲x} - ۵ \times ۳^{x} = ۳۶$ را حل کنید.

$$۳^{x} = t \to t^{۲} - ۵t - ۳۶ = ۰ \to \cdots$$

تمرین۱: نمودار تابع $y = ۳^{x}$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $۳^{\sqrt{۲}}$ را باتوجه به نمودار به دست آورید.

تمرین ۲: معادلات نمایی زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{۱}{۹}\right)^{x+۲} = ۳^{x-۱} \qquad\qquad ۲^{x^{۲}} = \frac{۱}{۲^{x}}$$

$$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲x-۱} \times ۶۴^{x+۵} = (\sqrt[۳]{۴})^{x}$$

۴

درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

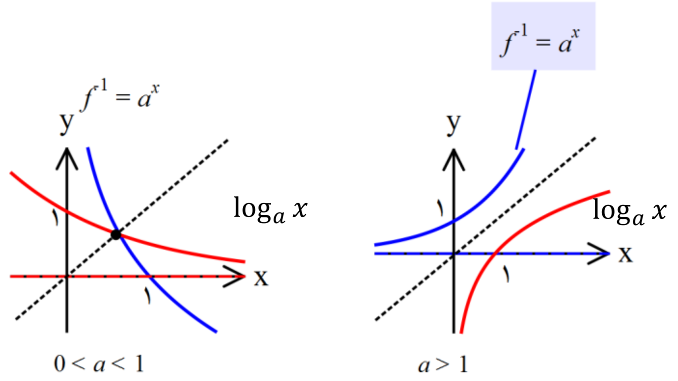
لگاریتم

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b \quad (a > ۰ \,, a \neq ۱ \,, c > ۰)$$

مثال:

$$۴^۳ = ۶۴ \to \log_۴ ۶۴ = ۳$$

تابع نمایی و لگاریتمی معکوس یکدیگرند ونسبت به خط $y = x$ قرینه یکدیگرند.



ویژگی های توابع لگاریتمی

۱- دامنه آن ها $(۰ \,, +\infty)$ و برد آن ها Rاست.

۲- یک به یک هستند.

۳- همواره از نقطه $(۱ \,, ۰)$ می گذرند.

۱

نکته: اگر $a > ۱$ لگاریتم و معکوس آن یکدیگر را قطع نمی کنند و اگر $۰ < a < ۱$ یکدیگر را روی خط $y = x$ قطع می کنند.

ویژگی های لگاریتم

$$۱)\ \log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

$$۲)\ \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$۳)\ \log_c a^n = n \log_c a \qquad ۴)\ \log_{c^m} a^n = \frac{n}{m} \log_c a$$

$$۵)\ \log_b a = \frac{۱}{\log_a b} \qquad ۶)\ \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$۷)\ a^{\log_a b} = b$$

مثال: اگر $\log_b a = \frac{۳}{۲}$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{b}} ab^۲$ را به دست آورید.

$$\log_{\sqrt{b}} ab^۲ = \log_{\sqrt{b}} a + \log_{\sqrt{b}} b^۲$$

$$= \log_{b^{\frac{۱}{۲}}} a + \log_{b^{\frac{۱}{۲}}} b^۲ = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}} \log_b a + \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} \log_b b$$

$$= ۲ \log_b a + ۴ = ۲\left(\frac{۳}{۲}\right) + ۴ = ۷$$

۲

معادلات لگاریتمی

اگر معادله به صورت $\log_a x = b$ باشد، در این صورت داریم:$x = b^a$ ولی اگر معادله به فرم $\log_a x = \log_a b$ باشد داریم:x = b

توجه: بعد از پیدا کردن ریشه ها باید آن ها را در معادله چک کنیم تا در دامنه حضور داشته باشند.

مثال۱: معادله زیر را حل کنید.

$$\log_۳(x + ۱) + \log_۳(x^۲ - x + ۱) = ۲$$

$$\log_۳(x + ۱)(x^۲ - x + ۱) = ۲ \to \log_۳(x^۳ + ۱) = ۲$$

$$(x^۳ + ۱) = ۳^۲ = ۸ \to x^۳ = ۸ \to x = ۲ \text{ ق ق}$$

مثال۲: اگر $\log ۲ = k$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱ + \sqrt{۵}) = ?$$

$$= \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۱ + \sqrt{۵})^۲$$

$$= \log(۶ - ۲\sqrt{۵}) + \log(۶ + ۲\sqrt{۵})$$

$$= \log(۶ - ۲\sqrt{۵})(۶ + ۲\sqrt{۵}) = \log(۳۶ - ۲۰) = \log ۱۶$$

$$= \log ۲^۴ = ۴ \log ۲ = ۴k$$

۳

مثال ۳: اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(\frac{۱}{۲} \,, -۴)$ بگذرد، مقدار a چند است؟

$$-۴ = \log_a \frac{۱}{۲} \to a^{-۴} = \frac{۱}{۲} \to \frac{۱}{a^۴} = \frac{۱}{۲} \to a^۴ = ۲$$

$$a = \pm\sqrt[۴]{۲} \to a = \sqrt[۴]{۲}$$

نکته: اگر $(a \,, b) \in f$ آن گاه $(b \,, a) \in f^{-۱}$ و برعکس.

مثال ٤: اگر نمودار تابع معکوس $f(x) = \log_a(x + ۱)$ از نقطه $(۲ \,, ۴)$ عبور کند، مقدار a را بیابید.

$$(۲ \,, ۴) \in f^{-۱} \to (۴ \,, ۲) \in f$$

$$۲ = \log_a ۵ \to a^۲ = ۵ \to a = \sqrt{۵}$$

تمرین ۱: اگر $\log ۳ = ۰/۴$ و $\log ۷ = ۰/۸$ باشند، حاصل $\log \frac{۸۱۰۰}{\sqrt[۳]{۴۹}}$ را به دست آورید.

تمرین ۲: معادلات زیر را حل کنید.

$$\log_۲(p^۲ - p) = \log_۲ p$$

$$\log(x + ۲) = \log ۸ - \log(x - ۵)$$

$$\log_{x-۱}(x^۲ - ۵x + ۱۰) = ۲$$

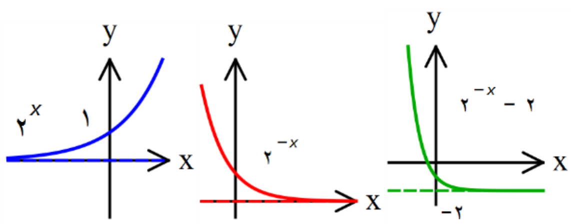
۴

درس سوم: نمودارها و کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

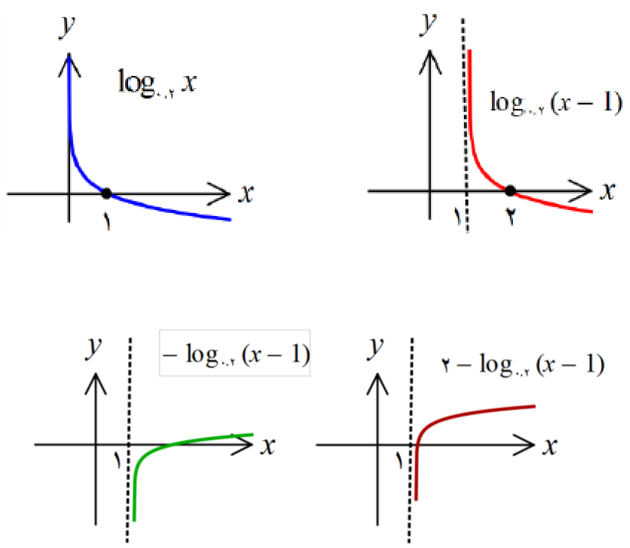
رسم تابع به کمک انتقال

- ✓ برای رسم $y = f(x) + k$ نمودار تابع f(x) را kواحد در راستای محور y ها انتقال می دهیم.
- ✓ برای رسم $y = f(x + k)$ نمودار تابع f(x) را رسم می کنیم ، اگر $k > ۰$ باشد، k واحد به سمت چپ و اگر $k < ۰$ باشد k واحد به سمت راست انتقال می دهیم.
- ✓ برای رسم $y = -f(x)$ نمودار تابع f(x) را نسبت به محور x قرینه می کنیم.
- ✓ برای رسم $y = f(-x)$ نمودار تابع f(x) رانسبت به محور y قرینه می کنیم.

مثال۱: نمودار تابع $f(x) = ۲^{-x} - ۲$ را رسم کنید.



مثال ۲: نمودار تابع $f(x) = ۲ - \log_{۰/۲}(x - ۱)$ را رسم کنید.



کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

اگر بزرگی زلزله ای در مقیاس ریشتر برابر M باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد ارگ است که از رابطه زیر به دست می آید.

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

مثال ۳:

اگر انرژی آزاد شده یک زلزله برابر ٤/۸ ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر است؟

$$M = ۴/۸ \rightarrow \log E = ۱۱/۸ + ۱/۵ \times ۴/۸ = ۱۹$$

$$\rightarrow \log E = ۱۹ \rightarrow E = ۱۰^{۱۹} Erg$$

مثال ٤:

نمودار تابع $f(x) = a + \log_{۴}(x + b)$، محور y ها را در نقطه ای به عرض $-\frac{۵}{۲}$ قطع می کند.اگر نمودار f از نقطه $(۲ , -۲)$ بگذرد، مقادیر b را به دست آورید.

$$f(۰) = a + \log_{۴} b = \frac{-۵}{۲} \qquad (۱)$$

$$f(۲) = a + \log_{۴}(۲ + b) = -۲ \qquad (۲)$$

با کم کردن رابطه(۱) از (۲) خواهیم داشت

$$\log_{۴}(b + ۲) - \log_{۴} b = \frac{۱}{۲} \rightarrow \quad \log_{۴}\frac{b + ۲}{b} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{b + ۲}{b} = ۴^{\frac{۱}{۲}} = ۲ \rightarrow b + ۲ = ۴ \rightarrow b = ۲$$

تمرین ۱

نمودار توابع را رسم کنید.

$$y = ۲ - ۳^{x+۱}$$

$$y = ۳ - \log_{۳}(-x)$$

تمرین۲: در تابع با ضابطه زیر

$$f(x) = -۵ - \log_{۳}(۴x + ۱)$$

الف) مقدار $f(۲)$ را به دست آورید.

ب) اگر $f(x) = -۳$، مقدار x را به دست آورید.

تمرین ۳

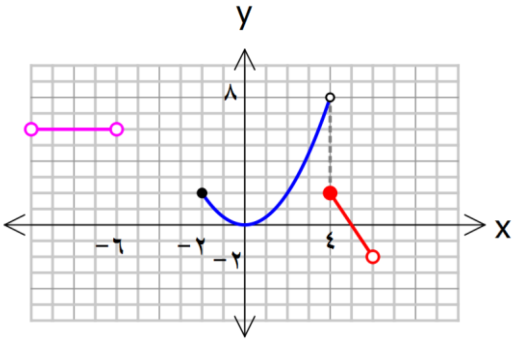
نمودار تابع $f(x) = \log_{۲} x$ را ابتدا یک واحد به سمت چپ و سپس ۲ واحد به سمت پایین انتقال می دهیم تا نمودار تابع g به دست آید.نمودار تابع gمحور x ها را با چه طولی قطع می کند؟

تمرین ۳

مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله برابر $۱۰^{۲۱/۷}$ ارگ است.بزرگی این زلزله چند ریشتر است؟

درس اول: فرایندهای حدی

با توجه به شکل زیر داریم:



$\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x) = ۲$ $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x) = ۸$ $\lim\limits_{x\to ۴} f(x) =$ موجود نیست

$\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x) = ۲$ $\lim\limits_{x\to -۲^-} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to -۲} f(x) =$ وجود ندارد $f(-۲) = ۲$

$f(-۶)$, $\lim\limits_{x\to -۶} f(x) =$ وجود ندارد

۱

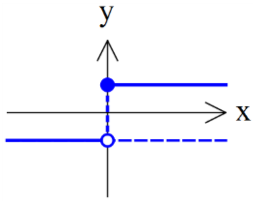
مثال۱: حد تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ را در $x = ۰$ بررسی کنید.

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \begin{cases} \frac{x}{x} = ۱ & x > ۰ \\ \frac{x}{-x} = -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

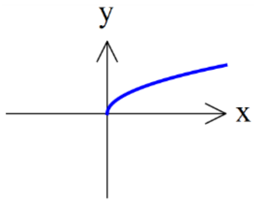
$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (-۱) = -۱$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} ۱ = ۱$$

چون حد چپ و راست برابر نیستند پس در $x = ۰$ حد وجود ندارد.



مثال۲: آیا $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = ۰$ حد دارد؟

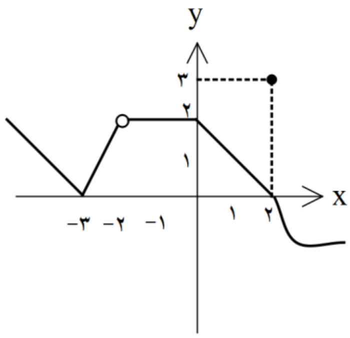


۲

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = ۰$ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) =$ وجود ندارد

چون حد چپ و راست برابر نیستند پس در $x = ۰$ حد وجود ندارد.

مثال۳: نمودار تابع f داده شده است. حاصل هر یک از حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ د) $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$

حل:

الف)۲ ب)۰ ج)۲ د)۲

۳

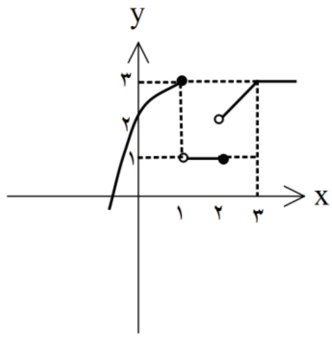
تمرین۱: نمودار توابع زیر را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع در $x = ۱$ را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{۲}x & x \geq ۱ \\ ۴ - x^۲ & x < ۱ \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x \geq ۱ \\ x^۲ + ۲ & x < ۱ \end{cases}$$

تمرین ۲: با توجه به نمودار تابع f حاصل عبارت روبه رو را به دست آورید.

$$۳\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۱^-} f(x) + ۲f(۳)$$



۴

درس دوم: محاسبه حد توابع

۱) حد تابع ثابت $f(x)=k$ در هر نقطه دلخواه $x_\circ$ برابر همان مقدار ثابت k است.

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)=\lim_{x\to x_\circ} k=k$$

۲) حد تابع همانی $f(x)=x$ در هر نقطه دلخواه $x_\circ$ برابر با $x_\circ$ است

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)=\lim_{x\to x_\circ} x=x_\circ$$

۳)

$$\lim_{x\to k}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to k} f(x)\pm\lim_{x\to k} g(x)$$

$$\lim_{x\to k}\left(f(x)\times g(x)\right)=\lim_{x\to k} f(x)\times\lim_{x\to k} g(x)$$

$$\lim_{x\to k}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to k} f(x)}{\lim\limits_{x\to k} f(x)}$$

$$\lim_{x\to k} c\,f(x)=c\lim_{x\to k} f(x)$$

$$\lim_{x\to k}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to k} f(x)\right)^n$$

مثال۱: آیا تابع $f(x)=x-[x]$ در $x=۱$ حد دارد؟ چرا؟

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} x-[۱^+]=۱-۱=۰$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} x-[۱^-]=۱-۰=۱$$

چون حد چپ و راست برابر نیستند پس در $x=۱$ حد وجود ندارد.

مثال۲: اگر $\lim_{x\to ۳} f(x)=-۱$ و $\lim_{x\to ۳} g(x)=۲$ و $\lim_{x\to ۳} h(x)=۳$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲f(x)}{g(x)-۳h(x)}=?$$

$$=\frac{۲\lim\limits_{x\to ۳} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۳} g(x)-۳\lim\limits_{x\to ۳} h(x)}=\frac{۲\times(-۱)}{۲-۳\times(۳)}=\frac{۲}{۷}$$

مثال: اگر دو تابع $f+g$ و $f-g$ در $x=a$ حد داشته باشند، در مورد حد توابع f و g چه می توان گفت؟

چون دو تابع فوق در $x=a$ دارای حد هستند پس مجموع آن ها که می شود $۲f$ نیز در $x=a$ دارای حد است. و از آن نتیجه می گیریم که f نیز در $x=a$ دارای حد است. پس تابع

$$(f+g)-f=g$$

نیز در $x=a$ دارای حد است.

مثال۴: حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x^۲+۴x}{x+۵}$

۲) $\lim\limits_{x\to -۱}\sqrt{۵+۶x}$

۳) $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x^۳+۸}{x^۲-۴}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۵x+۴}{x^۲-x}$

۵) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{[x]+۱}{x^۲-x}$

۶) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x^۲-۱}$

۷) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^۲ x}{۱-\sin x}$

۸) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{۱-\cos x}$

حل:

۱) $\lim\limits_{x\to -۲}\frac{x^۲+۴x}{x+۵}=\frac{(-۲)^۲+۴(-۲)}{-۲+۵}=-\frac{۴}{۳}$

۲) $\lim\limits_{x\to -۱} ۵+۶x=۵-۶=-۱<۰$ حد ندارد

قسمت ۳ حالت $\frac{۰}{۰}$ رخ می دهد پس تجزیه می کنیم.

$$x^۳+۸=x^۳+۲^۳=(x+۲)(x^۲-۲x+۴)$$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{۱۲}{-۴}=-۳$$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۴)(x-۱)}{x(x-۱)}=\frac{۱-۴}{۱}=-۳$

۵) $[۲^-]=۱\to\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{[x]+۱}{x^۲-x}=\frac{۱+۱}{۲^۲-۲}=\frac{۲}{۲}=۱$

۶) $x\to ۱^-\to x<۱\to x-۱<۰$

$\to |x-۱|=-(x-۱)$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)}=\frac{-۱}{۱}=-۱$$

۷) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^۲ x}{۱-\sin x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x}=$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}(۱+\sin x)=۲$$

۸) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{۱-\cos x}=\lim\limits_{x\to ۰}(۱+\cos x)=۲$

درس سوم: پیوستگی

تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است،هرگاه

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L\,,\ \lim_{x\to a^-} f(x)=L\ \ ,f(a)=L$$

پیوستگی چپ

تابع f در نقطه $x=a$ دارای پیوستگی چپ است،هرگاه:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L_1\ \ ,f(a)=L_1$$

پیوستگی راست

تابع f در نقطه $x=a$ دارای پیوستگی راست است،هرگاه:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_2\ \ ,f(a)=L_2$$

پیوستگی روی بازه

تابع f روی بازه $(a\,,b)$پیوسته است،هرگاه، در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

تابع f روی بازه $[a\,,b]$پیوسته است،هرگاه، f در بازه $(a\,,b)$پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

نکته

اگر $D_f=R$ و f در هر نقطه از دامنه اش پیوسته باشد، می گوییم f روی بازه $(-\infty\,,+\infty)$ پیوسته است.

۱

مثال۱: پیوستگی $f(x)=\begin{cases}2x & x<0\\ x^2+1 & x\geq 0\end{cases}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x)=0\qquad f(0)=1$$

تابع در $x=0$ ناپیوسته است ولی پیوستگی راست دارد.

مثال۲: a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{|x-1|} & 0\leq x<1\\ [x]+a & x\geq 0\end{cases}$$

$$x\to 1^-\Rightarrow x<1\Rightarrow |x-1|=-(x-1)$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\big(-(x+1)\big)=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+}([x]+a)=1+a$$

برای پیوسته بودن باید حد چپ و راست برابر باشند:

$$-2=1+a\Rightarrow a=-3$$

۲

مثال۳:

a را طوری بیابید که تابع زیر دربازه $[0\,,3]$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)|x| & x<2\\ a+2\sin\dfrac{\pi}{x} & x\geq 0\end{cases}$$

تابع باید در هر نقطه از بازه $[0\,,3]$ مانند ۲ نیز پیوسته باشد لذا داریم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x-1)|x|=(2-1)\times 2=2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(a+2\sin\frac{\pi}{x}\right)=a+2\sin\frac{\pi}{2}=a+2$$

$$2=a+2\Rightarrow a=0$$

نکته:

تابع $f(x)=[x]$در نقاط به طول صحیح، ناپیوسته و در نقاط غیر صحیح پیوسته است.

مثال۴: تابع $y=[x]$ در بازه$(2,k]$ پیوسته است. حداکثر مقدار k را تعیین کنید.

حل: تابع$y=[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، پس k حداکثر ۳ میتواند انتخاب شود.(چون بازه است، پیوستگی راست ۲ کافی است).

۳

تمرین۱: حدود a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=2$ پیوسته نباشد.

$$f(x)=\begin{cases}ax+4 & x\geq 2\\ x^3-x & x<2\end{cases}$$

تمرین۲: مقدار a و bرا طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=2$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2b}{x^2-2} & x>2\\ 2a+x+1 & x=2\\ 2b+5 & x<2\end{cases}$$

تمرین۳: مقدار a و bرا طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\sin x+a & x>0\\ -4 & x=0\\ 3x+2b & x<0\end{cases}$$

تمرین۴: تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه $x=0$ برابر ۲ باشد ولی تابع در x = ۰ پیوسته نباشد.نمودار این تابع را رسم کنید.

۴

درس اول: *احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل*

اعمال روی پیشامدها

اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند.

اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهند.

متمم یک پیشامد: متمم A را با $A^{\prime}$ نمایش می دهیم و زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد.

پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B ناسازگارند هر گاه هم زمان رخ ندهند یعنی $A \cap B = \emptyset$

قانون جمع احتمالات: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال پیشامد متمم

$$P(A^{\prime}) = ۱ - P(A) \quad , P(A) = ۱ - P(A^{\prime})$$

احتمال شرطی: احتمال شرطی A به شرط وقوع B

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \qquad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

۱

قانون ضرب احتمالات

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

پیشامد های مستقل: پیشامد A از پیشامد B مستقل است هر گاه وقوع پیشامد B بر احتمال وقوع پیشامد A تاثیر نداشته باشد یعنی:

$$P(A|B) = P(A)$$

نکته: پیشامد A از پیشامد B مستقل است هر گاه:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

مثال ۱: اگر $P(A) = ۰/۵$ و $P(B) = ۰/٤$ و $P(A \cap B) = ۰/۳$ مطلوبست محاسبه :

$$۱)P(A \cup B) \qquad ۲)P(A - B) \qquad ۳)\ P(A^{\prime})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۵ + ۰/۴ - ۰/۳ = ۰/۶$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = ۰/۵ - ۰/۳ = ۰/۲$$

$$P(A^{\prime}) = ۱ - P(A) = ۱ - ۰/۵ = ۰/۵$$

مثال ۲: اعداد ۱ تا ۹ را روی ۹ کارت نوشته و سه کارت به تصادف انتخاب می کنیم. اگر مجموع اعداد روی کارت های انتخاب شده زوج باشد، احتمال آنکه هر سه زوج باشند چه قدر است؟

حل: برای اینکه مجموع زوج باشد باید هر سه زوج یا دوتا فرد و یکی زوج باشد.

۲

اعداد زوج: ۸ ، ٦ ، ٤ و ۲ اعداد فرد: ۳،۵،۷،۹و ۱

$$n(s) = \binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱} = ۴ + ۴۰ = ۴۴$$

$$n(A) = \binom{٤}{۳} = ٤ \qquad \Longrightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{٤}{٤٤} = \frac{۱}{۱۱}$$

مثال ۳: درون جعبه ای ٤ لامپ سالم و ۱ لامپ معیوب وجود دارد. ۲ لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می کنیم. احتمال آنکه لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد را بیابید.

حل: فرض کنیم A پیشامد سالم بودن لامپ اول و B پیشامد معیوب بودن لامپ دوم باشد باید $P(A \cap B)$ را حساب کنیم.

$$P(A \cap B) = p(A)P((B|A)$$

$$P(B|A) = P(\text{لامپ دوم معیوب}|\text{لامپ اول سالم بوده}) = \frac{۱}{٤}$$

$$P(A \cap B) = p(A)P((B|A) = \frac{۴}{۵} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۵}$$

مثال ٤: ۵۵ درصد جمعیت جامعه ای که ٦۰ درصد این جامعه با سواد هستند را زنان تشکیل می دهند. اگر نیمی از زنان این جامعه با سواد باشند و یک نفر را به تصادف انتخاب کنیم، با چه احتمالی این شخص زن یا با سواد می باشد؟

حل: فرض کنیم A پیشامد زن بودن و B پیشامد با سواد بودن شخص انتخاب شده باشد، باید $P(A \cup B)$ را به دست آوریم.

۳

$$P(A) = ۰/۵۵ \quad , P(B) = ۰/۶ \quad P((B|A) = ۰/۵$$

$$P((B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow ۰/۵ = \frac{P(A \cap B)}{۰/۵۵}$$

$$P(A \cap B) = ۰/۵ \times ۰/۵۵ = ۰/۲۷۵$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= ۰/۵۵ + ۰/۶ - ۰/۲۷۵ = ۰/۸۷۵$$

مثال ۵: در بین خانواده های سه فرزندی، اگر A پیشامد حداکثر وجود یک پسر و B پیشامد وجود دو جنس دختر و پسرباشد، بررسی کنید که آیا A و B مستقل اند یا خیر؟ مستقلند چون:

$$A = \{(g,g,g),(g,g,b),(g,b,g)(b,g,g)\}$$
$$B = \{(g,b,b),(b,g,b),(b,b,g),(g,g,b),(g,b,g),(b,g,g)\}$$

$$P(A) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲} \quad , P(B) = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴} \qquad P(A \cap B) = \frac{۳}{۸}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۸} = P(A \cap B)$$

تمرین ۱: در پرتاب دو تاس، اعداد رو شده در هر تاس کم تر از ۵ هستند. احتمال این که مجموع دو تاس ٤ باشد چه قدر است؟

تمرین ۲: احتمال اینکه علی در درس ریاضی و فیزیک قبول شود، به ترتیب ۰/۷ و ۰/۸ است. اگر احتمال قبولی علی در درس ریاضی به شرط آنکه در درس فیزیک قبول شود برابر ۰/۷۵ باشد، احتمال اینکه علی در حداقل یکی از این دو درس قبول شود را به دست آوریم.

درس دوم :آمار توصیفی

معیارهای گرایش به مرکز

میانگین: میانگین داده ها $x_۱ , x_۲, x_۳, \dots x_N$ برابر است با

$$\overline{X} = \frac{x_۱, x_۲, x_۳, \dots x_N}{N}$$

N تعداد داده هاست.اگر هر یک از داده های آماری با مقدار ثابتی جمع شوند، میانگین آن ها نیز با همان مقدار ثابت جمع می شود.و اگر هر یک از داده های آماری در مقدار ثابتی ضرب شوند، میانگین آن ها نیز درهمان مقدار ثابت ضرب می شود.

میانه: ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم، اگر تعداد داده ها فرد باشد، عددی که در وسط قرار دارد میانه است. اگر تعداد داده ها زوج باشد، میانگین دو عددی که در وسط قرار دارند میانه است.

معیارهای پراکندگی

دامنه تغییرات:اختلاف بین بزرگترین و کوچک ترین داده ها را دامنه تغییرات گوییم.

واریانس $(\sigma^۲)$: پراکندگی داده ها را نسبت به میانگین آن ها نشان می دهد.

واریانس داده های $x_۱, x_۲, x_۳, \dots x_N$ برابر است با

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \overline{X}) + (x_۲ - \overline{X}) + \cdots (x_N - \overline{X})}{N}$$

انحراف معیار (σ): جذر واریانس است.

ضریب تغییرات: نسبت انحراف معیار به میانگین است.

$$cv = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

مثال۱ : میانگین ۸ داده آماری ۱۵ است.اگر میانگین ٤ داده اول ۱۲ باشد، مجموع ٤ داده دیگر چه قدر است؟

$$\text{مجموع ۸ داده} = ۸ \times ۱۵ = ۱۲۰$$

$$\text{مجموع ٤ داده اول} = ٤ \times ۱۲ = ٤۸$$

$$\text{مجموع ٤ داده دوم} = ۱۲۰ - ٤۸ = ۷۲$$

مثال۲: ضریب تغییرات داده های ٦،۸،۱۰،۱۲،۱٤ چه قدر است؟

$$\overline{X} = \frac{۶ + ۸ + ۱۰ + ۱۲ + ۱۴}{۵} = ۱۰$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۱۴-۱۰)^۲ + (۱۲-۱۰)^۲ + (۱۰-۱۰)^۲ + (۸-۱۰)^۲ + (۶-۱۰)^۲}{۵}$$

$$\sigma^۲ = ۸ \to \sigma = \sqrt{۸} \to cv = \frac{\sqrt{۸}}{۱۰} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۱۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۵}$$

چارک ها: میانه داده ها را به دو دسته تقسیم می کند. داده های قبل از میانه و داده های بعد از میانه. میانه نیمه اول داده ها را **چارک اول** $(Q_۱)$و میانه نیمه دوم داده ها را **چارک سوم** $(Q_۳)$می نامیم. چارک دوم$(Q_۲)$ همان میانه است.

مثال۳: چارک اول و دوم و سوم داده های زیر را به دست آورید.

۲۴،۱۷،۱۹،۱۱،۲۷،۲۰،۱۲،۱۴،۲۵،۳۰

حل: ابتدا داده ها را مرتب می کنیم.

۱۱،۱۲،۱۴،۱۷،۲۰،۲۴،۲۵،۲۷،۲۹،۳۰

$$Q_۲ = \frac{۲۰ + ۲۴}{۲} = ۲۲$$

۱۱،۱۲،۱۴،۱۷،۲۰ $\quad , Q_۲ \quad$ ،۲۴،۲۵،۲۷،۲۹،۳۰

$Q_۱ = ۱٤ \qquad Q_۳ = ۲۷$

مثال ٤ : نمرات راضی دو دانش آموز A وB در پنج آزمون داخلی به صورت زیر است. عملکرد کدام یک بهتر است؟

A: ۱۸،۱٦،۱۸،۱۹،۱۹ $\qquad B$: ۱۸،۲۰،۱۹،۱٦،۱۷

حل: ابتدا میانگین نمرات هر یک را محاسبه می کنیم

$$\overline{X}_A = \frac{۹۰}{۵} = ۱۸ \qquad \overline{X}_B = \frac{۹۰}{۵} = ۱۸$$

چون میانگین هر دو برابر شد هر کدام که واریانس کمتری داشته باشد، داده ها به هم نزدیکتر و در نتیجه عملکرد بهتری دارد.

$$\sigma_A^۲ = \frac{۶}{۵} \qquad , \sigma_B^۲ = ۲ \to \sigma_A^۲ < \sigma_B^۲$$

پس عملکرد دانش آموز A بهتر است.

مثال۵: کارخانه ای دو نوع تسمه تایم تولید می کند.میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۷۵۰۰۰ و ۹۰۰۰۰ کیلومتر و واریانس برای نوع A و B به ترتیب ٤۰۰ و ٦۲٥ کیلومترمربع است . کدام نوع تسمه تایم بهتر است؟

حل:هر کدام ضریب تغییرات کوچکتری داشته باشد بهتر است.

$$cv_A = \frac{\sigma_A}{\overline{X}_A} = \frac{\sqrt{۴۰۰}}{۷۵۰۰۰} = \frac{۲۰}{۷۵۰۰۰} \cong ۰/۰۰۰۲۷$$

$$cv_B = \frac{\sigma_B}{\overline{X}_B} = \frac{\sqrt{۶۲۵}}{۹۰۰۰۰} = \frac{۲۵}{۹۰۰۰۰} \cong ۰/۰۰۰۲۸$$

پس تسمه تایم نوع A بهتر است.

نکته: اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد، آنگاه داده ها همگی با هم برابرند و برعکس.

تمرین: اگر واریانس داده های زیر برابر صفر باشد،a و b را حساب کنید $\quad a + ۲ , b + ۳ , ٤$