فصل اول

۱– شیب خط: شیب یک خط برابر است با نسبت تفاضل عرض‌های هر دو نقطه دلخواه روی آن به تفاضل طول‌های همان ۲ نقطه: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$: شیب خط

اگر معادله خط به صورت $ax+by+c=0$ باشد، آن‌گاه: $m=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}$

۲– نوشتن معادله خط: اگر مختصات ۲ نقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ از خط را داشته باشیم. می‌توانیم معادله آن را بنویسیم بدین‌صورت که ابتدا شیب خط را نوشته و سپس یکی از ۲ نقطه را در فرمول $y-y_0=m(x-x_0)$ را جای‌گذاری می‌کنیم. $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$

۳– وضعیت ۲ خط: ۲ خط L_1 و L_2 را با شیب‌های m_1 و m_2 را در نظر بگیرید.

I) اگر $m_1=m_2$ باشد، آن‌گاه ۲ خط موازی‌اند.

II) اگر $m_1\times m_2=-1$ باشد، آن‌گاه ۲ خط بر هم عمودند.

۴– فاصله ۲ نقطه:

$$\begin{cases}A=(x_1,y_1)\\B=(x_2,y_2)\end{cases}\Rightarrow AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

۵– مختصات نقطه وسط پاره‌خط: اگر A و B دو نقطه در صفحه باشند، مختصات نقطه M، وسط پاره‌خط AB برابر است با: $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$ و $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

۶– فاصله از نقطه خط: فاصله نقطه $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با: $AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

معادله درجه ۲: هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ یک معادله درجه دوم می‌باشد. اگر x_1 و x_2، ریشه‌های این معادله باشند: $\Delta=b^2-4ac\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

روش تغییر متغیر: برای حل معادلات به شکل $a\square^2+b\square+c=0$، باید از تغییر متغیر $t=\square$ استفاده کنیم تا معادله به یک معادله به فرم درجه ۲ تبدیل شود:

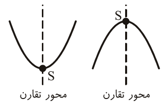
مثال: اگر معادله x^4-10x^2+9 باشد، با تغییر متغیر $t=x^2$، به معادله درجه دوم $t^2-10t+9=0$ می‌رسیم.

روابط بین ریشه‌ها: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم باشند، آن‌گاه:

۱) $x_1+x_2=S=\frac{-b}{a}$ ۲) $x_1\times x_2=P=\frac{c}{a}$ ۳) $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$$\boxed{x^2-Sx+P=0}$$

سهمی: سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ همواره به یکی از دو صورت مقابل است:



۱- در شکل‌های روبه‌رو نقطه S رأس سهمی هستند. $S(x,y)=S(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$

۲- اگر $a>0$ باشد، سهمی دارای پایین‌ترین نقطه یا مینیمم و اگر $a<0$ باشد، سهمی دارای بالاترین نقطه یا ماکزیمم است.

صفرهای تابع درجه ۲: نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادله $f(x)=0$ هستند.

در یک معادله درجه دوم اگر $\Delta>0$ باشد، معادله ۲ ریشه حقیقی متمایز دارد و اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دارای یک ریشه و اگر $\Delta<0$ باشد، معادله ریشه ندارد.

اگر در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، $\Delta>0$ باشد:

۱– $P<0\Rightarrow$ و معادله ۲ ریشه مختلف‌العلامت دارد. ۲– $P>0\rightarrow$ ۲ ریشه هم‌علامت‌اند.

۳– $P=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=-\frac{b}{a}\end{cases}$

مثال: حدود m برای آن‌که نمودار تابع با ضابطه $f(x)=mx^2+2mx+m+1$، همواره بالای محور xها قرار گیرد را مشخص کنید.

حل : برای آن‌که سهمی بالای محورها باشد، باید، ضریب $x^2 \geq 0$ و $\Delta<0$ شوند.

$I)\ m\geq 0$

$II)\ \Delta<0\Rightarrow b^2-4ac=4m^2-4(m)(m+1)=4m^2-4m^2-4m<0\Rightarrow m>0$

اگر $m=0$ هم باشد، آن‌گاه $f(x)=1$ درمی‌آید که خط $y=1$ بالای محور xهاست. پس به ازای $m\geq 0$ نمودار تابع f همواره بالای محور xها قرار می‌گیرد.

معادلات گویا:

معادلات ۲ کسری: هرگاه رابطه‌ی $\frac{x}{y}=\frac{h}{z}$ برقرار باشد، برای حل معادله، طرفین، وسطین می‌کنیم $(xz=yh)$، معادله را حل می‌کنیم و جواب با شرط آن‌که مخرج هیچ ۲ کسر را صفر نکند، قابل قبول است.

مستطیل طلایی: اگر x را طول مستطیل و y را عرض مستطیل در نظر بگیریم:

$$\frac{\text{مجموع طول و عرض}}{\text{طول}}=\frac{\text{طول}}{\text{عرض}}\Rightarrow\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$$

معادلات رادیکالی: هرگاه رابطه‌ی $\sqrt{A}=B$ برقرار باشد. برای حل معادله، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و معادله‌ی $A=B^2$ را حل می‌کنیم و جواب با شرط آن‌که عبارت زیر رادیکال و عبارت B را صفر نکند، قابل قبول است.

فصل دوم

۱– دایره: دایره به مرکز o و شعاع r را با $C(o,r)$ نشان می‌دهیم. می‌دانیم هر نقطه که روی دایره قرار دارد به فاصله r از نقطه o قرار دارد و هم‌چنین هر نقطه‌ای که فاصله آن از نقطه o برابر r باشد، روی دایره $C(o,r)$ قرار می‌گیرد.

۲– رسم مثلثی که طول سه ضلع آن معلوم باشد.

مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴، ۵ و ۶ باشد.

حل :ابتدا پاره‌خط BC را به طول ۶ رسم می‌کنیم. اگر نقطه A به فاصله ۴ از B و به فاصله ۵ از C باشد، آن‌گاه برای پیدا کردن نقطه A، به مرکز B و شعاع ۴ و هم‌چنین به مرکز C و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دو دایره هم‌دیگر را در دو نقطه A قطع می‌کنیم.

۳– شرط آن‌که اعداد a، b و c اضلاع مثلث باشند، این است که: $\begin{cases}a+b>c\\a+c<b\\b+c>a\end{cases}$

۴– عمود منصف: عمود منصف پاره‌خط AB، خطی است که از نقطه M وسط AB می‌گذرد و بر آن عمود است.

۵– ترسیم عمود منصف پاره‌خط AB :

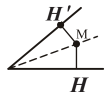
دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم و یک بار به مرکز نقطه A و یک بار هم به مرکز نقطه B،

دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دو دایره یک‌دیگر را در نقاط M و M' قطع می‌کنند. خط گذرنده از دو نقطه M و M' عمود منصف AB است.

۶– نیمساز: نیمساز خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

نکته: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

$$MH = MH'$$



نسبت و تناسب: هرگاه رابطه‌ی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ برقرار باشد، داریم:

۱) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$

۲) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

۳) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

۴) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

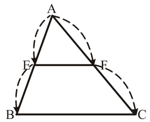
استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات

استدلال استنتاجی: استدلالی است که براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، بیان شود.

قضیه تالس: اگر در مثلث ABC، پاره‌خط EF موازی ضلع BC باشد، داریم:

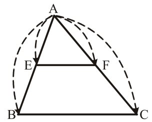
$$\frac{AE}{BE}=\frac{AF}{FC}$$

جزء به جزء

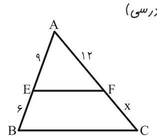


$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

جزء به کل



مثال: در مثلث ABC، EF موازی BC است، طول پاره‌خط FC و AC کدام است؟ *(کتاب درسی)*



حل:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}\Rightarrow\frac{9}{6}=\frac{12}{x}\Rightarrow x=8=FC$$

$$AC=AF+FC=12+8=20$$

عکس قضیه: اگر فرض و حکم یک قضیه را جا به جا کنیم، آن‌چه که حاصل می‌شود، عکس قضیه است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

مثال: اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

عکس قضیه: اگر در مثلثی میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

برهان خلف: نوعی استدلال در مسائل ریاضی است. در این روش، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد، آن‌گاه با استفاده از استدلال استنتاجی به یک تناقض می‌رسیم و به این ترتیب درستی حکم ثابت می‌شود.

مراحل اثبات به روش برهان خلف:

مسئله : (فرض) $A\Rightarrow B$ (حکم)

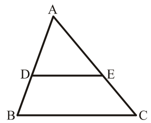
A درست
B نادرست

$\Rightarrow\dots\Rightarrow\dots\Rightarrow$

(۱) A درست نیست.
(۲) تناقض منطقی

$\Rightarrow$ پس نتیجه می‌گیریم، حکم B درست است.

عکس قضیه تالس: در شکل روبه‌رو، اگر $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، آن‌گاه: $DE \parallel BC$



قضیه دوشرطی:

گاهی عکس یک قضیه درست است، در این صورت عکس قضیه، خود نیز یک قضیه است. چنین قضیه‌ای را قضیه دوشرطی می‌گوییم، قضیه‌های دوشرطی را با نماد $\Leftrightarrow$ بیان می‌کنیم.

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها: اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را قطع کند، در این صورت مثلث کوچکی ایجاد می‌شود که با مثلث اولیه متشابه است.

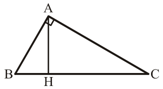
قضیه: هرگاه ۲ زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

قضیه: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد و زاویه بین آن‌ها برابر باشد، دو مثلث متشابه است.

قضیه: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

قضیه: هرگاه در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر رسم شود، داریم:

$$\begin{cases}AH^2=BH\times CH\\AB^2=BH\times BC\\AC^2=CH\times BC\end{cases}$$



فصل سوم

تابع: به رابطه‌ای تابع گفته می‌شود که به ازای هر x (روی دامنه) دقیقاً یک $f(x)$ دریافت کنیم.

توابع گویا: هر تابعی به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$، چندجمله‌ای هستند و چندجمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست. مثل $f(x)=\frac{2x}{x+4}$

دامنه توابع گویا: از سال‌های گذشته می‌دانیم که مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد، پس اعدادی که مخرج را صفر می‌کنند، عضو دامنه نیستند: $Df=R-\{$ریشه‌های مخرج$\}$

مثال: دامنه تابع $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$ را به دست آورید.

حل:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{x-1+x}{x(x-1)}\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}\Rightarrow Df=R-\{0,1\}$$

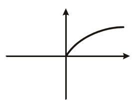
تساوی دو تابع: دو تابع f و g را برابر نامیم، هرگاه:

الف) دامنه توابع قبل از ساده کردن با هم برابر باشند.
ب) ضابطه ۲ تابع بعد از ساده کردن با هم برابر باشند.

مثال: ۲ تابع $f(x)=\frac{3x}{x}$ و $g(x)=3$ با هم برابر نیستند زیرا دامنه تابع f برابر است با $R-\{0\}$ ولی دامنه تابع g برابر است با R.

توابع رادیکالی: هر تابعی به شکل $f(x)=\sqrt{P(x)}$ را یک تابع رادیکالی می‌گوییم که در آن، $P(x)$ منفی نیست.

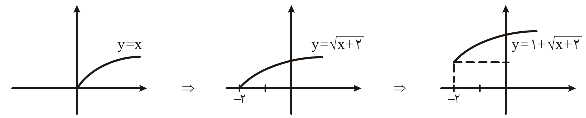
رسم توابع رادیکالی: نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به صورت مقابل می‌باشد.



۱- اگر x با عددی مثل a $(a>0)$ جمع شود، نمودار به اندازه a به سمت چپ و اگر x از عدد مثل a $(a>0)$ کم شود، نمودار به اندازه a به سمت راست منتقل می‌شود.

۲- اگر y با عدد مثل b $(b>0)$ جمع شود، نمودار به اندازه b به سمت بالا و اگر y از عدد مثل b $(b>0)$ کم شود، نمودار به اندازه b به سمت پایین منتقل می‌شود.

مثال: نمودار تابع $y=1+\sqrt{x+2}$ کدام است؟



توابع جزء صحیح: تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح به خود همان عدد را نسبت می‌دهد و هر عدد غیرصحیح را به سمت پایین رند می‌کند. $[x]=a\Leftrightarrow a\le x<a+1$

مثال:

۱) $[5]=5$ ۲) $[4/5]=4$ ۳) $[-1/5]=-2$

نکته: $[x\pm n]=[x]\pm n$

مثال: مجموعه جواب معادله $[x+1]+2[x]=7$ کدام است؟

حل: $[x+1]+2[x]=7\Rightarrow[x]+1+2[x]=7\Rightarrow 3[x]=6\Rightarrow[x]=2\Rightarrow\boxed{2\le x<3}$

وارون یک تابع: اگر در تابع f که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب است، جای مؤلفه‌ها را عوض کنیم، مجموعه جدیدی از زوج مرتب به دست می‌آید که به آن وارون تابع f می‌گوییم و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

مثال: وارون تابع $f=\{(1,2),(3,4)\}$ برابر است با $f^{-1}=\{(2,1),(4,3)\}$

نکته: نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه یک‌دیگرند.

به دست آوردن ضابطه وارون یک تابع:

کافی است که ابتدا x را برحسب y حساب کنیم و در نهایت به جای y از نماد x و به جای x از $f^{-1}(x)$ استفاده کنیم.

مثال: ضابطه وارون تابع $f(x)=2x-1$ کدام است؟

حل: $y=2x-1\Rightarrow 2x=y+1\Rightarrow x=\frac{y+1}{2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$

تابع یک به یک: به تابعی که در زوج مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گویند.

مثال: اگر تابع $f=\{(-2,2),(m,3),(-1,3),(2m,a)\}$ یک به یک باشد، a را به دست آورید.

حل: $\begin{cases}(-1,3)\in f\\(m,3)\in f\end{cases}\Rightarrow m=-1\Rightarrow f=\{(-2,2),(-1,3),(-2,a)\}\Rightarrow a=2$

اعمال روی توابع: دو تابع f و g با دامنه‌های D_f و D_g را در نظر می‌گیریم:

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ و $D_{f+g}=D_f\cap D_g$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ و $D_{f-g}=D_f\cap D_g$

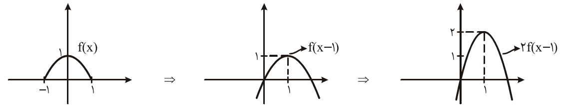
۳) $(f.g)(x)=f(x)\times g(x)$ و $D_{f.g}=D_f\cap D_g$

۴) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ و $D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\mid g(x)\neq 0\}$

رسم نمودار $kf(x)$ از روی $f(x)$:

برای رسم نمودار تابع با ضابطه $kf(x)$ کافی است، عرض هر نقطه از نمودار تابع $f(x)$ را، k برابر کنیم.

مثال: براساس نمودار تابع $f(x)$، نمودار تابع $2f(x-1)$ را رسم کنید.



رسم نمودار $-f(x)$ $\Leftarrow$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم تا نمودار $-f(x)$ به دست آید.

فصل چهارم

واحدهای اندازه‌گیری:

۱- رادیان: ۱ رادیان برابر است با اندازه‌ی زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

اگر L طول کمان روبه‌رو زاویه، r شعاع دایره و α زاویه برحسب رادیان باشد، داریم: $\alpha=\frac{L}{r}$

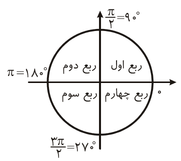
۲- تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر: $\frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}$

مثال: در دایره‌ای به شعاع ۳، توسط زاویه α، کمانی به طول ۷ متر ایجاد می‌شود، با فرض $\pi=3$، اندازه α برحسب درجه کدام است؟

حل: $\alpha=\frac{L}{r}=\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{D}{180}=\frac{\frac{7}{3}}{\pi}\Rightarrow D=\frac{7}{9}\times180=140$

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی:

ربع / نسبت مثلثاتی	اول	دوم	سوم	چهارم
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−



مثال: علامت $\cos(\frac{11\pi}{9})$ را مشخص کنید.

حل: چون $\frac{\pi}{2}<\frac{11\pi}{9}<\pi$ قرار دارد (ناحیه دوم)، پس کسینوس منفی است.

روابط مهم:

۱) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ۲) $\tan\alpha.\cot\alpha=1$

۳) $\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha$ ۴) $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$

نسبت‌های مثلثاتی قرینه:

۱) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ ۲) $\cos(-\alpha)=+\cos\alpha$

۴) $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ $\qquad$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

نسبت‌های مثلثاتی مکمل و متمم:

۱) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	۲) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$
۳) $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	۴) $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$
۵) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	۶) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$
۷) $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	۸) $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$
۹) $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$	۱۰) $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$
۱۱) $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$	۱۲) $\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha$
۱۳) $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$	۱۴) $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$
۱۵) $\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$	۱۶) $\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\tan\alpha$

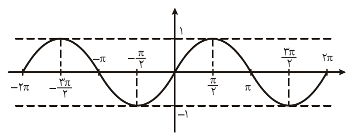
نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان:

هرگاه زاویه به صورت $2k\pi\pm\alpha$ بود، می‌توان از $2k\pi$ صرف‌نظر کرد.

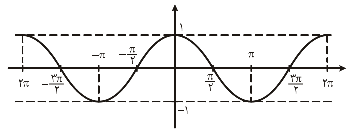
مثال: $\sin(2\cancel{k}\pi+\alpha)=\sin(\alpha)$

توابع مثلثاتی:

رسم تابع سینوس: $y=\sin x\Rightarrow$

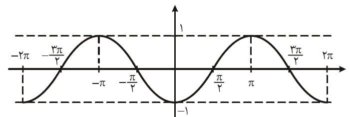


رسم تابع کسینوس: $y=\cos x\Rightarrow$



مثال: نمودار تابع $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ را رسم کنید.

حل : چون x منهای $\frac{\pi}{2}$ شده، پس به اندازه $\frac{\pi}{2}$ به سمت راست می‌رویم.



توابع $y=a\sin(bx+c)$ و $y=a\cos(bx+c)$

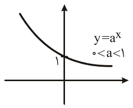
دوره تناوب این توابع $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است. بیش‌ترین مقدار تابع برابر $|a|$ و کم‌ترین مقدار تابع برابر $-|a|$ می‌باشد.

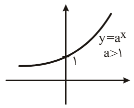
فصل پنجم

۱– توان‌های حقیقی: اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم:

۱) $a^0=1$	۲) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$	۳) $a^x.a^y=a^{x+y}$
۴) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$	۵) $(ab)^x=a^x.b^x$	۶) $(a^x)^y=a^{x.y}$

تابع نمایی: هر تابع با ضابطه $f(x)=a^x$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی نام دارد.





نکته: اگر $a>1$ باشد، تابع صعودی و اگر $0<a<1$ باشد، تابع نزولی است.

نکته: نمودار تابع، محور yها را در نقطه $(0,1)$ قطع می‌کند و با محور xها برخوردی ندارد.

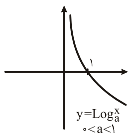
۲– نمودار توابع با ضابطه‌های $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ ($a>0$ و $a\neq1$) نسبت به محور yها قرینه‌اند.

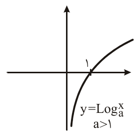
معادلات نمایی: هر معادله به صورت $a^u=b^v$ ($a,b\neq1$ و $a,b>0$) یک معادله نمایی است. اگر بتوان پایه دو طرف را یکسان کرد، آن‌گاه توان‌ها برابر هم قرار می‌گیرند.

مثال: معادله $9^{3x+1}=27^{-2x+1}$ را حل کنید.

حل :
$$\begin{cases}9^{3x+1}=(3^2)^{3x+1}=3^{6x+2}\\27^{-2x+1}=(3^3)^{-2x+1}=3^{-6x+3}\end{cases}\Rightarrow 3^{6x+2}=3^{-6x+3}\Rightarrow 6x+2=-6x+3\Rightarrow x=\frac{1}{12}$$

تابع لگاریتمی: وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x)=a^x$ را به صورت $f^{-1}(x)=Log_a^x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم.





نکته: نمودار تابع، محور xها را در نقطه $(1,0)$ قطع می‌کند و با محور yها برخوردی ندارد.

دامنه توابع لگاریتمی: دامنه تابع $f(x)=Log_{h(x)}^{g(x)}$ از حل نامعادلات روبه‌رو به دست می‌آید:
$$\begin{cases}1)\ g(x)>0\\2)\ h(x)>0\\3)\ h(x)\neq1\end{cases}$$

مثال: دامنه تابع $f(x)=Log_{(x+1)}^{(x-2)}$ را به دست آورید.

حل :
$$\begin{cases}1)\ x-2>0\Rightarrow x>2\\2)\ x+1>0\Rightarrow x>-1\Rightarrow x>2\Rightarrow D_f=(2,+\infty)\\3)\ x+1\neq1\Rightarrow x\neq0\end{cases}$$

ویژگی‌های لگاریتمی:

۱) $Log_a^1=0$	۲) $Log_a^a=1$	۳) $Log_a^x=b\Rightarrow a^b=x$
۴) $Log_a^{x^m}=m\,Log_a^x$	۵) $Log_{a^n}^x=\frac{1}{n}Log_a^x$	۶) $Log_a^x+Log_a^y=Log_a^{x.y}$
۷) $Log_a^x-Log_a^y=Log_a^{\frac{x}{y}}$		

مثال: اگر $Log^2=0/3$ و $Log^3=0/48$، مقدار تقریبی $Log\,0/75$ کدام است؟

حل :
$$0/75=\frac{3}{4}\Rightarrow Log^{0/75}=Log^{\frac{3}{4}}=Log^3-Log^4=Log^3-Log^{2^2}=0/48-2\times0/3=-0/12$$

معادلات لگاریتمی: اگر تساوی $Log_a^x=Log_a^y$ برقرار باشد، می‌توان نتیجه گرفت که $x=y$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$Log_2^{(x+1)}+Log_2^{(x+4)}=2$$

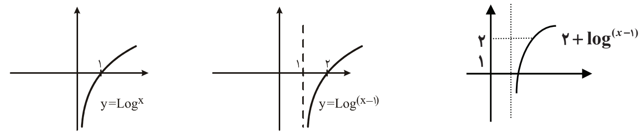
حل :
$$\Rightarrow Log_2^{(x+1)(x+4)}=2\Rightarrow(x+1)(x+4)=2^2\Rightarrow x^2+5x+4=4\Rightarrow x^2+5x=0\Rightarrow x(x+5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-5\ \times\end{cases}$$

مقدار $x=-5$ قابل قبول نیست زیرا عبارت جلوی لگاریتم را منفی می‌کند.

مثال: نمودار تابع $y=2+Log^{(x-1)}$ را رسم کنید.

نکته : ۱- مقادیر x منهای یک شدند، پس ما یک واحد به سمت راست می‌رویم.

۲- تابع لگاریتمی با عدد ۲ جمع شده است، پس ۲ واحد به سمت بالا می‌رویم.



کاربرد تابع لگاریتمی: مقیاس ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزادشده زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M و انرژی آزادشده برابر E در واحد (Erg) باشد داریم:

$$Log^{E}=11/8+1/5M$$

فصل ششم

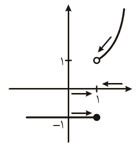
مفهوم حد راست و چپ:

۱- حد راست: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (x_0,b) تعریف شده باشد، حد راست f در x_0 برابر L است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$

۲- حد چپ: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a,x_0) تعریف شده باشد، حد چپ f در x_0 برابر L است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آن‌که x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$

۳- حد تابع: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند (a,b) شامل x_0 (به جز احتمالاً خود x_0) تعریف شده باشد. هر تابع f در x_0 برابر عدد L است، هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد. به شرط آن‌که x از دو طرف به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \text{ اگر و تنها اگر } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \text{ و } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$



مثال: نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است. حد در نقطه $x=1$ را بررسی کنید.

حل : ۱- حد راست: با توجه به نمودار وقتی از سمت راست به نقطه یک نزدیک می‌شویم، مقدار تابع f به یک نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$$

۲- حد چپ: با توجه به نمودار وقتی از سمت چپ به نقطه یک نزدیک می‌شویم، مقدار تابع f به -1 نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1$$

۳- مقدار در خود نقطه $x=1$ برابر -1 است.

به دلیل این‌که مقدار حد چپ و راست در نقطه $x=1$ برابر نیست، پس تابع f در نقطه $x=1$، حد ندارد.

مثال: اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ باشد، آیا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجود است؟

حل :

$$f(x)=\frac{|x|}{x}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x}=1 & x\ge 0\\[2mm] \dfrac{-x}{x}=-1 & x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1\end{cases}$$

حد چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع $f(x)$ در $x=0$ حد ندارد.

محاسبه حد تابع:

۱- حد تابع ثابت: اگر $f(x)=k$ باشد، در هر نقطه دلخواه a، حد تابع $f(x)$ برابر k است.

مثال: اگر $f(x)=3$ باشد، آن‌گاه: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to -2} f(x)=3$

۲- حد تابع همانی: اگر $f(x)=x$ باشد، در هر نقطه دلخواه a، حد تابع برابر a است.

مثال: $\lim\limits_{x\to 5} x=5$ و $\lim\limits_{x\to 2} x=2$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$، آن‌گاه:

۱) حد مجموع $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+m$

۲) حد تفاضل $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L-m$

۳) حد حاصل‌ضرب $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a} g(x)=L.m$

۴) حد تقسیم $\Rightarrow Lim(\dfrac{f(x)}{g(x)})=\dfrac{L}{m}\Rightarrow m\neq 0\Rightarrow$ مخرج باید مخالف صفر باشد.

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آن‌گاه:

۱) $\lim\limits_{x\to a}(Cf(x))=C\times\lim\limits_{x\to a} f(x)=C\times L$

۲) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^n=L^n$

نکته : اگر حاصل $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ برابر با $\dfrac{0}{0}$ شود، ابتدا باید $f(x)$ و $g(x)$ را بر $x-a$ ساده کنیم و سپس با استفاده از قانون تقسیم، حدها را بررسی کنیم.

مثال: حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+4}=\frac{(-1)^2+3(-1)+2}{(-1)^2+5(-1)+4}=\frac{0}{0}$$

حل :

$$\Rightarrow\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+4}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+4)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+2}{x+4}=\frac{-1+2}{-1+4}=\frac{1}{3}$$

حد توابع جزء صحیح:

در محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح ابتدا با توجه به تعریف جزء صحیح، به جای آن، عدد ثابتی قرار می‌دهیم، سپس با توجه به قضایای حد، حدگیری را انجام می‌دهیم.

مثال: حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 1^-}([x]+3x)=\lim_{x\to 1^-}[1^-]+3x=\lim_{x\to 1^-}(0+3x)=3(1)=3$$

پیوستگی:

تابع f را در نقطه $C \in R$ پیوسته می‌گوییم، هرگاه

۱) تابع در $x=C$ حد داشته باشد.

۲) حد تابع در $x=c$ با مقدار تابع در C برابر باشد.

پیوستگی راست: هرگاه $\lim\limits_{x\to C^+} f(x)=f(C)$ ، در این صورت می‌گوییم تابع f ، در $x=C$ پیوستگی راست دارد.

پیوستگی چپ: هرگاه $\lim\limits_{x\to C^-} f(x)=f(C)$ ، در این صورت می‌گوییم تابع f ، در $x=C$ پیوستگی چپ دارد.

پیوستگی روی بازه:

۱) تابع f روی بازه (a,b) پیوسته است، هرگاه در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.

۲) تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است، هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه a، پیوستگی راست و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

فصل هفتم

احتمال شرطی:

منظور از احتمال A به شرط B که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آن‌که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{و} \quad P(B)\neq ۰$$

پیشامد مستقل: هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد، آن‌گاه پیشامدهای A و B مستقل از یک‌دیگرند.

مستقل بودن A از B معادل است با این‌که $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

مثال: احتمال این‌که علی در درس ریاضی و فیزیک قبول شود، به ترتیب ۰/۷ و ۰/۸ است. اگر احتمال قبولی علی در درس ریاضی به شرط آن‌که در درس فیزیک قبول شود برابر ۰/۷۵ باشد، احتمال آن‌که علی حداقل در یکی از این دو درس قبول شود را به دست آورید.

حل :

$$\begin{cases} \text{درس ریاضی} = A \Rightarrow P(A)=۰/۷ \\ \text{درس فیزیک} = B \Rightarrow P(B)=۰/۸ \end{cases} \Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{۰/۸}=۰/۷۵$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۸\times ۰/۷۵=۰/۶$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۷+۰/۸-۰/۶=۰/۹$$

آمار توصیفی:

میانگین: برابر است با مجموع همه داده‌ها که بر تعداد کل تقسیم می‌شود. $X=\frac{x_۱+x_۲+...+x_n}{N}$

میانه: پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری که تعداد داده‌های قبل و بعد آن با هم برابر است را میانه می‌نامیم و آن را با $Q_۲$ نمایش می‌دهیم.

نکته : اگر همه داده‌ها را با عدد ثابت a جمع کنیم، میانگین و میانه هم با عدد a جمع می‌شوند.

نکته : اگر همه داده‌ها را در عدد ثابت a ضرب کنیم، میانگین و میانه هم در عدد a ضرب می‌شوند.

نکته : لزومی ندارد میانه عضوی از داده‌ها باشد.

نکته : اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو داده‌ی وسط برابر میانه است.

شاخص‌های پراکندگی: ۱- دامنه تغییرات؛ ۲- واریانس؛ ۳- انحراف معیار؛ ۴- ضریب تغییرات

۱- دامنه تغییرات: عبارت است از اختلاف کوچک‌ترین داده از بزرگ‌ترین داده و آن را با R نمایش می‌دهند.

۲- واریانس: میانگین مجذور انحرافات از میانگین داده‌ها: $\sigma^۲=\frac{(x_۱-\bar{x})^۲+...+(x_n-\bar{x})^۲}{N}$

۳- انحراف معیار: جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامند و آن را با σ نمایش می‌دهند.

۴- ضریب تغییرات: برابر است با نسبت انحراف معیار به میانگین و آن را با CV نشان می‌دهند. $CV=\frac{\sigma}{\bar{X}}$

چارک‌ها:

چارک‌ها (چارک اول و دوم و سوم) مقادیری هستند که داده‌های مرتب‌شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، چارک دوم همان میانه است. چارک اول را با $Q_۱$ و چارک سوم را با $Q_۳$ نشان می‌دهند.

مثال: برای داده‌های زیر، میانه، میانگین، واریانس و ضریب تغییرات را محاسبه کنید.

۲,۴,۴,۴,۴,۶

حل :

۱) $Q_۲ \Rightarrow$ داده‌ای است که وسط قرار می‌گیرد. $\Rightarrow Q_۲=\frac{۴+۴}{۲}=۴$

۲) $\bar{X}=\frac{۲+۴+۴+۴+۴+۶}{۶}=\frac{۲۴}{۶}=۴$

۳) $\sigma^۲=\frac{(۲-۴)^۲+۴\times(۴-۴)^۲+(۶-۴)^۲}{۶}=\frac{۴+۴}{۶}=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$

۴) $\sigma=\sqrt{\frac{۴}{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

۵) $CV=\frac{\sigma}{\bar{X}}=\frac{\frac{۲}{\sqrt{۳}}}{۴}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}$