فصل ۵

توابع نمایی و لگاریتمی

درس اوّل — تابع نمایی و ویژگی‌های آن

درس دوم — تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

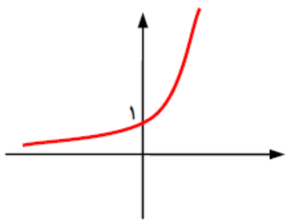
درس سوم — نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

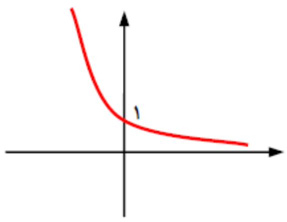
تابع نمایی : فرض کنید a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد $(a \in \mathbb{R}, a > ۰, a \neq ۱)$. تابعی که ضابطهٔ آن به صورت $y = a^x$ باشد، تابع نمایی با پایهٔ a نامیده می‌شود.

مثال. نمودار توابع $f(x) = ۲^x$ و $y = (\frac{۱}{۲})^x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

نکته. نمودار توابع نمایی $y = a^x$ در حالت کلی برحسب این که $a > ۱$ و یا $۰ < a < ۱$ همواره به یکی از دو صورت زیر است :



$a > ۱$



$۰ < a < ۱$

تذکر. تابع نمایی $y = a^x$ برای ۱) $a > ۱$ صعودی است : $s < t \iff a^s < a^t$

۲) $۰ < a < ۱$ نزولی است : $s < t \iff a^s > a^t$

نکته. با استفاده از نمودارهای بالا، موارد مهم ذیل فهمیده می‌شود :

الف) دامنهٔ تابع نمایی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و برد آن اعداد مثبت $(۰, +\infty)$ است. یعنی :

$$f: \mathbb{R} \to (۰,+\infty)$$
$$y = a^x$$

ب) چون $a^۰ = ۱$، نمودار تابع نمایی همواره از نقطهٔ $(۰, ۱)$ عبور می‌کند.

پرسش. اگر تعداد باکتری‌های موجود در نمونه، از رابطهٔ $Q(t) = ۲۵۰ \times ۳^{\frac{t}{۴}}$ بدست آید، (که t نشان دهنده زمان برحسب روز است) مطلوبست :

الف) تعداد اولیه باکتری‌ها را

ب) تعداد آنها را بعد از گذشت ۴ روز

پ) تعداد آنها بعد از گذشت ۱۴ روز

پرسش. تابع $f(x) = (\frac{1}{2})^{x+1}$ مفروض است. مقادیر $f(0)$، $f(1)$ و $f(-2)$ را بیابید.

پرسش. محدوده m را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $y = (\frac{1-2m}{m+1})^x$ یک تابع نمایی باشد.

تذکر. تمام ویژگی‌های تابع نمایی را میتوان از روی نمودار کلی گفته شده استخراج کرد. بنابر این نمودار این تابع را باید در ذهن داشت.

نکته. همواره داریم : $a^{-x} = (\frac{1}{a})^x$. مثلا تابع $y = 3^{-x}$ همان تابع نمایی $y = (\frac{1}{3})^x$ است. به همین صورت، تابع نمایی $y = (\frac{1}{2})^{-x}$ همان تابع نمایی $y = 2^x$ می‌باشد.

مثال. نمودار توابع زیر را توسط انتقال نمودارها رسم کنید :

الف) $y = 2^x + 1$

ب) $y = 3^{x-2} - 2$

پ) $y = \frac{(\frac{2}{7})^x}{3^{-x}}$

ت) $y = 2 \times (\frac{3}{2})^x$

نکته. فقط توابعی رفتار نمایی دارند که ضابطهٔ آنها بصورت توانی باشد و متغییر در توان قرار داشته باشد. البته ممکن است این عبارت توان دار با عددی جمع و تفریق یا در عددی ضرب شده باشد.

مثال. کدام یک از توابع زیر رفتار نمایی دارند؟

الف) $y = 3x^2 + 5$ ب) $y = 3 \times 2^x + 5$

پ) $y = \frac{۴^x}{۲ \times ۵^{x-۱}}$ ت) $y = (۲ - x^۲)^۳$

پرسش. مقدار m را طوری تعیین کنید که تابع $y = (۴ - m^۲)\, x^۲ + ۳^{(۱-m)x}$ یک تابع نمایی نزولی باشد.

معادلات و نامعادلات نمایی:

معادله نمایی: اگر b یک عدد مثبت باشد و $b^x = b^y$، آنگاه $x = y$ و به عکس. مثلا از تساوی $۳^x = ۳^{۱۰}$ نتیجه می‌شود که $x = ۱۰$.

مثال. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳} = ۸۱$

ب) $۹^{۳y-۳} = ۲۷^{۲y+۱}$

پ) $۹^x - ۴ \times ۳^{x+۱} + ۲۷ = ۰$

ت) $\frac{۸^{۲x-۳}}{۱۶^{x+۳}} = ۴^x - ۱$

ث) $۱۲۵^{۱-۳x} = (\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}})^{۲x}$

ج) $۲^{x-۱} + ۲^{x+۱} + ۲^{x+۲} = ۲۰۸$

نامعادلهٔ نمایی: اگر $b > ۱$، آنگاه $b^x \geq b^y$ اگر و تنها اگر $x \geq y$ مثلا اگر $۵^x > ۵^۶$ آنگاه $x > ۶$.

همچنین اگر $۰ < b < ۱$، آنگاه $b^x \geq b^y$ اگر و تنها اگر $x \leq y$. مثلا اگر $(\frac{۱}{۳})^x \geq (\frac{۱}{۳})^۴$ آنگاه $x \leq ۴$

نکته. مانند معادلات نمایی، در حل نامعادلات نمایی نیز در ابتدا باید پایه‌ها یکسان کرد.

مثال. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲^{x-۲} \leq \frac{۱}{۳۲^۳}$

ب) $۳^{۳x+۲} > ۲۷^{۲x-۱}$

پ) $۴۹^{۲x-۱} \geq (\sqrt{۷})^{-۴x+۴}$

ت) $(\sqrt{۳-\sqrt{۸}})^{۱-x} < (\sqrt{۳+\sqrt{۸}})^{۲-۳x}$

پرسش. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = (\frac{۳}{۲})^{-x}$

ب) $y = ۲ \times ۳^x - ۴$

پ) $y = -۳^{x+۲} + ۱$

ت) $y = |۳^x - ۲|$

ث) $y = \frac{۳^x - ۳^{۲x}}{۱۲^x - ۲^{۲x}}$

پرسش. معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $۹^{x-۱} = ۲۷ \times (\frac{۱}{۳})^{۱-۲x}$

ب) $(\frac{۱}{۲})^{۱-۲x} = ۶۴^{\frac{۲x+۴}{۱۲}}$

پ) $(\frac{۳\sqrt[۵]{۳}}{\sqrt{۳}})^x = ۳^{-x+۲}$

ت) $۸^{۱-x} - ۴ \times ۲^{۷+۲x} + ۴۱ = -۲۳$

ث) $۳^{۶x-۵} > ۸۱$

ج) $(۴-\sqrt{۳})^{x^۲} \leq (۴+\sqrt{۳})^x$

پرسش. دامنهٔ تابع زیر را به صورت بازه مشخص کنید.

$$y = \frac{۱}{\sqrt{۳^x - ۵^x}}$$

تابع لگاریتمی و لگاریتم

تابع لگاریتمی :

همانطور که در بخش قبل دیدیم تابع نمایی $y = a^x$ که $(a > ۰, a \neq ۱)$ تابعی یک به یـک اسـت و در نتیجه این تابع معکوس پذیر خواهد بود. معکوس این تابع را تابع لگاریتمی گویند و به صورت زیر تعریف میشود : $y = \log_a x, \quad (a > ۰, a \neq ۱)$

در این تابع، عدد a مبنا یا پایهٔ لگاریتم است که همواره مثبت و مخالف ۱ می‌باشد.

نکته. با توجه به مطالب فوق، تابع لگاریتمی و خصوصیات آن و ارتباطش با تابع نمایی را میتوان به صـورت زیر بیان کرد :

$$\log_a : (۰, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \log_a y = x \iff a^x = y$$

در واقع، دامنهٔ تابع لگاریتمی تمام اعداد مثبت و برد آن تمام اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.

مثال. در هر یک از موارد زیر، تساوی داده شده را به زبان لگاریتم یا نمایی بنویسید.

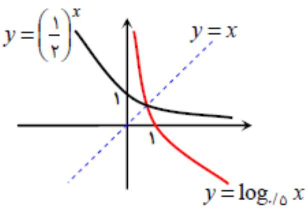
۱) $۳۲ = ۲^۵$

۲) $۸^{\frac{۱}{۵}} = \sqrt[۵]{۸}$

۳) $\log_۵ ۱۲۵ = ۳$

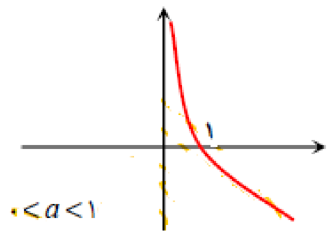
۴) $\log_{۱۰} ۰/۰۰۰۱ = -۴$

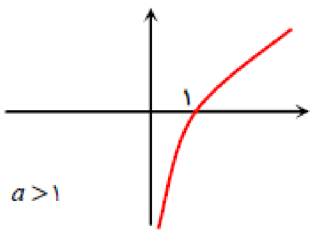
مثال. با استفاده از نمودار تابع $y = (\frac{۱}{۲})^x$، نمودار تابع $y = \log_{۰/۵} x$ را رسم کنید.



حل) چون تابع $\mathrm{y} = \log_{./۵} x$ معکوس تابع نمایی $\mathrm{y} = (\frac{۱}{۲})^x$ است، کافی است نمودار این تابع را رسم کرده و سپس قرینهٔ آن را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم (یعنی خط $\mathrm{y} = \mathrm{x}$) رسم کنیم :

نکته. با توجه به مثال بالا و در کل، ارتباط بین نمودار یک تابع و نمودار معکوس آن، نمودار تابع لگاریتمی $\mathrm{y} = \log_a x$ به توجه به پایهٔ آن همواره به یکی از دو صورت زیر است :





توجه داشته باشید که نمودار تابع لگاریتمی $\mathrm{y} = \log_a x$ همواره از نقطهٔ $(۱, ۰)$ عبور می‌کند.

مثال. نمودار هر یک از توابع زیر را توسط انتقال نمودارها رسم کنید.

الف) $\mathrm{y} = \log_۳ x - ۲$

ب) $\mathrm{y} = \log_۳(x - ۲)$

پ) $\mathrm{y} = ۲ - \log_{./۲}(x + ۳)$

نمادهای استاندارد:

الف) اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، به آن لگاریتم اعشاری گویند و معمولا برای راحتی از نوشتن مبنای ۱۰ خود داری میشود : $\log x = \log_{۱۰} x$

ب) اگر مبنای لگاریتم عدد شناخته شدهٔ $\mathrm{e} \approx ۲/۷۱۸$ باشد، به آن لگاریتم طبیعی گویند و آن را با ln نشان میدهند : $ln\ \mathrm{x} = \log_e x$

تذکر. لگاریتم عدد ۱ در هر مبنایی برابر صفر است : $\log_a ۱ = ۰$

مثال. حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

۱) $\log_۳ ۸۱ =$

۲) $\log_۲ \frac{۱}{۸} =$

۳) $\log_{۱۰} ۱۰۰۰ =$

۴) $\log ۱۰۰ =$

۵) $\log_۸ \sqrt[۵]{۶۴} =$

۶) $\log_۵ ۱۲۵^{\frac{۱}{۲}} =$

پرسش. اگر $f(x) = ۳ - ۲\log_۲(\frac{x}{۲} - ۵)$ ، مقدار $f(۴۲)$ را بدست آورید.

پرسش. از رابطهٔ زیر مقدار t را بیابید.

$\log_{۶۴} ۲۵۶ = ۱ - ۲t$

ویژگی‌های لگاریتم :

اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$ همواره داریم :

۱) $\log_a ۱ = ۰$ ۲) $\log_a a = ۱$ ۳) $\log_a(\frac{۱}{a}) = -۱$

۴) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

۵) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

۶) $\log_a x^n = n\log_a x$

۷) $\log_{a^n} x = \frac{۱}{n}\log_a x$

۸) $\log_{a^n} x^m = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a x$

۹) $\log_a \frac{۱}{x} = \log_{\frac{۱}{a}} x = -\log_a x$

۱۰) $\log_a a^x = x$ ۱۱) $a^{\log_a x} = x$

۱۲) $\log_c b \times \log_a c = \log_a b$

۱۳) $\log_a b = \frac{۱}{\log_b a}$

مثال. با استفاده از قوانین لگاریتمی، حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

۱) $\log_۲ \sqrt[۳]{۳۲} =$

۲) $\log_۷ \sqrt[۴]{۴۹} + \log_۲ \sqrt[۵]{۱۶} =$

۳) $۵\log_۳ \sqrt[۵]{۸۱} - ۲\log_۷ \frac{۱}{۴۹} + ۳\log ۰/۰۰۱$

۴) $\log \sqrt{۱۰۰۰} =$

۵) $\log ۵ + \log ۲۰ =$

۶) $(\log_۲ \sqrt[۵]{۸}) \log_۳ \sqrt[۳]{۹} =$

۷) $۲\log_۵ \sqrt{۱۲۵} - \log_{\sqrt{۲}} ۸ + ۵^{۱+\log_۵ ۶} =$

۸) $\log_۵ \sqrt[۵]{۱۲۵} + \log_{\frac{۱}{۴}} \sqrt[۵]{۴} - \log_۳ \frac{۱}{۳} =$

۹) $\log_۲ \log_۵ ۲۵ =$

تذکر. یکی از کاربردهای مهم ویژگی‌های ذکر شده، محاسبهٔ لگاریتم اعداد مختلف است. برای این منظور، معمولا مراحل زیر انجام می‌شود :

۱) پایهٔ عدد یا عددهای داده شده را تجزیه می‌کنید.

۲) با استفاده از خواص اعداد توان‌دار، آن را به صورت ضرب یا تقسیم اعداد توانی بنویسید.

۳) خواص لگاریتم را در مورد آن بکار ببرید.

۴) مقادیر داده شده را جایگزین کنید تا عدد خواسته شده بدست آید.

پرسش. فرض کنید $\log ۲ = m$ و $\log ۳ = n$. توسط آن $\log ۶۰۰$ را برحسب m و n بیان کنید.

پرسش. مقدار عددی $\log_{\frac{۱}{۳۲}} ۳۲ + \log_{۳\sqrt[۳]{۳}} \sqrt{۲۷}$ را تعیین کنید.

پرسش. اگر $\log_b a = m$ باشد، $\log_{\sqrt[۳]{b}} a^۵ b$ را برحسب m بیان کنید.

پرسش. اگر $\log ۲ \approx ۰/۳$ و $\log ۳ \approx ۰/۵$ باشد، حاصل $\log ۶۰$ را بدست آورید.

پرسش. اگر لگاریتم عدد $۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}$ در مبنای ۸ برابر A باشد، آنگاه لگاریتم عدد $(۱ - \frac{۱}{A})$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) ۳- ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پرسش. اگر $۳^a = A$ باشد، آنگاه $\log_۳ ۹A^۲$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) $۲ + ۲a$ ۲) $۳ + ۲a$ ۳) $۲ + a^۲$ ۴) $۳ + a^۲$

پرسش. اگر $\log ۲ = k$ باشد، حاصل $\log (۶ - ۲\sqrt{۵}) + ۲\log (۱ + \sqrt{۵})$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) $۲k$ ۲) $۴k$ ۳) $۱ + k$ ۴) $۲ + ۲k$

پرسش. اگر $۴^a = ۲\sqrt{۲}$، لگاریتم $(۱ + ۴a)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟ (تجربی ۸۸)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پرسش. اگر لگاریتم a در پایهٔ $\sqrt{۳}$ برابر $\frac{۴}{۳}$ باشد، آنگاه لگاریتم $(a^{۳} + ۷)$ در پایهٔ ۸ کدام است؟ (تجربی ۸۷)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

معادلهٔ لگاریتمی :

در بخش اول دیدیم که نمودار تابع لگاریتمی یا صعودی $(a > ۱)$ و یا نزولی (برای $۰ < a < ۱$) اسـت. در نتیجه این تابع یک به یک است. بنابراین خاصیت مهم زیر در مورد لگاریتم همواره برقرار است :

$$\log_a \mathrm{P} = \log_a Q \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P} = \mathrm{Q}$$

نکته. در حل معادلات لگاریتمی چنین عمل می‌کنیم :

الف) با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، طرفین تساوی را به دو لگاریتم بدون ضریب تبدیل می‌کنیم.

ب) با استفاده از مطلب بالا، لگاریتم‌ها حذف می‌شوند.

پ) جواب‌های بدست آمده را در معادله جای x قرار می‌دهیم. شرط قابل قبول بـودن یـک جـواب ایـن است که : جلوی هیچ لگاریتمی عدد منفی قرار نگیرد .

مثال. معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_{۵} x = ۳$

۲) $\log_{۳}(x - ۱) = ۴$

۳) $\log_{۴}(x + ۲) = \log_{۴} ۸$

۴) $۳\log_{۲} x = -\log_{۲} ۲۷$

۵) $\log_{۳}(x^{۲} - ۱۵) = \log_{۳} ۲x$

پرسش. حاصل معادلات لگاریتمی زیر را بدست آورید.

۱) $\log(x+۲) - \log(x-۲) = \log ۵$

۲) $\log(۲x-۱) + \frac{۱}{۲}\log x^{۲} = \log ۳$

۳) $\log_{۵}(x+۲) + \log_{۵}(x-۲) = \log_{۵} ۳۲$

۴) $\log_{۸}(x-۱) + \log_{۸}(x+۱) = ۱$

۵) $\log x = \log\sqrt{۲} + \frac{۱}{۲}\log\frac{۲}{۲۵}$

۶) $\log_{۳}(۵x-۲) = ۱ + \log_{\sqrt{۳}} x$

۷) $\log_{۲} x + \log_{۲}(x+۱) = ۲$

۸) $۲\log_{۷} x = \log_{۷} ۸۱$

۹) $\log_{۵} x + \log_{۵}(x+۱) = ۲\log_{۵} ۲ + ۱$

۱۰) $\log(۳x+۱) = \log ۵ + ۳\log ۲$

۱۱) $\log_{۴}\frac{۲}{x-۱} - \log_{۲}\sqrt{۴-x} = ۰$

۱۲) $\log_{\frac{۱}{۵}}(\log\sqrt{۵x}) = ۰$

۱۳) $\log_{۹۹}(۲x-۱) + \log_{۹۹}(۲x+۱) = ۱$

۱۴) $\log_{۳}(x+۱) + \log_{۳}(x^{۲}-x+۱) = ۲$

۱۵) $۴\log\frac{x}{۲} + ۳\log\frac{x}{۳} = ۵\log x - \log ۲۷$

۱۶) $\log_{۲}[۱ + \log_{۳}(۲x+۱)] = ۲$

۱۷) $\log x = \log(x+۳) + \log(x-۳) - ۳\log ۲$

۱۸) $\log(x^{۲}-۷) = ۲\log(x+۳)$

۱۹) $x^{۱-\log x} = ۰/۰۱$

۲۰) $\sqrt{\log_{x}\sqrt{x}} = ۱۰$

پرسش. اگر $\log_{۵}(۲x-۱)+\log_{۵}(۳x-۱)=۱$ باشد، آنگاه مقدار $\log_{۲}(۶x+۳)$ را محاسبه کنید.

پرسش. اگر $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\log_{۲}x+\log_{۲}y=۲$ باشند، مقدار $\log_{۷}x^{۲}+y^{۲}-۷$ را بدست آورید.

پرسش. اگر b, a ریشه‌های معادله $x^{۲}-۱۰x+۰/۱=۰$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log(a+b)$ کدام است؟ (تجربی ۸۸ خارج)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۱

پرسش. از معادله $\log_{۳}(x^{۲}-۱)=۱+\log_{۳}(x+۳)$ ، مقدار لگاریتم $(x-۳)$ در مبنای ۴ کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱-

پرسش. از دو معادله $\log_{۳}x+\log_{۳}y=۲$ و $x^{۲}+y^{۲}=۴۶$ ، لگاریتم $(x+y)$ در پایهٔ ۴ کدام است؟

(تجربی ۸۹) ۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پرسش. اگر $\log ۲=k$ باشد، حاصل $\log(۶-۲\sqrt{۵})+۲\log(۱+\sqrt{۵})$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) $۲k$ ۲) $۴k$ ۳) $۱+k$ ۴) $۲+۲k$

پرسش. نمودارهای دو تابع $f(x)=\log_{۲}\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}x$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ (تجربی ۹۱ خارج)

۱) $f(x)$ بالاتر ۲) $g(x)$ بالاتر ۳) منطبق اند ۴) متقاطع اند

پرســش. از دو معادلـه $۴^x + ۲^x = ۷۲$ و $\log (x + ۱) + \log (۲y + x^۲) = ۲$ ، مقـدار y را بیابیـد.

(تجربی ۹۲ خارج) ۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پرسش. از تساوی $\log_x(۳x + ۸) = ۲ - \log_x(x - ۶)$ ، مقدار لگـاریتم x در پایـهٔ ۴ کـدام اسـت؟

(تجربی ۹۳ خارج) ۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی :

الف) مقیاس ریشتر، مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شـده آن زلزلـه برابـر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$\text{Log } E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$$

مثال. در سال ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم استان کرمان را لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله مصیبت بار چقدر بوده است؟

پرسش. در سال ۱۳۶۹ زلزله‌ای به بزرگی ۷/۴ ریشتر در رودبار و منجیل رخ داده است. مقـدار انـرژی ایـن زلزله مرگبار را محاسبه کنید.

ب) یکی از کاربردهای مفهوم لگاریتم در شیمی، محاسبهٔ PH یک محلول است. PH، معیاری از میـزان اسیدی، بازی (قلیایی) یا خنثی بودن یک محلول است و از رابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$PH = -\log_{۱۰}[H^+]$$

که $[H^+]$ غلظت یون هیدرونیوم را بر حسب واحد $mol/_{lit}$ نشان می‌دهد.