

تابع

فصل
۳

آشنایی با برخی از انواع توابع

درس اول

آشنایی با برخی از ویژگی‌های توابع

درس دوم

اعمال جبری روی توابع

درس سوم

تابع

تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب می‌باشد که هیچ دو زوجی از آن دارای مولفه‌های اول یکسان نیستند. اگر مولفه‌های اول برابر باشند، مولفه دوم نیز برابر باشند. به عبارت دیگر، اگر f تابع باشد آنگاه:

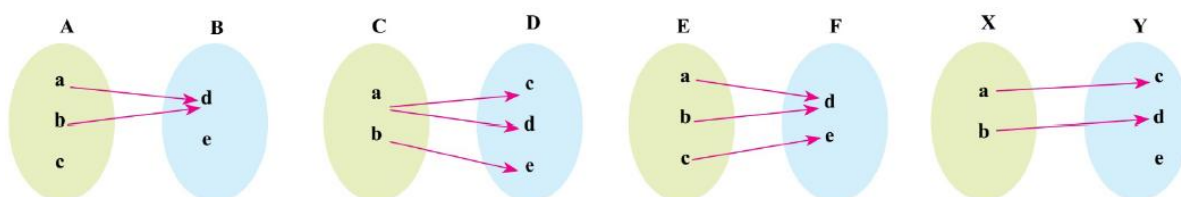
$$\begin{cases} (x, y) \in f \\ (x, z) \in f \end{cases} \Rightarrow y = z$$

نکته. رابطه‌ی $y = f(x)$ وقتی ضابطه‌ی یک تابع است که به ازای هر عددی که به x بدهیم حداکثر یک جواب برای y بدست آید.

نکته. یک رابطه چند ضابطه‌ای در صورتی تابع است که دامنه‌های آن عضو مشترک نداشته باشند یا اینکه در صورت جود عضو مشترک، y آنها نیز برابر باشند.

نکته. یک نمودار وقتی تابع است که هر خطی موازی محور y ها آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال. از نمودارهای ون زیر کدام تابع است و کدام نیست؟



مثال. رابطه $f = \{(2, 4), (3, -1), (5, -1), (2, a^2 + 3a)\}$ معرف تابع است. مقدار a را بدست آورید.

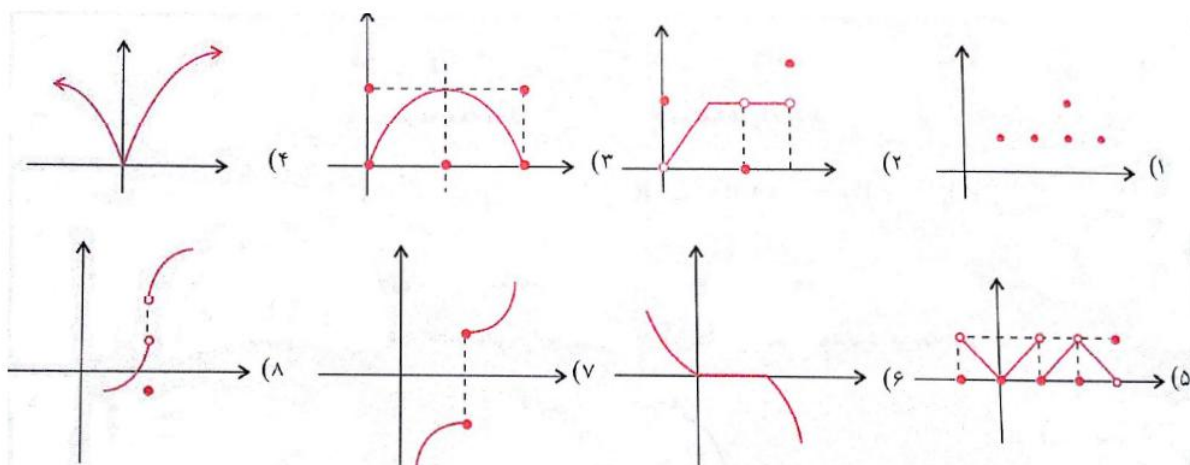
پرسش. مقادیر a و b را طوری پیدا کنید تا رابطه f زیر تابع باشد.

$$f = \{(a^r + a, 1), (0, b + 4), (1, a^r + 2b), (0, a^r + b), (\frac{r-a}{4}, a - b)\}$$

پرسش. اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟ (تجربی ۸۸ خارج)

(۱) تعریف نشده (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

مثال. کدام نمودار تابع است؟



مثال. مشخص کنید کدام یک از رابطه‌های زیر میتواند ضابطه یک تابع باشند؟

(۱) $x + y = 1$

(۲) $y = |x| + 3$

(۳) $|x| + |y| = 1$

(۴) $|x - 1| + |y - 4| = 0$

(۵) $x^2 + y^2 - 2x = -1$

$$xy = 5 \quad (۶)$$

$$x(x + y) = 0 \quad (۷)$$

$$xy = 0 \quad (۸)$$

$$x = \sin y \quad (۹)$$

$$y = \sqrt{x-1} \pm \sqrt{1-x} \quad (۱۰)$$

$$y = \sqrt{x} \pm \sqrt{x+1} \quad (۱۱)$$

$$y = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 0 \\ |x| - 1 & x < 0 \end{cases} \quad (۱۲)$$

$$y = \begin{cases} 1 \cdot x + 2 & x > 2 \\ 5x + 1 & x < 3 \end{cases} \quad (۱۳)$$

$$y = \begin{cases} 2x + 5 & x \geq 0 \\ |2x| + 4 & x \leq 0 \end{cases} \quad (۱۴)$$

$$y^2 + y - xy - x = 0 \quad (۱۵)$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (۱۶)$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0 \quad (۱۷)$$

دامنه و برد تابع :

(۱) اگر تابع به صورت مجموعه‌هایی از زوج‌های مرتب نوشته شده باشد، به مجموعه تمام مولفه‌های اول

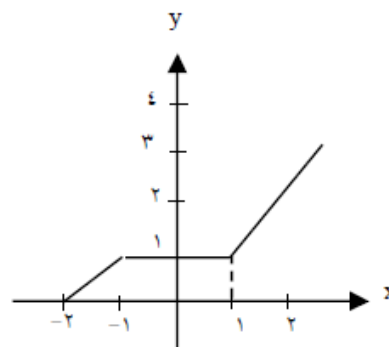
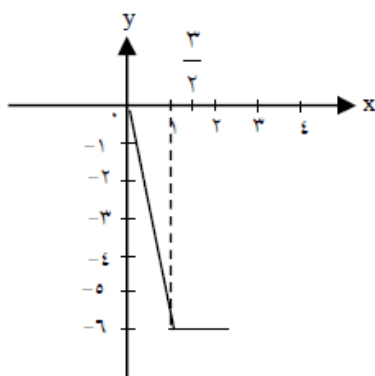
دامنه تابع و به مجموعه تمام مولفه‌های دوم، برد تابع گفته میشود.

مثال. اگر $f = \left\{ (2, -1), (\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}), (\pi, \frac{1}{\pi}), (\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}) \right\}$ ، دامنه و برد تابع را بیابید.

(۲) اگر نمودار تابع را داشته باشیم، به تصویر تمام نقاط روی محور x ها را دامنه تابع و به تصویر همه

نقاط نمودار روی محور y ها برد تابع گویند.

مثال. دامنه و برد توابع زیر را بنویسید.



اگر (۳)

ضابطه تابع f را داشته باشیم، به مجموعه اعدادی که

میتوان بجای x جایگزاری کرد تا y یا $f(x)$ با معنی گردد، دامنه گفته میشود. و به جواب‌های

حاصل از اعضای دامنه آن تابع، برد تابع گویند.

تذکره: دامنه تابع قبل از ساده کردن محاسبه می‌گردد. همچنین برد یک تابع با توجه به دامنه آن بررسی

میشود.

$$۱) f(x) = a_n + x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a. \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

اگر n فرد باشد، برد تابع \mathbb{R} میشود.

$$۲) f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$۳) f(x) = \sqrt{g(x)} \Rightarrow D_f = \{x / g(x) \geq 0\}$$

$$۴) f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ (چند جمله‌ای } q(x), p(x) \text{)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x / g(x) = 0\}$$

$$۵) f(x) = g(x) \pm h(x) \pm \dots \Rightarrow D_f = D_g \cap D_h \cap \dots$$

$$۶) f(x) = |g(x)| \Rightarrow D_f = D_g$$

مثال. دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

$$۱) f(x) = -2x^5 + 7x^3 + 2x + 6$$

$$۲) f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-6x+8} \quad (۳)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^2-1} \quad (۴)$$

$$y = \sqrt[4]{\frac{2}{x^2-1}} \quad (۵)$$

$$y = \sqrt{x-3} \quad (۶)$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2-x+2} \quad (۷)$$

$$y = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} \quad (۸)$$

$$y = \sqrt{-(|x|+1)} \quad (۹)$$

$$y = x^x + x^x + 5 + \sqrt{-x^x} \quad (۱۰)$$

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (۱۱)$$

$$y = \frac{x^x-9}{x+3} \quad (۱۲)$$

$$y = x^x - 10 \quad (۱۳)$$

پرسش. دامنه توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x^x - 5x} \quad (۱)$$

$$y = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} \quad (۲)$$

$$y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \quad (۳)$$

$$y = \left| \frac{x+5}{x^x-x} \right| \quad (۴)$$

$$y = \sqrt{16 - x^x} \quad (۵)$$

$$y = \sqrt{2 - \sqrt{x-1}} \quad (۶)$$

$$y = \frac{\sqrt{4x-x^x}}{|x|-x} \quad (۷)$$

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}} \quad (۸)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{|x|-x} \quad (۹)$$

$$y = \frac{1}{x-|x|} \quad (۱۰)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} \quad (۱۱)$$

نکته. اگر تابع f بصورت چند ضابطه‌ای باشد،

$$f(x) = \begin{cases} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{cases} \Rightarrow D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2} \cup \dots \cup D_{f_n}$$

نکته. اگر دامنه $y = f(x)$ بصورت $[a, b]$ باشد، آنگاه برای بدست آوردن دامنه $y = f(u)$ ، کافی است قرار

$$\text{دهیم: } a \leq u \leq b.$$

مثال. دامنه توابع زیر را بدست آورید.

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} & x < 1 \\ 3x + 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$y = \begin{cases} x^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} & x > 2 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$y = \begin{cases} |x| & x \leq 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{پ})$$

مثال. اگر دامنه تعریف تابع f برابر با $[0, 1]$ باشد، دامنه تعریف $y = f(2x + 3)$ را بیابید.

پرسش. اگر $D_f = [2, 4]$ و $D_g = [1, 2]$ ، دامنه تابع $g\left(\frac{x}{2}\right) + 2f(2x)$ کدام است؟

$$(1) \quad \{2\} \quad (2) \quad [1, 2] \quad (3) \quad [1, 3] \quad (4) \quad [1, 4]$$

تساوی دو تابع :

دو تابع f و g را مساوی گویند هرگاه :

$$D_f = D_g \quad (\text{الف})$$

(ب) برای هر x در دامنه f و g داشته باشیم $f(x) = g(x)$.

مثال. آیا توابع زیر باهم مساوی اند؟

$$(1) \quad f(x) = 1, \quad g(x) = \frac{x}{x}$$

$$(2) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 25 & x \neq 5 \\ x - 5 & x = 5 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = x + 5 \quad (\text{خرداد ۹۵})$$

$$(3) \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{-x^2} \\ g(x) = \{(., .)\} \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x} \\ g(x) = \sqrt{x^2 - 2x} \end{cases}$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1+x^2}} \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 \quad (\text{دی ۹۰ حسابان})$$

$$(6) \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \end{cases} \quad (\text{خرداد ۹۴ حسابان})$$

$$(7) \quad \begin{cases} f(x) = |x| - 5 \\ g(x) = \frac{x^2 - 25}{|x| + 5} \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} f(x) = 3 \\ g(x) = \frac{3x^2 + 6}{x^2 + 2} \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} \\ g(x) = \sin x \end{cases}$$

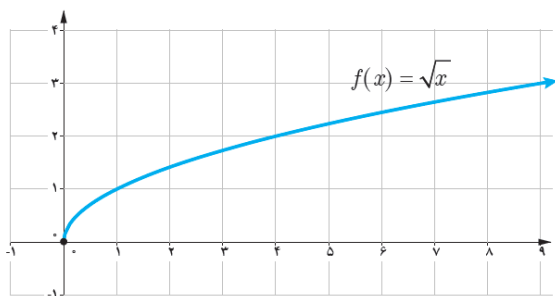
پرسش. اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1} & x \neq -\frac{1}{2} \\ 1 - k & x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ باشند، k را طوری بیابید که به ازای هر

x متعلق به دامنه، $f(x) = g(x)$ باشد.

پرسش. اگر دو تابع $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & x \neq a \\ b & x = a \end{cases}$ باهم برابر باشند، $a + b$ کدام

است؟ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) -۳

نمودار توابع رادیکالی :



نمودار تابع رادیکالی $f(x) = \sqrt{x}$ به صورت زیر است :

مثال. با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر را بیابید؛ و

سپس دامنه هر یک را تعیین کنید.

$$c(x) = \sqrt{x - 1} - 3$$

$$b(x) = \sqrt{x + 2}$$

$$a(x) = \sqrt{x} + 2$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x} + 2$$

$$e(x) = 3 - \sqrt{x + 1}$$

$$d(x) = -\sqrt{x + 2} - 1$$

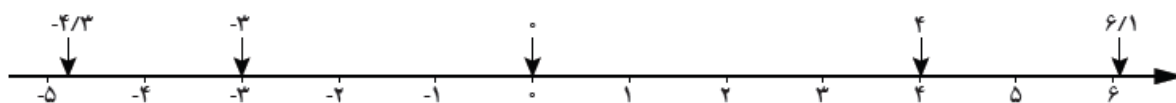
تابع جزء صحیح :

در تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح خود همان عدد صحیح را نسبت میدهند و به هر عدد غیر صحیح،

بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از آن عدد را نسبت میدهند. این تابع به صورت $f(x) = [x]$ نشان داده

میشود. مانند :

$$[0] = 0, [6/1] = 6, [4] = 4, [-3] = -3, [-4/3] = -5$$



مثال. طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $[\sqrt{18}] =$ ب) $[1 - \sqrt{2}] =$ پ) $[\sin 75^\circ] =$

ت) $[(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{100}] =$ ث) $\left[\frac{a^2}{1+a^2}\right] =$

پرسش. اگر $f(x) = [x + 3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(2 - \sqrt{2})$ برابر است. (خرداد ۹۳)پرسش. اگر $a = 1 - \sqrt{2}$ ، حاصل عبارت $[\sqrt{(a-2)^2}]$ را بیابید. (خرداد ۹۰ خارج)نکته. هر عدد مانند x به صورت $x = [x] + p$ است که در آن $0 \leq p < 1$.

$$\text{مانند: } \begin{cases} 6.25 = 6 + 0.25 \\ -6.25 = -7 + 0.75 \end{cases} \text{ لذا:}$$

$$[x] = n \Rightarrow n \leq x < n + 1$$

تذکر. $[x + k] = [x] + k$ که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x + 1] = 5$

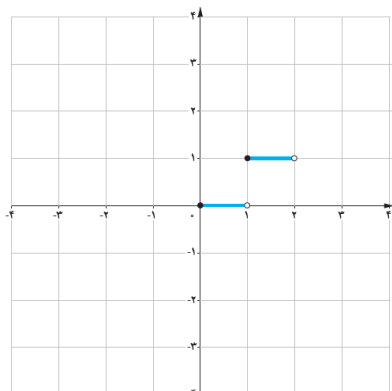
ب) $[x] + [x + \frac{1}{2}] = \frac{5}{3}$

پ) $[2(x + 3)] = -1$

پرسش. حاصل $[x] + [-x]$ به ازای $x = \frac{\sqrt{80}}{9}$ چقدر است؟

پرسش. حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + \dots + [x^{50}]$ به ازای $x = -\frac{1}{4}$ چقدر است؟

نمودار تابع جزء صحیح :



مثال. نمودار تابع $y = [x]$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

نکته. نمودار تابع $y = [nx]$ ، یک نمودار پلکانی شکل است. اگر $n > 0$ باشد، پلکان صعودی و اگر $n < 0$

باشد پلکان نزولی است. طول پله‌ها $|\frac{1}{n}|$ واحد و ارتفاع پله‌ها، ۱ واحد است.

مثال. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = [-\frac{x}{4}]$

ب) $y = [2x]$

پرسش. نمودار تابع $y = 2[\frac{x}{4}] + 1$; $x \in [-2, 6]$ از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

سؤال. تابع بالا در $(-3, 5)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟

پرسش. نمودار توابع زیر را در $[-1, 1]$ رسم کنید.

الف) $y = x + [x]$

ب) $y = x - [x]$

پرسش. نمودار تابع $y = x - [x]$; $x \in [-2, 3]$ از n پاره خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است.

دوتایی مرتب (n, L) کدام است؟

(۱) $(4, 1)$ (۲) $(4, \sqrt{2})$ (۳) $(5, 2)$ (۴) $(5, \sqrt{2})$

رسم نمودار $y = [f(x)]$ به روش دوم :

ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم میکنیم. سپس خطهای افقی $y = k$ ($k \in \mathbb{Z}$) را یک واحد - یک واحد

رسم کرده و محل تلاقی آنها را با تابع f ، توپر می‌نمائیم. بعد از آن قسمت‌هایی از منحنی f که بین دو خط

افقی $y = k$ و $y = k + 1$ قرار دارند را روی خط پایینی ($y = k$) تصویر می‌کنیم.

مثال. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = [-x]$

ب) $y = [x^2]$

پرسش. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x] \geq 2$

ب) $[x] < 2$

پرسش. اگر $||x - 1|| \leq 1$ ، حدود مقادیر x کدام است؟

(۱) $-1 < x < 3$

$$(۲) \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$(۳) \quad -1 \leq x < 1$$

$$(۴) \quad -1 \leq x < 2$$

نکات :

$$۱) \quad 0 \leq x - [x] < 1$$

$$۲) \quad [-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$۳) \quad [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$۴) \quad n \in \mathbb{Z} : \left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ زوج} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

مثال. نمودار تابع $y = [x] + [-x]$ را رسم کنید.

پرسش. دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف) } y = \frac{1}{[x]-2}$$

$$\text{ب) } y = \sqrt{[x] + 3}$$

$$\text{پ) } y = \frac{1}{x-[x]}$$

$$\text{ت) } y = \frac{1}{\sqrt{[x]+[-x]}}$$

$$\text{ث) } y = \sqrt{[x] - [x^2]}$$

پرسش. آیا دو تابع $f(x) = \left[\frac{x^2}{x^2+1} \right]$ و $g(x) = 0$ باهم مساوی‌اند؟ چرا؟

پرسش. اگر $f(x) = x - [x]$ آنگاه برد تابع $g(x) = f(2x - 3) - 2f(x)$ کدام می‌باشد؟ (۹۲ خارج)

- (۱) $[-1, 0]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $\{-1, 0\}$ (۴) $\{0, 1\}$

تابع یک به یک :

۱- اگر تابع بصورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب باشد در صورتی یک به یک است که هیچ دو زوج

مرتب متمایز با مولفه‌های دوم یکسان در آن یافت نشود.

مثال. اگر تابع $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (m, a)\}$ یک به یک باشد، a را بدست آورید.

پرسش. به ازای کدام مجموعه مقادیر برای a ، رابطه‌ی $R = \{(4, -3), (4, a^2 - 4a), (a + 1, -3a)\}$

یک تابع یک به یک است؟

- (۱) $\{1, 3\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{3\}$ (۴) \emptyset

۲- تابع یک به یک از لحاظ نمودار ون : تابعی که بین دو مجموعه تعریف میشود در صورتی یک به

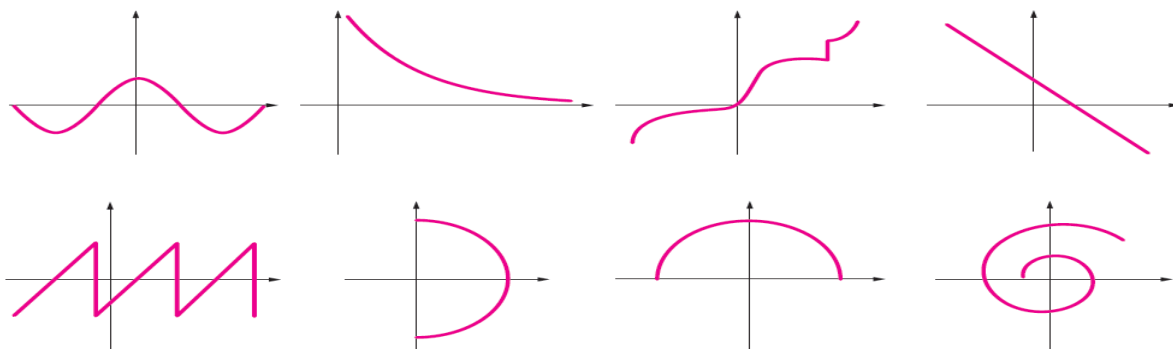
یک است که به هر عضو مجموعه دوم فقط یک پیکان وارد شود.



۳- اگر نمودار تابع را داشته باشیم در صورتی نمایش یک تابع یک به یک است که هر خط موازی با

محور آنها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال. کدام نمودار داده شده، یک تابع یک به یک را مشخص میکند؟



پرسش. با رسم شکل نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ تابعی یک به یک است.

۴- تابع f با ضابطه $y = f(x)$ را یک به یک گویند هرگاه به ازای x_1 و x_2 از دامنه f داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال. نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند.

الف)
$$\begin{cases} f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 8x^3 + 6 \end{cases}$$

مثال. ثابت کنید توابع زیر یک به یک نیستند.

الف)
$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 - 2x \end{cases}$$

پرسش. یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $y = x + ۲$	ب) $y = x^۲$	پ) $y = x^۳$	ت) $y = x - x $
ث) $y = x - \sqrt[۳]{x}$	ج) $y = x + x $	چ) $y = \frac{x^۲ - x}{x^۲ + ۱}$	ح) $y = ۲x + x $
خ) $y = \frac{ x - ۲}{ x + ۲}$	د) $y = ۳x + ۵$		

نکته. تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in D_۱ \\ h(x) & x \in D_۲ \end{cases}$ در صورتی یک به یک است که :

اولا : g در $D_۱$ و h در $D_۲$ یک به یک باشد.

ثانیا : برد g و h باهم اشتراک نداشته باشند.

مثال. ثابت کنید تابع حقیقی مقابل یک به یک است.

$$f(x) = \begin{cases} -۳x + ۶ & x < ۲ \\ -۲x & x \geq ۲ \end{cases}$$

پرسش. آیا تابع $f(x) = [x]$ یک به یک است ؟

پرسش. کدام تابع یک به یک است ؟

$$۱) f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x > ۰ \\ ۱ - x & x < ۰ \end{cases}$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} x - ۲ & x \geq ۰ \\ x + ۲ & x < ۰ \end{cases}$$

$$۳) f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$$

$$۴) f(x) = \begin{cases} x^۳ & x \geq ۰ \\ -x^۳ & x < ۰ \end{cases}$$

پرسش. کمترین مقدار طبیعی a برای آنکه $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \leq 2 \\ x + 2a & x > 2 \end{cases}$ یک به یک باشد چقدر است؟

پرسش. الف) با رسم نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 4x + 3$ نشان دهید که این تابع یک به یک نیست.

ب) با محدود کردن دامنه این تابع روی چه بازه‌ای میتوان یک تابع یک به یک ساخت؟

تابع معکوس :

تابع وارون پذیر : اگر وارون (معکوس) تابعی مانند f ، خود نیز تابع باشد، آن را تابع وارون f می‌نامیم. در

این صورت f را وارون پذیر (معکوس پذیر) می‌نامند. تابع وارون f را با f^{-1} نمایش میدهند.

مثال. کدام یک از توابع $f = \{(0, 1), (1, 2)\}$ و $g = \{(-1, 1), (2, 1)\}$ وارون پذیر هستند؟

تذکر. تابع f در صورتی معکوس پذیر است که یک به یک باشد.

مثال. ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وارون پذیر است و ضابطه وارون آن را بدست آورید.

نکته. برای پیدا کردن ضابطه تابع معکوس (در صورت معکوس پذیری)، ابتدا جای x و y را عوض میکنیم.

سپس y را بر حسب x محاسبه میکنیم. تابع جدید بدست آمده، معکوس تابع قبل خواهد بود.

مثال. ضابطه تابع معکوس توابع زیر را بیابید.

الف) $y = x^2 - 5$

ب) $y = x^3 + 7$

$$\text{ج) } y = \frac{2x-1}{2+x}$$

$$\text{د) } f(x) = x^2 - 6x^2 + 12x$$

نکته. برای تعیین ضابطه معکوس تابع چند ضابطه‌ای :

الف) باید اشتراک بردها تهی باشد.

ب) هر یک از ضابطه‌ها یک به یک باشد.

با این شرایط در هر یک از ضابطه‌ها جای x و y را عوض کرده (جای دامنه و برد عوض میشود). به این

ترتیب ضابطه تابع معکوس مشخص خواهد شد.

مثال. ضابطه معکوس تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

نکات :

۱) اگر $A(a, b) \in f$ باشد آنگاه $A'(b, a) \in f^{-1}$ است و نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$

(نیمساز ناحیه اول و سوم) قرینه یکدیگرند.

۲) اگر نقطه $A(\alpha, \beta) \in f$ و f^{-1} باشد، نقطه $A'(\beta, \alpha)$ نیز حتماً نقطه تلاقی f و f^{-1}

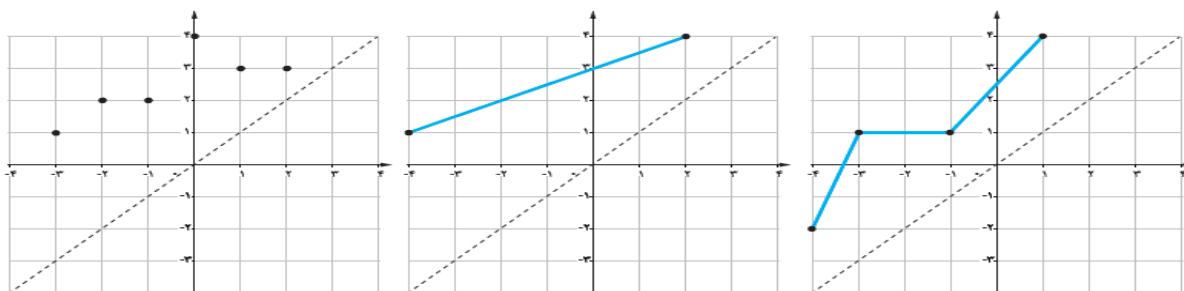
است.

۳) نقاط برخورد تابع f و خط $y = x$ ، نقاط برخورد f^{-1} و $y = x$ نیز هستند.

مثال. تابع معکوس $f(x) = x^2 + x - 1$ از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

۱) $(1, 0)$ ۲) $(0, -1)$ ۳) $(-1, 0)$ ۴) $(-1, 1)$

پرسش. در هر یک از شکل‌های زیر، نمودار تابعی رسم شده است. در این شکل‌ها وارون آن تابع را رسم کنید.



پرسش. نمودار وارون تابع $y = mx + 2$ از نقطه $(-6, 2)$ می‌گذرد. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

پرسش. با توجه با جدول زیر، اگر ضابطه معکوس رابطه بین x و y را به صورت $f^{-1}(x) = ax + b$ در

آوردیم. مقدار $a + 2b$ کدام است؟

x	۱	۲	۳	۵
$f(x)$	۴	۷	۱۰	۱۶

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

پرسش. در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ ، $f^{-1}(2)$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۵ (۳) -۲ (۴) تعریف نشده

پرسش. اگر تابع $f(x) = x^y + x + 1$ و f^{-1} فقط در نقطه مانند A همدیگر را قطع کنند، فاصله A از

مبدأ مختصات چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{3}$

پرسش. تابع معکوس تابع $y = x^3 + x + 1$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

(۱) $(-۶, -۲)$ (۲) $(-۱, -۱)$ (۳) $(۳, ۰)$ (۴) $(۱, -۱)$

پرسش. تابع وارون $y = \frac{2x-1}{x-2}$ ، کدام تابع است؟

(۱) $y = \frac{x-2}{2x+1}$ (۲) $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (۳) $\frac{2x-1}{x+2}$ (۴) $y = \frac{x+2}{2x+1}$

پرسش. اگر تابع معکوس $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}$ از نقطه $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$ بگذرد، a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پرسش. ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

(۱) $y = \frac{x}{1-|x|}; |x| < 1$ (۲) $y = \frac{1-|x|}{1+|x|}; |x| \geq 1$

(۳) $y = \frac{x}{|x|-1}; |x| \geq 1$ (۴) $y = \frac{|x|-1}{x}; |x| < 1$

پرسش. ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

(۱) $y = x^2 - 4x + 5; x \leq 2$ (۲) $y = -x^2 - 4x + 5; x \leq 2$

(۳) $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$ (۴) $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$

پرسش. ضابطه وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟ (کنکور ۹۱ خارج)

(۱) $y = x/|x|; x \in \mathbb{R}$

(۲) $y = -x^2; x < 0$

(۳) $y = \pm x^2; x \in \mathbb{R}$

$$y = \pm x/x; x \in \mathbb{R} \quad (۴)$$

پرسش. اگر $f(x) = \frac{3x}{2+3x}$ ، آنگاه $f^{-1}(\frac{1}{3})$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۳

پرسش. اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

- (۱) $\tan x$ (۲) $\cot x$ (۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ (۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

پرسش. اگر دو خط به معادلات $ax + by = ۸$ و $2x - 3y = b$ ، نسبت به نیمساز ربع اول متقارن باشند،

$a + b$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳ خارج)

- (۱) ± ۳ (۲) ± ۲ (۳) $۲, -۳$ (۴) $-۲, ۳$

توابع یکنوا:

. تابع $f(x)$ را صعودی (افزایشی) نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ باشد، داشته

باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ و آن را صعودی اکید نامیم هرگاه $f(x_1) < f(x_2)$.

. تابع $f(x)$ را نزولی (کاهشی) نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ باشد، داشته باشیم

$f(x_1) > f(x_2)$ و آن را نزولی اکید نامیم هرگاه $f(x_1) < f(x_2)$.

. تابع $f(x)$ را ثابت نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه f داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2)$.

. به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گویند. همچنین به تابعی که اکیدا صعودی یا اکیدا

نزولی باشد، اکیدا یکنوا می‌گویند.

مثال. ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع، صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت

است را مشخص کنید. (شهریور ۹۲)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

پرسش. تابع $y = |x| + 1$ در چه بازه‌ای صعودی است؟ (دی ۹۴)

توابع زوج یا فرد:

برای تعیین زوج یا فرد بودن تابع، دو شرط زیر را بررسی می‌کنیم:

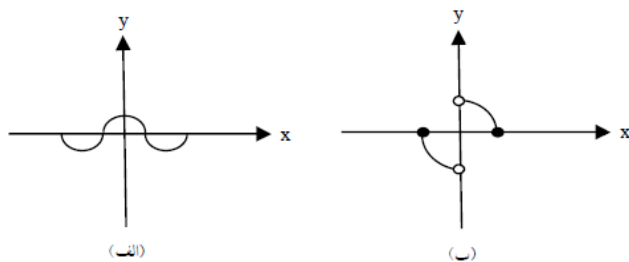
(۱) دامنه متقارن باشد.

(۲) $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم. اگر با $f(x)$ برابر شد، تابع زوج و اگر با $-f(x)$ برابر باشد، تابع فرد است و

در غیر این صورت تابع نه زوج و نه فرد است.

تذکر. توابع زوج نسبت به محور x ها و توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن‌اند.

مثال. زوج یا فرد بودن تابعی که نمودار آنها در زیر آمده است را مشخص کنید.



مثال. زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $3x^4 - x^2 + 7$

ب) $2x^5 - 3x$

پرسش. زوج یا فرد بودن توابع زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x) = x\sqrt{27 - 3x^2}$

$$۲) f(x) = x^r - \sin x$$

$$۳) f(x) = x^r + \cos x$$

$$۴) f(x) = \sqrt[r]{x}$$

$$۵) f(x) = |x| + \sin^r x$$

$$۶) f(x) = \frac{x^r - \cos x}{|x|}$$

۷) به ازای کدام مقدار a ، ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{ax} & x < 0 \end{cases}$ ضابطه یک تابع فرد است؟

(کنکور ۹۰)

(۱) -۴ (۲) ± 4 (۳) ۴ (۴) هیچ مقدار a

اعمال جبری روی توابع

دو تابع f و g با ضابطه‌های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ مفروض هستند. اعمال جبری روی این توابع به

صورت زیر می‌باشد:

$$۱) (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$۲) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \Rightarrow D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$۳) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

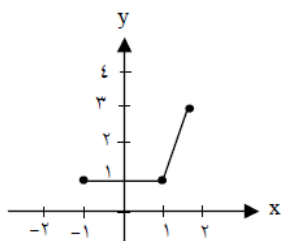
$$۴) (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow D_{\lambda f} = D_f$$

مثال. اگر $f(x) = x - 1$ و $g(x) = 4 - x^2$ ، مطلوبست تشکیل توابع $f + g$ و $f - 2g$ و $\frac{f}{g}$ و دامنه آنها.

مثال. اگر $f = \{(1, 3), (2, -1), (0, 3), (-1, 1)\}$ و $g = \{(0, 1), (-1, 1), (3, 3), (2, 5)\}$ باشند،

مطلوبست تشکیل $f + g$ ، $f - g$ ، $f \cdot g$ ، $\frac{g}{f}$ ، $\frac{f}{g+3f}$ و $5f$.

پرسش. نمودار تابع f داده شده است. نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف) $3f(x)$

ب) $\frac{5}{2}f(x)$

پ) $-2f(x)$

پرسش. اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشد، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

- ۱) $\mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$ ۲) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ ۳) $\mathbb{R} - \{-1\}$ ۴) $\mathbb{R} - \{0, 1, -1, 2\}$

پرسش. اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ و $g = \{(0, 1), (4, 0), (1, -1), (2, 3)\}$ باشند، تابع $\frac{f}{g}$ چند عضو

دارد؟

- ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

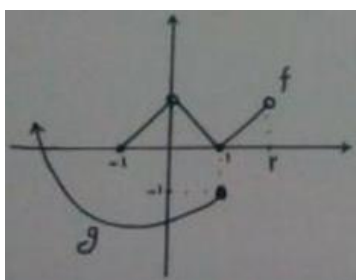
پرسش. اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g = \{(-3, 5), (-1, 4), (0, 7)\}$ ، آنگاه بیشترین مقدار تابع

$g - f$ کدام است؟

- ۱) ۳۲ ۲) ۶۴ ۳) ۸۴ ۴) ۴۲

پرسش. با توجه به نمودار توابع f و g ، دامنه $(\frac{f}{g})(x)$ شامل چند عدد

صحیح است؟ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشمار



پرسش. اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ باشد، ضابطه تابع $f(x) + 1 - 2f(x) - f(x^2)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{1-x^2}$

(۲) $\frac{2x}{x^2-1}$

(۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$

(۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

پرسش. اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ دامنه تابع $f(3-x)$ کدام است؟

(۱) $[0, 2]$

(۲) $[0, 3]$

(۳) $[1, 3]$

(۴) $[1, 2]$

پرسش. اگر $f(x) = [x]$ مجموعه مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟

(۱) $\{0\}$

(۲) $\{1\}$

(۳) $\{0, 1\}$

(۴) $\{-1, 0, 1\}$

پرسش. نمودار تابع $y = [x^2]$ روی بازه $(-2, 2) \in x$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

پرسش. اگر $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ مقدار $f(f(-1))$ کدام است؟

(۱) تعریف نشده (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

پرسش. در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x + 3 & x \leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(5)) + f(1)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

پرسش. اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، آنگاه $f(g(\sqrt{2}))$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

پرسش. در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ ، $f(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟

- (۱) $1/\sqrt{5}$ (۲) $2/25$ (۳) $2/5$ (۴) $2/\sqrt{5}$

پرسش. اگر $f(x) = |x| - x$ ، ضابطه تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

- (۱) x (۲) $|x|$ (۳) $x + |x|$ (۴) 0

پرسش. اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد، مقدار a

کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پرسش. اگر دامنه تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را به بازه $(-\infty, a)$ محدود کرده باشیم تا تابع وارون پذیر شود،

- حداکثر مقدار a کدام است؟ (۱) ۱ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) -۲