گروه آموزشی عصر

ASR_Group @ outlook.com

@ASRschool2

عنوان

جزوه آموزشی ریاضی پایه یازدهم
فصل هندسه تحلیلی و جبر

نگارش

عادل آخکندی

صفحه

فهرست

معذرت ....

معذرت میخوام فیثاغورس ... چرا که مادر من سخت ترین معادلات است !

معذرت میخوام نیوتن ... چرا که مادر من راز جاذبه است !

معذرت میخوام ادیسون ... چرا که مادر من اولین چراغ زندگی من است !

معذرت میخوام افلاطون ... چرا که این مادر من است که شهر فاضله قلب من است !

معذرت میخوام رومیو... چرا که همه راه ها به عشق مادر من ختم میشود !

معذرت میخوام ژولیت ... چرا که مادرم عشق من است !

درس اول

۱ هندسه تحلیلی

۱.۱ یادآوری و تکمیل معادله خط

سوال : جاهای خالی را تکمیل نمایید.

الف) می دانیم از هر دو نقطهٔ متمایز، ....خط عبور می کند؛ بنابراین:

ب) با داشتن مختصات .... نقطه از یک خط باید بتوان معادلهٔ آن را به دست آورد.

ج) با داشتن معادلهٔ یک خط می توان با مشخص کردن .... نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم نمود.

تذکر : همان طور که به یاد دارید معادلهٔ استاندارد یک خط به صورت $y = mx + h$ است که در آن m را به عنوان شیب خط و h را به عنوان عرض از مبدا در نظر می گیریم.

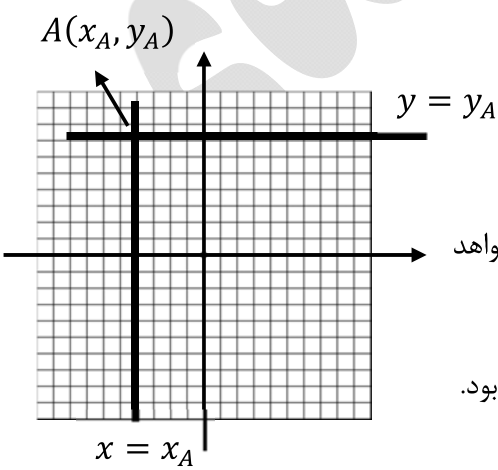
سوال : نمودار هر کدام از خطوط زیر را رسم کنید : الف) $y = ۲x - ۴$ ب) $y = -۳x + ۱$

بررسی دو حالت خاص (خطوط موازی با محورهای مختصات) :

اگر یک خط از نقطه ی $A(x_A, y_A)$ بگذرد و

الف) موازی محور عرض ها باشد آنگاه معادله ی آن به صورت $x = x_A$ خواهد بود.

ب) موازی محور طول ها باشد آنگاه معادله ی آن به صورت $y = y_A$ خواهد بود.



سوال : نمودار هر کدام از خطوط زیر را رسم کنید.

الف) $x = ۱$ ب) $y = -۲$

نتیجه :

الف) همان طور که مشاهده شد خطوط $x = a$ موازی محور .... هستند.

الف) همان طور که مشاهده شد خطوط $y = b$ موازی محور .... هستند.

۲.۱ روش تعیین معادلهٔ خط به فرم استاندارد $y = mx + h$

حالت اول : در این روش دو نقطه از خط به ما داده می شود که با جایگذاری درون معادلهٔ خط به جای x , y و ایجاد دستگاه معادلات خط دو مجهولی می توان مقادیر شیب خط و عرض از مبدا را یافت. به سوال زیر توجه کنید :

سوال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بگذرد.

حالت دوم : در این روش شیب و یک نقطه از خط به ما داده می شود که باز به کمک جایگذاری در معادلهٔ خط عرض از مبدا را می یابیم.

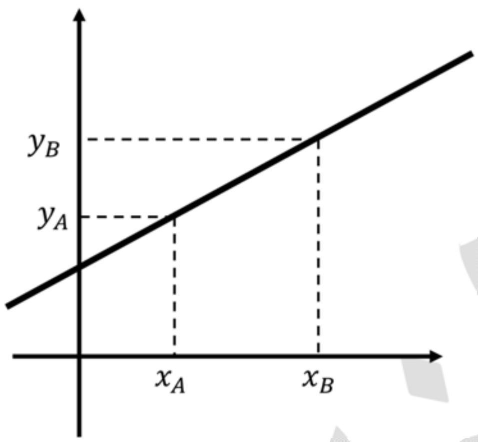
سوال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطه $A = (-۳,۲)$ بگذرد و شیب آن برابر ۵ باشد.

سوال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ بگذرد.

۳.۱ روش تعیین معادلهٔ خط به فرم $y - y_0 = m(x - x_0)$

حالت اول : در این روش اگر دو نقطه از خط به ما داده شده باشد، ابتدا شیب خط را به کمک رابطهٔ شیب که در زیر نحوهٔ محاسبهٔ آن توضیح داده شده است را می یابیم :

شیب خط : همان طور که می دانیم شیب یک خط گذرنده از دو نقطهٔ $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ برابر است با نسبت جابجایی عمودی بر جابجایی افقی ، به عبارت دیگر با توجه به شکل رسم شده شیب خط برابر است با :



$$\text{شیب خط} \quad m_{AB} =$$

پس از محاسبهٔ شیب با جایگذاری یکی از نقاط به دلخواه ، در معادلهٔ ی $y - y_۰ = m(x - x_۰)$ به جای $x_۰$ و $y_۰$ معادله را ساده می کنیم.

سوال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ بگذرد.

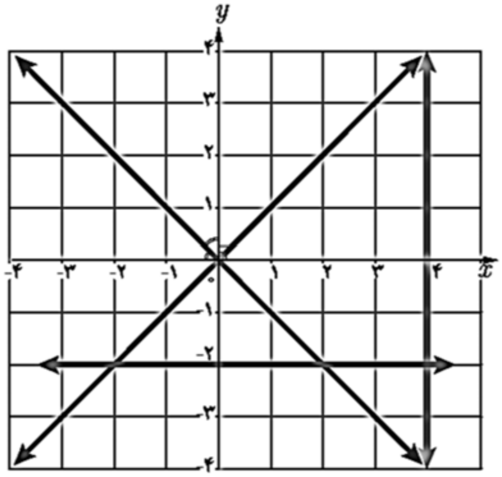
سوال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ بگذرد.سپس خط داده شده را رسم کنید.

یادآوری : هرگاه از سمت چپ محور طول ها به سمت راست حرکت کنیم و ارتفاع افزایش یابد شیب مثبت است و ارتفاع ثابت بماند ، شیب صفر است و ارتفاع کاهش یابد ، شیب منفی خواهد بود.

حالت دوم : در این حالت شیب و یک نقطه از خط داده می شود که با جایگذاری در معادله به جای m و $x_۰$ و $y_۰$ معادله را ساده می کنیم.

سوال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A = (-۳, \frac{۲}{۳})$ بگذرد و شیب آن برابر -۳ باشد.

سوال : با توجه به شکل داده شده معادلهٔ خطوط را بیابید.



جمع بندی :

شیب خطوط موازی محور طول ها برابر .... است.

شیب خطوط موازی محور عرض ها برابر .... است.

معادلهٔ خط نیمساز ربع اول و سوم به صورت .... است.

معادلهٔ خط نیمساز ربع دوم و چهارم به صورت .... است.

تذکر : یکی دیگر از حالت های نمایش معادلهٔ یک خط به صورت $ax + by + c = ۰$ است که ضرایب a , b به صورت همزمان نمی توانند صفر باشند به عبارتی دیگر $a^۲ + b^۲ \neq ۰$ است، که در آن شیب برابر .... و عرض از مبدا نیز برابر با .... خواهد بود.

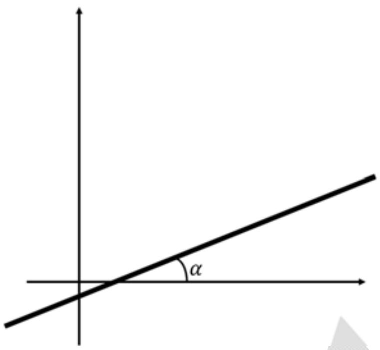
نکته : عرض از مبدا همان محل برخورد نمودار با محور عرض ها ست پس برای محاسبهٔ آن کافی است $x = ۰$ را در معادله قرار دهیم.

نکته : طول از مبدا همان محل برخورد نمودار با محور طول هاست که برای محاسبهٔ آن کافی است $y = ۰$ را در معادله قرار دهیم.

سوال : محل برخورد خط $۲y = -۳x + ۱$ با محورهای مختصات را یافته ، سپس آن را رسم کنید.

نکته : معادلهٔ خطی که هر دو محورهای مختصات ، یعنی طول و عرض را به ترتیب در نقاط m و n قطع می کند به صورت $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=۱$ خواهد بود. (دلیل درستی این مطلب را نشان دهید)

سوال : معادلهٔ خطی که محور y را در نقطه ای به عرض -۳ و محور x را در نقطه ای به طول ۲ قطع می کند ، بیابید.



یادآوری : همان طور که در پایه دهم آموختید ، تانژانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور طول ها می سازد برابر با شیب خط است : $\tan\alpha=m$

سوال : معادلهٔ خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور طول ها زاویهٔ ۳۰ درجه بسازد و از نقطهٔ $A=(۱,۳)$ بگذرد.

سوال : زاویه ای را بیابید که خط گذرنده از نقاط $A=\begin{bmatrix} ۰ \\ -\sqrt{۳} \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ \\ \sqrt{۳} \end{bmatrix}$ با جهت مثبت محور طول ها می سازد.

سوال : دو نقطهٔ $A=\begin{bmatrix} a-۱ \\ ۲a \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳a+۵ \\ a-۱ \end{bmatrix}$ داده شده اند ، a را به قسمی بیابید که این خط با جهت مثبت محور طول ها زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد.

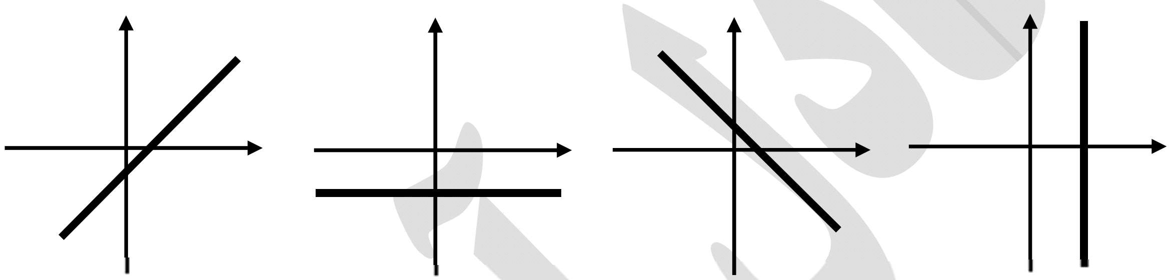
تست : در صفحهٔ مختصات ،کدام یک از خطوط زیر با جهت مثبت محور طول ها زاویهٔ بزرگتر می سازد؟

الف) $y=x+۱$ ب) $y=-۲x$ ج) $۷x-۲y=۶$ د) $y=۲x-۱$

تست : خط $2y = 1 - 2x$ با خط $x = -35$ چه زاویه ای می سازد؟

الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90°

۱.۳.۱ حالت های مختلف خط راست



خط با شیب تعریف نشده **خط با شیب منفی $\tan\alpha < 0$** **خط با شیب صفر $\tan\alpha = 0$** **خط با شیب مثبت $\tan\alpha > 0$**

سوال : معادلهٔ خطوطی با شیب m را بنویسید که از مبدا مختصات می گذرند.

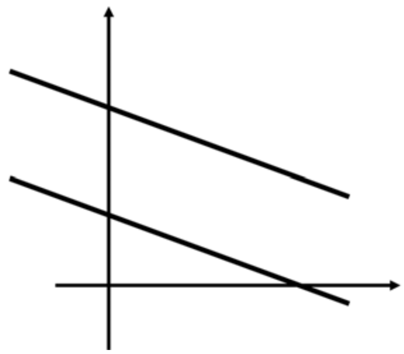
سوال : معادلهٔ خطوطی با شیب m را بنویسید که عرض از مبدا آنها نصف شیب آنهاست.

سوال : معادلهٔ محورهای مختصات را بنویسید.

تست : مقدار m چقدر باشد تا خط $3y - 5x + 3m - 2 = -6$ از مبدا مختصات بگذرد؟

الف) $\frac{4}{3}$ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{-2}{3}$ د) $\frac{-4}{3}$

۲.۳.۱ بررسی خطوط موازی



تذکر : دو خط را موازی گویند هرگاه ....

ســـوال : شــرط موازی بودن دو خط به معادلات $a_۱x + b_۱y + c_۱ = ۰$ و $a_۲x + b_۲y + c_۲ = ۰$ را بیان کنید.

سوال : آیا خطوط به معادلات $۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$ و $-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ موازیند؟ چرا؟

سوال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A = (-۳,۳)$ بگذرد و با خط به معادلهٔ $۴y - ۳x + ۱۴ = ۰$ موازی باشد.

سوال : شرط منطبق بودن و غیر منطبق بودن دو خط موازی به معادلات $a_۱x + b_۱y + c_۱ = ۰$ و $a_۲x + b_۲y + c_۲ = ۰$ را بیان کنید.

سوال : مقدار a را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} ۱۰x - ay = ۴ \\ ۵x + (a+۱)y = ۲ \end{cases}$ بی شمار جواب داشته باشد.

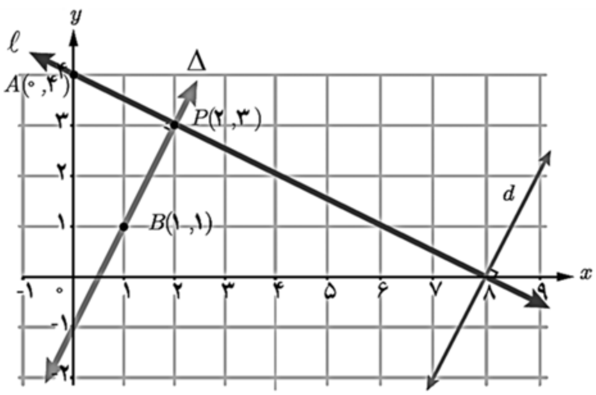
یادآوری : در پایهٔ نهم با دســتگاه معادلات خط آشــنا شــده اید ، این دســتگاه ها به کمک خطوط مورد بررســی قرار میگرفت بطوریکه سه حالت مجموعه جواب برای این دستگاه در نظر گرفته میشد :

الف) دستگاهی که جواب ندارد :

ب) دستگاه فقط یک جواب دارد :

ج) دستگاه بی شمار جواب دارد :

۳.۳.۱ بررسی خطوط عمود بر هم

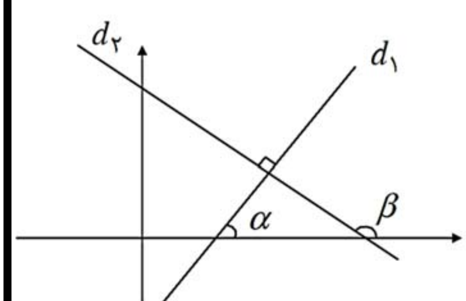


مطابق شکل دو خط l و Δ را عمود بر هم رسم کرده ایم به نظر شما چه ارتباطی بین حاصلضرب شیب آنها وجود دارد؟

نتیجه : دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند هرگاه حاصل ضرب شیب های آنها برابر .... باشد.

به عبارت دیگر اگر معادلات خطوط به صورت $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ باشد آنگاه $mm' =$

لذا شیب هر خط عمود بر l برابر است با .... قرینهٔ شیب خط l .



نتیجه : شرط آنکه خط به معادلات $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ در یک نقطه متقاطع بر هم عمود باشند آن است که $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. به نظر شما چرا چنین شرایطی برقرار است؟

سوال : نشان دهید که خطوط $2x + y + 14 = 0$ و $2x - 4y + 3 = 0$ بر هم عمودند.

سوال : معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(2, -3)$ می گذرد و بر خط $2x + y + 3 = 0$ عمود است.

سوال : مقدار k را طوری بیابید که خطوط $(2k - 1)x + y - 2 = 0$ و $y + 2x - 1 = 0$ بر هم عمود باشند.

تست : یک خط از دسته خطوط به معادله ی $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده از دو نقطه ی $A(2,-1)$ و $B(8,3)$ عمود است ، معادله ی آن خط کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۰)

الف) $2y + 3x = 4$ ب) $2y + 3x = 1$ ج) $2y - 3x = -5$ د) $3y - 2x = -5$

۴.۳.۱ بررسی خطوط متقاطع در یک نقطه

شرط آنکه خط به معادلات $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ در یک نقطه متقاطع با شند آن ا ست که $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_1}{a_2}$. به نظر شما چرا چنین شرایطی برقرار است؟

نکته : برای بدست آوردن محل برخورد دو خط کافی است معادلات آنها را با هم برخورد دهیم .

سوال : محل برخورد دو خط به معادلات $y = 3x + 1$ و $y = 2x - 1$ را بیابید.

تست : m و n چه اعدادی باشند تا دو خط $ny = x(2m-1) + 1$ و $2n = \left(\frac{m-n}{3}\right)x - 5y$ در نقطهٔ $A(1,-1)$ تلاقی کنند.

الف) $m = n = -1$ ب) $m = 1, n = -2$ ج) $m = -1, n = 2$ د) $n = 2, m = \frac{-1}{5}$

تست : معادله ی سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ و $y = 2x$ و $x = 1$ است، معادله ی خطی که کوچکترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۴)

الف) $y = \frac{2}{3}$ ب) $x = \frac{2}{3}$ ج) $y + x = \frac{2}{3}$ د) $y + x = \frac{1}{3}$

۴.۱ جمع بندی وضعیت دو خط نسبت به هم در صفحه

معادله ی باز دو خط	وضعیت دو خط	معادله ی بسته دو خط
$ax+by+c=۰ , a'x+b'y+c'=۰$		$y=mx+h, y=m'x+h'$
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	موازی (منطبق)	$m=m' , h=h'$
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	موازی (غیر منطبق)	$m=m' , h\neq h'$
$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	متقاطع	$m\neq m'$
$aa'+bb'=۰$	متقاطع (متعامد)	$m\times m'=-۱$

سوال : در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند . (موازی، عمود یا متقاطعِ غیر عمود)

الف) $l: y=۵x-۲$ $\qquad d: y=\frac{-۱}{۵}x+۳$

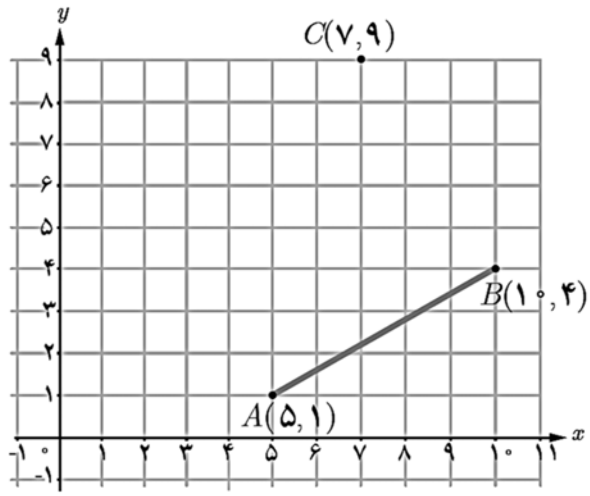
ب) $l: y=\frac{۱}{۲}x+۷$ $\qquad d: x-۲y=۱$

ج) $l: ۲x-۳y+۳=۰$ $\qquad d: ۳x+۲y=۰$

د) $l: x=۱$ $\qquad d: y=-۳$

ه) $l: ۳x-۳y+۳=۰$ $\qquad d: ۳x+۳y=۱۶$

ســـوال : مربع $ABCD$ در ناحیۀ اول اســـت طوریکه $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو راس مجاور آن اند.



الف) شیب ضلع AB و معادلۀ آن را بنویسید .

ب) شیب ضلع AD و معادلۀ آن را بنویسید .

ج) اگر بدانیم $C(۷,۹)$ راس سوم مربع است ، مختصات راس D را بیابید.

د) رسم مربع را کامل کنید.

سوال : در مورد هر کدام از پرسش های زیر بحث کنید.

الف) اگر یک خط دارای طول از مبدا و عرض از مبدا برابر باشد نسبت به نیمساز ناحیۀ اول چگونه است؟

ب) اگر یک خط دارای طول از مبدا و عرض از مبدا قرینه باشد نسبت به نیمساز ناحیۀ دوم چگونه است؟

نکته : شرط آنکه سه نقطه ی $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ بر یک استقامت (خط راست) باشند آن است که شیب AB برابر با شیب AC باشد ، به عبارتی دیگر : $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$ برای درک بهتر لطفا یک تصویر رسم کنید.

تست : به ازای کدام مقادیر a نقاط $(a,۳)$ و $(۶,۴a+۱)$ و مبدا مختصات بر یک راستا قرار می گیرند. (ت خ ۸۵)

الف) $-۲,\frac{۹}{۴}$ ب) $-۲,\frac{۳}{۴}$ ج) $-۲,\frac{-۳}{۴}$ د) $۲,\frac{-۹}{۴}$

تست : مقادیر m و n کدام باشند که دو خط به معادلات $(m-۲)x-۳y=۱$ و $۲x-(n+۱)y=۲$ بر هم منطبق باشند؟

الف) $m=n=-۲$ ب) $m=۳, n=۵$ ج) $m=۱, n=-۱$ د) $m=۲, n=-۱$

تست : مقدار m چقدر باشد که دو خط به معادلات $۳x+۴y=۶$ و $(۲m-۱)x+y=۶$ روی محور طول یکدیگر را قطع کنند؟

الف) -۲ ب) ۲ ج) ۴ د) -۴

تست : خط d به معادلهٔ $(۲m-۵)x-۲y=x-my+۱$ موازی محور طول است ، مقدار m کدام است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) -۳

تست : معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(۰,-۲)$ گذشته و بر خط $y=۲$ عمود باشد چیست؟

الف) $x=۰$ ب) $y=۰$ ج) $x=\frac{-۱}{۲}$ د) $y=\frac{-۱}{۲}$

تست : خط به معادلهٔ $y=۲x+a$ به ازای چه مقادیری از a موازی نیمساز ناحیه اول است؟

الف) $a=۱$ ب) $a=-۱$ ج) $a=۲$ د) هیچ مقدار a

تست : نقطهٔ برخورد دو خط $y = x + ۲$ و $y = mx - ۲$ بر نیمساز ربع دوم واقع است ، در این صورت مقدار m کدام است؟

الف) ۲   ب) ۳   ج) ۲−   د) ۳−

تست : به ازای کدام مقدار k خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۲, k)$ و $(۲k - ۱, k + ۷)$ بر نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم عمود است؟

الف) ۵   ب) ۱−   ج) صفر   د) ۲

تست : معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $(-۱,۳)$ میگذرد و بر خط $\frac{x}{۲} = \frac{x-y}{۳}$ عمود است کدام است؟

الف) $y = ۵x + ۲$ ب) $۲y = x - ۵$ ج) $y = ۵x - ۲$ د) $y - ۵ = ۲x$

تست : مساحت سطح محصور بین خط به معادلهٔ $۳x + ۴y = ۱۲$ و محورهای مختصات کدام است؟

الف) ۱۲   ب) ۴   ج) ۶   د) ۸

تست : معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $A(-۱,-۳)$ گذشته و عرض از مبدا آن با عرض از مبدا خط $۲x - y = ۱$ برابر باشد کدام است؟

الف) $x = ۲y - ۱$ ب) $y = ۲x + ۱$ ج) $۲x - y = ۱$ د) $y = -۱$

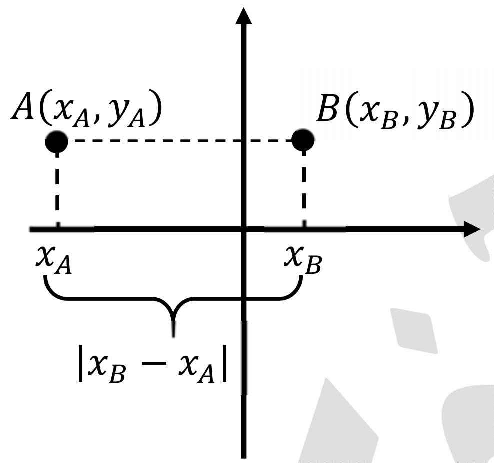
تست : شیب و طول از مبدا دو خط با هم برابرند ، وضعیت این دو خط نسبت به هم چگونه است؟

الف) بر هم عمودند   ب) موازی و منطبق اند   ج) موازی و غیر منطبق اند   د) روی یک نقطه در محور طول متقاطع اند

نتیجه : اگر طول از مبدا دو خط و شیب آنها یا عرض از مبدا دو خط و شیب آنها با هم برابر باشند ، دو خط بر هم منطبق اند.

۵.۱ فاصلهٔ بین دو نقطه دلخواه در صفحه

حالت اول : اگر دو نقطه مطابق شکل دارای عرض یکسان باشند ، کافی است طول های آنها را از کم کنیم.

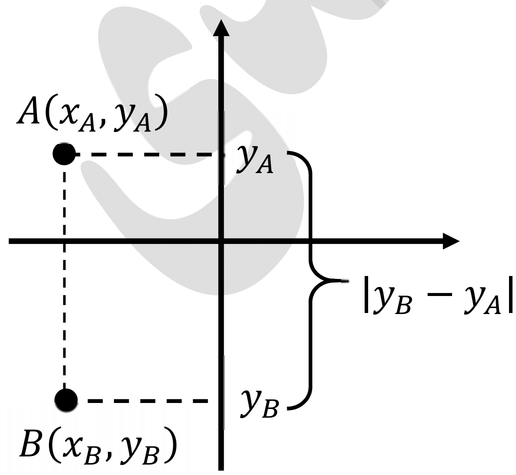


$|AB|$

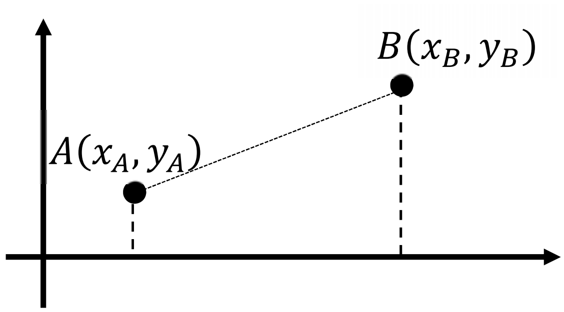
سوال : دو نقطهٔ $A(۱,۵)$ و $B(-۳,۵)$ را روی محور یافته و فاصلهٔ بین این دو نقطه را بیابید.

حالت دوم : اگر دو نقطه مطابق شکل دارای طول یکسان باشند .

کافی است عرض های آنها را از هم کم کنیم.



$|AB|$



حالت سوم : فاصلۀ بین دو نقطه ی $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ که روی یک خط راست قرار دارند به صورت زیر بدست می آید :

$|AB|$ ______

سوال : در صورتی که $A(-۲,۳)$ و $B(۱,-۱)$ ، اندازۀ پاره خط AB را بیابید.

سوال : فاصلۀ نقطۀ دلخواه $A(a,b)$ را از مبدا مختصات بدست آورید.

سوال : دو نقطۀ $A(۵,۷)$ و $B(-m, m-۲)$ ، داده شده اند. مقدار m را به قسمی تعیین کنید که طول پاره خط AB برابر ۱۰ باشد.

سوال : نقاط $A(۲,۰)$ و $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید. این نقاط رئوس یک مثلث را مشخص می کنند پس از مشخص کردن این نقاط روی صفحۀ مختصات ، محیط مثلث ABC و نوع آن را بدست آورید.

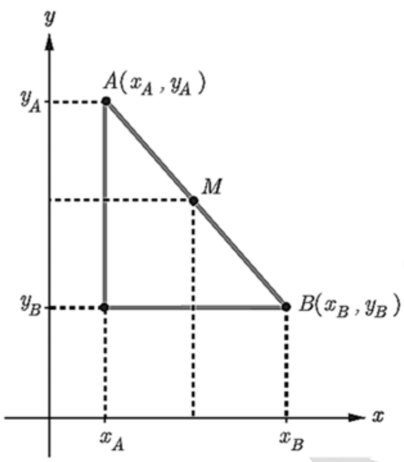
سوال : نشان دهید مثلث با رئوس $A(۱,۲)$ و $B(۲,۵)$ و $C(۴,۱)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

سوال : دایره ای به مرکز مبدا مختصات از نقطه ی $A(-۶,۸)$ گذشته است. شعاع این دایره را بیابید.

تست: نقطهٔ A به طول $\sqrt{۷}$ روی نیمساز ناحیه اول و نقطه B به عرض -۵ روی نیمساز ناحیه دوم قرار دارد. فاصلهٔ نقطه A تا B برابر کدام است؟

الف) ۸ ب) $۵\sqrt{۷}$ ج) ۱۰ د) $۲\sqrt{۶}$

۶.۱ نقطه ی وسط یک پاره خط



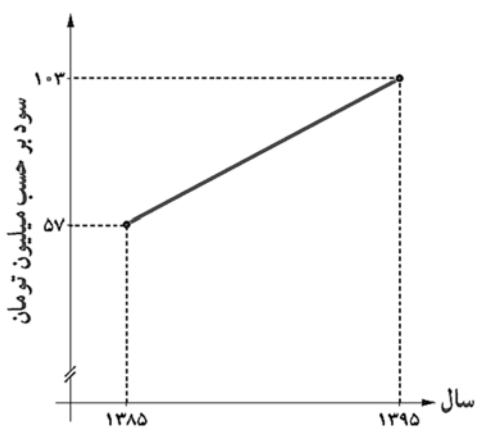
فرض کنید نقطه ی M وسط پاره خط AB بین دو نقطهٔ A, B باشد در این صورت طول مختصات وسط پاره خط برابر است با میانگین مجموع طول های ابتدا و انتهای پاره خط و برای مختصات عرض ها هم به طور مشابه برقرار است.

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right)$$

سوال : نقاط $A(۲,۰)$ و $B(۵,۴)$ را در نظر بگیرید و پس از مشخص کردن وسط این نقاط ، فاصلهٔ نقطه وسط پاره خط AB تا مبدا مختصات را بیابید.

سوال : اگر نقاط $A(-۲,۳)$ و $B(۲,۰)$ و $C(۰,-۲)$ سه راس مثلث ABC باشند پس از رسم مثلث طول میانه ی AM و معادلهٔ آن را بدست آورید. (نقطهٔ M وسط پاره خط BC می باشد)

سوال : سود سالانهٔ یک واحد کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است .به کمک فرمول نقطهٔمیانی پاره خط مشخص کنید:



الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دههٔ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می رود در سال۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

سوال : دو انتهای یکی از قطرهای دایره ای نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ هستند. (جهت درک بهتر یک تصویر رسم کنید)

الف) اندازهٔ شعاع و مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطهٔ $C(۷,۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد چرا؟

تست: اگر $A(m,-n)$ و $B(m,n)$ دو سر یک پاره خط باشند ، معادلهٔ عمود منصف AB کدام است؟

الف) $x=m$ ب) $x=۰$ ج) $y=-x$ د) $y=۰$

۷.۱ حالت های مختلف یافتن قرینه یک نقطه

فرض کنید نقطهٔ $A(x,y)$ به ما داده شده باشد در این صورت قرینهٔ آن نسبت به :

الف) مبدا مختصات به صورت $A'(-x,-y)$ است.

ب) محور طول به صورت $A'(x,-y)$ است.

ج) محور عرض به صورت $A'(-x,y)$ است.

دلیل حالت های بالا را با رسم شکل نشان دهید.

د) نیمساز ناحیه اول و سوم به صورت $A'(y,x)$ است.

ل) نیمساز ناحیه دوم و چهارم به صورت $A'(-y,-x)$ است.

م) خط $x=m$ به صورت $A'(۲m-x,y)$ است.

ن) خط $y=n$ به صورت $A'(x,۲n-y)$ است.

دلیل حالت های بالا را با رسم شکل نشان دهید.

و) نقطهٔ $A(m,n)$ به صورت $A'(۲m-x,۲n-y)$ است.

دلیل حالت بالا را با رسم شکل نشان دهید.

سوال : قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ را نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ بدست آورید.

تست: نقاط $A(\sqrt{۲},-\sqrt{۳})$ و $B(\sqrt{۳},-\sqrt{۲})$ نسبت به کدامیک از خط های زیر قرینه یکدیگرند؟

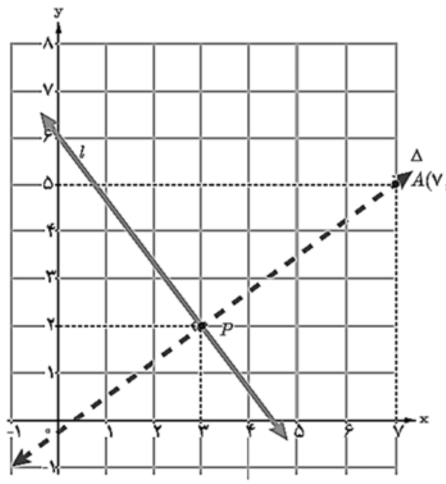
الف) محور طول ها ب) محور عرض ها ج) نیمساز ناحیه اول و سوم د) نیمساز ناحیه دوم و چهارم

تست : نقطهٔ $A(-۱,۲)$ با کدامیک از نقاط زیر نسبت به نقطهٔ $B(۱,-۱)$ قرینه است؟

الف) $(-۳,-۴)$ ب) $(-۳,۱)$ ج) $(۳,-۴)$ د) $(-۲,-۱)$

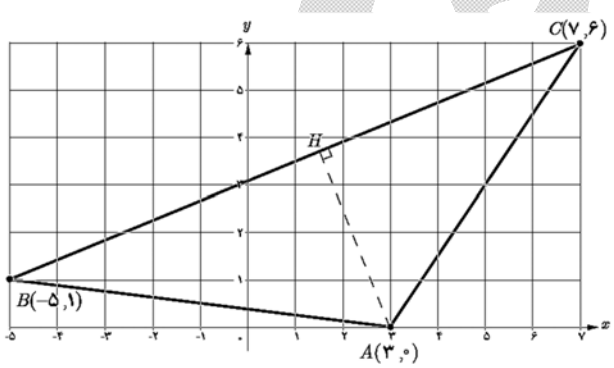
۸.۱ فاصلهٔ نقطه از خط

اگر $A(x_{\circ},y_{\circ})$ نقطه ای خارج از خط l ، باشد. فاصلهٔ A تا l برابر است با طول پاره خطی که از A عمود بر l رسم می شود؛ یعنی کوتاه ترین مسیر از A به l فاصله ی نقطه $A(x_{\circ},y_{\circ})$ از خط مستقیم $l: ax+by+c=\circ$ به صورت $AH=\frac{|ax_{\circ}+by_{\circ}+c|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}$ تعریف می شود. و فاصلهٔ مبدا مختصات تا خط l از رابطهٔ $AH=\frac{|c|}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}$ حاصل می شود.



تذکر : در صورتی که نقطه روی خط باشد ، فاصلهٔ آن صفر فرض می شود.

سوال : فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۵)$ را از خط l به معادلهٔ $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.



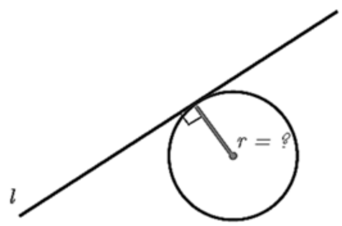
سوال : مثلث با رئوس $A(۳,\circ)$ و $B(-۵,۱)$ و $C(۷,۶)$ را در نظر بگیرید.

الف) شیب ضلع BC را بدست آورید و معادلهٔ آن را بنویسید.

ب) فاصلهٔ راس A تا ضلع BC را بدست آورید. (این همان طول ارتفاع AH است)

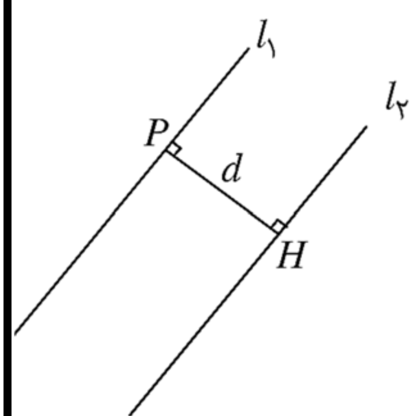
ج) طول ضلع BC را بدست آورید و سپس با استفاده از طول ارتفاع AH ، مساحت مثلث را بیابید.

سوال : خط $۳x - ۴y = ۰$ بر دایره ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس ا ست. شعاع دایره را بیابید.



۹.۱ فاصلهٔ بین دو خط موازی

فاصلهٔ بین دو خط موازی همواره مقداری ثابت است و برابر است با فاصلهٔ یک نقطه روی یکی از خطوط تا خط دیگر ، فاصلهٔ بین دو خط موازی $ax + by + c_۱ = ۰$ و $ax + by + c_۲ = ۰$ از دستور زیر بدست می آید :



$$PH = \frac{|c_۲ - c_۱|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

تمرین : رابطهٔ بالا را ثابت کنید .(راهنمایی : یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به دست آورید.)

سوال : فاصلهٔ بین دو خط به معادلات $۳x - ۴y = ۱$ و $۶x - ۸y + ۷ = ۰$ را بیابید.

نکته : فاصلهٔ بین دو خط تنها در حالت موازی بودن آنها قابل تعریف است.

سوال : مقدار k را طوری بیابید که فاصلهٔ بین دو خط موازی به معادلات $۳x + ۲y + ۴ = ۰$ و $۳x + ۲y + k - ۱ = ۰$ برابر $۲\sqrt{۱۳}$ باشد.

سوال : یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = ۲x - ۱$ واقع است. اگر $A(۰,۳)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را بدست آورید.

تست : فاصلهٔ مبدا مختصات را از ، عرض از مبدا دسته خطوط $(۲m-۳)x+y+۴=۰$ بیابید؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) $\sqrt{۲}$ د) $۲\sqrt{۲}$

تست : نقطه ی $A(۷,۶)$ راس یک متواضی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می باشند.مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (ت ۹۰)

الف) $(۱,۵)$ ب) $(۳,۴)$ ج) $(۳,۵)$ د) $(۴,۳)$

تست : نقطه ی $A(۳,-۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله ی $۲y-x=۵$ است. مساحت این مربع کدام است؟ (ت خ ۹۳)

الف) ۴۰ ب) ۴۵ ج) ۷۵ د) ۸۰

تست : به ازای کدام مقدار a سه خط به معادلات $y+۲x=۰$ و $۲x+ay=۵$ و $y+۳x=a$ متقارب اند؟ (ت ۸۸)

الف) ۱− ب) ۱ ج) ۲ د) نشدنی

راهنمایی : برای آن‌که سه خط متقارب باشد باید مختصات نقطه برخورد دو خط اول در معادله خط سوم صدق کند.

تست : دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $y=x+۱$ و $۲x-۲y=۳$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟ (ت ۹۲)

الف) $\frac{۹}{۸}$ ب) $\frac{۹}{۴}$ ج) $\frac{۲۵}{۸}$ د) $\frac{۲۵}{۴}$

تســت : دو ضــلع یک مســتطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y + x = ۶$ و $۲x - y = ۷$ و یک راس آن نقطه ی $A(۸,۵)$است مساحت این مستطیل کدام است؟ (ت خ ۹۰)

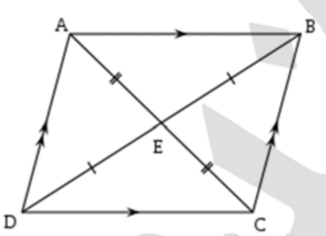
الف) ۷/۲ ب) ۹/۶ ج) ۱۱/۴ د) ۱۲/۸

تست : فاصله ی دو خط به معادلات $y = \sqrt{۳}x + ۲$ و $-۳x + \sqrt{۳}y + ۶ = ۰$ کدام است؟ (ت خ ۸۸)

الف) $۲ - \sqrt{۳}$ ب) $\sqrt{۳} - ۱$ ج) $\sqrt{۳} + ۱$ د) $۲ + \sqrt{۳}$

تست : دو نقطه بر خط به معادله ی $y = x - ۱$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله ی $۲x - ۳y = ۵$ برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه کدام است ؟ (سراسری تجربی ۸۹)

الف) ۱۵ – و ۹ ب) ۱۱ و ۱۵– ج) ۱۵ و ۱۱– د) ۹ – و ۱۱

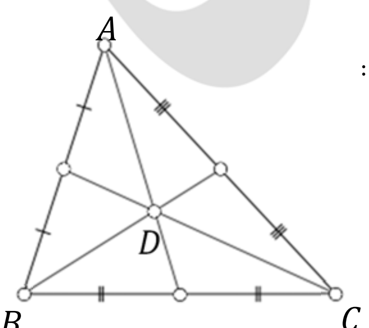


نکته : در هر متوازی الاضلاع قطر ها منصف هم هستند لذا :

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

تست : اگر AC قطر متوازی الاضلاع $ABCD$ باشد و $C(۶,۰)$ و $B(۲,-۳)$ و $A(-۱,۷)$ باشد مختصات D کدام است؟

الف) $(۲,۱۰)$ ب) $(۳,۱۰)$ ج) $(۲,۹)$ د) $(۳,۹)$

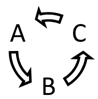


نکته : محل برخورد میانه های هر مثلث (مرکز ثقل مثلث) از رابطه ی زیر بدست می آید :

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{۲} \\ y_D = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{۲} \end{cases}$$

نکته : هرگاه مختصات سه راس مثلثی موجود باشد ، به کمک رابطه ی زیر مساحت مثلث قابل محاسبه است.

$$S = \frac{۱}{۲}|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$



تست : مساحت مثلثی با سه راس به مختصات $(۲,۵)$, $(۳,۰)$, $(۰,۲)$ کدام است؟ (ت خ ۹۲)

الف) ۶ ب) ۶/۵ ج) ۷ د) ۷/

دستور هرون جهت محاسبهٔ مساحت مثلث : فرض کنید که یک مثلث به طول اضلاع a, b, c مفروض باشد در این صورت :

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{مساحت} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

سوال : مساحت مثلثی به طول اضلاع ۸,۹,۱۰ را بیابید.

اشاره : تمرینات صفحه ۹ کتاب درسی بررسی شود.

۲ تابع درجه ۲ و معادلهٔ درجهٔ دوم

۱.۲ معادلات قابل تبدیل به معادله درجه دوم

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در کلاس دهم روش های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه ۲ آموختیم . روش هایی چون تجزیه و مربع کامل کردن و فرمول کلی. یک جنبهٔ اهمیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس بعدی به آنها اختصاص یافته است .در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل معادله آشنا می شویم که یک شیوهٔ کارآمد و نسبتاً متداول برای حل انواع معادله است. درس را با مثال زیر آغاز می کنیم :

سوال : معادلهٔ $(3x^2-1)^2-13(3x^2-1)+22=0$ را حل کنید.

نتیجه : منظور از معادلات قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم، معادلات به فرم $a\big(f(x)\big)^{2n}+b\big(f(x)\big)^{n}+c=0$ است.

برای حل اینگونه معادلات تغییر متغیر $f(x)^n=t$ را منظور می کنیم که با این شرایط ، معادله به فرم درجهٔ دوم $at^2-bt+c=0$ تبدیل شده که پس از به دست آوردن مقادیر t ، مقادیر x را به دست می آوریم.

نکته : بررسی یک نامساوی مهم

$$\begin{cases} x+\frac{1}{x}\geq 2 \quad , \quad x\geq 0 \\ x+\frac{1}{x}\leq -2 \quad , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} x+\frac{1}{x}=2 \quad , \quad x=1 \\ x+\frac{1}{x}=-2 \quad , \quad x=-1 \end{cases}$$

سوال : هر کدام از معادلات زیر را حل کنید و جواب های قابل قبول را مشخص کنید.

الف) $2x^4-7x^2-4=0$

ب) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=8$

ج) $9^x-7(3^x)-18=0$

د) $4x^6+1=5x^3$

ه) $2x^{\frac{2}{3}}+7x^{\frac{1}{3}}-4=0$

ی) $x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}-2=0$

سوال : معادلهٔ $\left(\frac{۲x-۱}{۲x}\right)^{۲} - ۴\left(\frac{۲x-۱}{۲x}\right) + ۳ = ۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد ؟

۱.۱.۲ تعداد ریشه های معادلهٔ درجه چهارم $ax^4 + bx^2 + c = 0$

سوال : در هر کدام از حالت های زیر یک معادلهٔ درجه چهارم با شرایط گفته شده مشخص کنید.

الف) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که ریشه نداشته باشد.

ب) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که تنها یک ریشه داشته باشد.

پ) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که تنها دو ریشهٔ متمایز داشته باشد.

ت) یک معادلهٔ درجهٔ چهار بنویسید که دقیقاً سه ریشهٔ متمایز داشته باشد.

نتیجه : یک معادلهٔ درجه چهار حداکثر می تواند ۴ ریشهٔ متمایز دا شته با شد،به طور کلی فرض کنید یک معادلهٔ درجهٔ n به صورت $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ مفروض باشد ، این معادله حداکثر n ریشه خواهد داشت.

نکته : در معادله ی درجه چهارم $ax^4 + bx^2 + c = 0$ داریم :

۱) اگر $\frac{c}{a} < 0$ معادله دو ریشه حقیقی و قرینه دارد .

۲) اگر $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} > 0$ آنگاه معادله چهار ریشه حقیقی دارد که دو به دو قرینه هم اند.

۳) اگر $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{-b}{a} < 0$ آنگاه معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

۴) اگر $\Delta = 0$ آنگاه
$$\begin{cases} x = \frac{-b}{2a} > 0 & \text{معادله دو} \\ x = \frac{-b}{2a} = 0 & \text{معادله ریشه} \\ x = \frac{-b}{2a} < 0 & \text{معادله ریشه} \end{cases}$$

تست : معادله ی $(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - 12 = 0$ ، چند ریشه حقیقی دارد ؟

الف) صفر　　ب) ۴　　ج) ۲　　د) ۱

تست : مجموع ریشه های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است ؟ (سراسری تجربی ۹۰)

الف) -4　　ب) -2　　ج) ۲　　د) ۴

تست : به ازای کدام مقدار a ، منحنی به معادله ی $y = ax^4 - 4x^2 + a - 3 = 0$ دارای چهار ریشه ی حقیقی متمایز است؟

الف) $3 < a < 4$　　ب) $a > 3$　　ج) $-1 < a < 4$　　د) $1 < a < 3$

تست : اگر معادله ی $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ دارای چهار ریشه ی حقیقی متمایز باشد ، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است ؟ (سراسری تجربی ۸۵)

الف) $m<-۴$ ب) $m>۴$ ج) $-۴<m<۴$ د) $۴<m<۹$

تست : معادله $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲+۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)-۱=۰$ چند ریشه حقیقی دارد ؟

الف) صفر ب) ۴ ج) ۱ د) ۲

تست: معادله ی $x+\frac{۱}{x}+\frac{x}{x^۲+۱}=۲$ چند جواب دارد ؟

الف) ۱ ب) ۰ ج) ۲ د) ۳

۲.۲ مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادلهٔ درجه ۲

می دانیم که معادلهٔ درجه دوم در حالت کلی به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ است. که $a\neq ۰$

می خواهیم بررسی کنیم که چگونه می توان بدون حل این معادله در مورد وجود و تعداد جواب های حقیقی آن اظهار نظر کرد. گاهی به جای مقدار دقیق ریشه های یک معادلهٔ درجهٔ۲ ، تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه ها برایمان اهمیت دارد که در این صورت بدون حل معادله می توان این مقادیر را به دست آورد.یعنی بدون وجود ریشه ها و به کمک معادله می توان مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به راحتی یافت .اگر α و β ریشه های معادله ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند و مجموع ریشه ها را با S و حاصل ضرب آنها را با P نشان دهیم داریم :

۱) $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ۲) $P=\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$

سوال : روابط گفته شده را ثابت کنید.

سوال : در معادله ی $-۲x^۲+x+۵=۰$ بدون حل معادله ، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را بیابید.

سوال : در معادله ی $۲x^۲-۹x+c=۰$ مقدار c را طوری بیابید که یکی از ریشه ها دو برابر دیگری باشد.

سوال : به ازای کدام مقدار m مجموع جواب های معادله ی $x^۲-(m+۱)x-۳m=۰$ برابر ۳ خواهد بود؟

تست : به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{۱}{۸}$ واسطهٔ حسابی بین دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $(m^۲-۴)x^۲-۳x+m=۰$ است؟ (ریاضی ۸۴)

الف) ۳ ب) -۳ ج) ۴ د) -۴

تست : به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی معادله ی $mx^۲+۳x+m^۲=۲$ معکوس یکدیگرند؟ (ت خ ۹۰)

الف) ۱ ب) -۱ ج) ۲ د) -۲

تست: به ازای کدام مقدار m دو ریشه ی حقیقی معادله ی $۲x^۲-۳x+m=۰$ عکس یکدیگرند ؟

الف) ۲- ب) ۲ ج) ۳ د) هیچ مقدار m

۳) $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ تفاضل ریشه ها

سوال : در معادلهٔ $۴x^۲-۸x+c=۰$ مقدار c را به گونه ای بیابید که یکی از ریشه های آن ۳ واحد بزرگتر از ریشهٔ دیگر باشد .

تست : در معادله $۳x^۲-۱۵x+m=۰$ یکی از ریشه ها ۲ واحد از دیگری بیشتر است m کدام است ؟ (ر ۸۲)

الف) $\frac{۵۹}{۵}$ ب) $\frac{۶۳}{۵}$ ج) $\frac{۵۹}{۴}$ د) $\frac{۶۳}{۴}$

نکته : با توجه به نکته قبل داریم :

۱) $\alpha^۲+\beta^۲=S^۲-۲P$

اثبات:

۲) $\alpha^۲-\beta^۲=\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)S$

اثبات :

۳) $\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$

اثبات :

۴) $\alpha^۴+\beta^۴=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲$

۵) $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{S\pm ۲\sqrt{P}}$

۶) $\dfrac{۱}{\alpha}+\dfrac{۱}{\beta}=\dfrac{S}{P}$

تست :به ازای کدام مقدار m مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادلهٔ $mx^۲-(m+۳)x+۵=۰$ برابر ۶ می باشد ؟

(سراسری تجربی ۹۳)

الف) $-\frac{۹}{۵}$ ب) ۱ ج) ۱ و $-\frac{۹}{۵}$ د) $\frac{۹}{۵}$ و ۱−

تست : به ازای کدام مقدار m مجموع جذر ریشه های حقیقی معادله ی $۲x^۲-(m+۱)x+\frac{۱}{۸}=۰$ برابر ۲ می باشد ؟

(سراسری ریاضی ۹۶)

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶

تست : در معادله ی درجه دوم $۲m(x+۱)+x^۲=۲$ معکوس مجموع دو ریشه برابر حاصل ضرب آن دو ریشه است ، m کدام است ؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{-۱}{۴}$ د) $\frac{-۱}{۲}$

تست : در معادلهٔ $۳x^۲-۱۷x+m=۰$ ، یک ریشه از ۳ برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است، m کدام است ؟ (ریاضی ۸۷)

الف) ۱۵ ب) ۱۲ ج) ۱۰ د) ۹

تست : در معادله ی $۲x^۲+ax+۹=۰$ ، یک ریشه ۲ برابر ریشه دیگر است، مجموع دو ریشه ی مثبت کدام است ؟

(تجربی خارج کشور ۸۴)

الف) ۳/۵ ب) ۴ ج) ۴/۵ د) ۵

تست : در معادله ی $x^۲ - ۸x + m = ۰$ ، یک ریشه از نصف ریشه ی دیگر ۵ واحد بیشتر است، mکدام است ؟ (ریاضی خارج کشور ۹۱)

الف) ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۱۴ د) ۱۵

تست : اگر α و β ریشه های معادله ی $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشند حاصل $\alpha + \frac{۱}{\alpha} + \beta + \frac{۱}{\beta}$ کدام است ؟

الف) ۸− ب) ۴− ج) ۸ د) ۴

تست : در معادله ی $x^۲ - ۲x + \frac{۳}{۴} = ۰$ باشند حاصل $\alpha^۴ + \beta^۴$ کدام است ؟

الف) $\frac{۵}{۲}$ ب) $\frac{۵}{۸}$ ج) $\frac{۴۱}{۲}$ د) $\frac{۴۱}{۸}$

تست : اگر یکی از ریشه های معادله $x(ax^۲ - x - ۵) = ۲$ برابر ۲ باشد مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است ؟ (ریاضی خارج کشور ۸۷)

الف) ۲− ب) $-\frac{۳}{۲}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۳}{۲}$

تست : اگر α و β ریشه های معادله $۴x^۲ - ۱۲x + ۱ = ۰$ باشد مقدار $\frac{۱}{\sqrt{\beta}} + \frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ کدام است ؟ (ر خ ۸۵)

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶

تست : اگر α و β ریشه های معادله ی $۳x^۲ - x - ۱ = ۰$ باشند حاصل $۳\alpha^۳\beta - \alpha^۲\beta + ۳$ کدام است ؟

الف) $\frac{۵}{۳}$ ب) $\frac{۶}{۳}$ ج) $\frac{۷}{۳}$ د) $\frac{۸}{۳}$

تست : اگر α و β ریشه های معادله $x^۲ + x - ۱ = ۰$ باشد و $\beta > \alpha$ باشد مقدار عبارت $۵\alpha^۲ + ۳\beta^۲$ کدام است ؟

الف) $۱۲ + \sqrt{۵}$ ب) $۱۲ - \sqrt{۵}$ ج) $۲۴ + \sqrt{۵}$ د) $۲۴ - \sqrt{۵}$

تست : اگر α و β ریشه های معادله ی $x^۲ + ۲x + c = ۰$ باشد به طوریکه حاصل $۵\alpha + ۳\beta = ۴$ آنگاه مقدار $\alpha - \beta$ کدام است ؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۸ د) ۱۲

تست : در معادله $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ حاصل عبارت $(\alpha^۲ - ۴\alpha + ۲)(\beta^۲ - ۴\beta + ۴)$ چقدر است ؟

الف) ۸ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶

تست : اگر α و β ریشه های معادله ی $x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$ باشد ، حاصل $\frac{\alpha^۲}{(\beta+۲)^۲} + \frac{\beta^۳}{(\alpha+۲)^۳}$ کدام است ؟

الف) -۲ ب) -۱ ج) ۱ د) صفر

تست : مجموع ریشه های معادله ی $۳x^۳ - ۶x^۲ - ۷x + ۲ = ۰$ کدام است ؟

الف) ۲   ب) ۲−   ج) ۳   د) ۳−

تست : اگر α و β ریشه های معادله ی $x^۲ - ۲x + \frac{۳}{۴} = ۰$ باشند حاصل $\alpha^۴ + \beta^۴$ کدام است ؟

الف) $\frac{۵}{۲}$ ب) $\frac{۵}{۸}$ ج) $\frac{۴۱}{۲}$ د) $\frac{۴۱}{۸}$

۳.۲ نوشتن معادلهٔ درجه دو با داشتن P و S

گاهی حل یک مسئله، مستلزم آن است که برایش معادله ای بنویسیم و آن را حل کنیم؛ در برخی موارد، معادلهٔ مورد نظر از درجه ۲ خواهد بود .به عنوان نمونه با داشتن مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادلهٔ درجه۲ می خواهیم معادله را به دست آوریم ، برای این کار فرض می کنیم ریشه های معادله α و β باشند ، پس معادله به شکل زیر خواهد بود :

معادلهٔ درجهٔ دوم، با مجموع ریشه‌های S و حاصل‌ضرب ریشه‌های P به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ می‌باشد.

$$(x-\alpha)(x-\beta) = ۰ \rightarrow x^۲ - \beta x - \alpha x + \alpha\beta = ۰$$

$$x^۲ - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = ۰ \rightarrow x^۲ - Sx + P = ۰$$

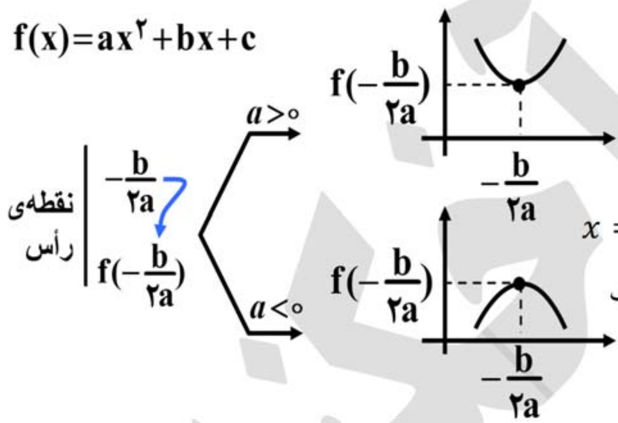
سوال : معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۲و۱ باشد.

سوال : معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ باشد.

سوال : دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها ۱/۵− و حاصل ضرب آنها ۷− باشد.

سوال : آیا مستطیلی وجود دارد که محیط آن $۱۱cm$ و مساحت آن $۶cm^۲$ باشد. اگر جواب مثبت است ، طول و عرض آن را مشخص کنید.

۴.۲ بررسی ماکزیمم و مینیمم سهمی



سهمی با ضابطهٔ $f(x) = ax^۲ + bx + c$ را در نظر می گیریم . از سال گذشته می دانیم که طول راس سهمی $x = \frac{-b}{۲a}$ اســـت . البته می توان طول و عرض راس ســـهمی را به کمک $\left(\frac{-b}{۲a}, f\left(\frac{-b}{۲a}\right)\right)$ یا $\left(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a}\right)$ بدست آورد.

الف) اگر $a > ۰$ آنگاه سهمی رو به بالاست و به ازای $x = \frac{-b}{۲a}$ کمترین مقدار خود را اختیار می کند.

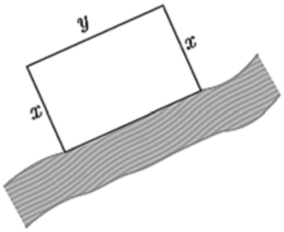
ب) اگر $a < ۰$ آنگاه سهمی رو به پایین است و به ازای $x = \frac{-b}{۲a}$ بیشترین مقدار خود را اختیار می کند.

سوال : راس سهمی به معادلهٔ $f(x) = x^۲ + ۴x + ۳$ را تعیین کنید.

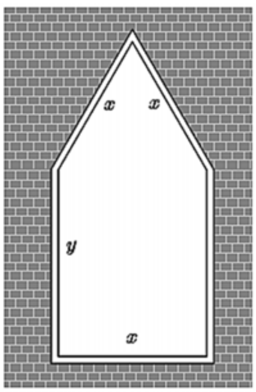
سوال : بیشترین مقدار (ماکزیمم) تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^۲ + ۲x + ۳$ را در صورت وجود مشخص کنید.

سوال : تعیین کنید کدام یک از سهمی های زیر ماکزیمم یا مینیمم دارند، ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^۲ + ۴x + ۹$ ب) $g(x) = -(x + ۱)^۲ + ۳$



سوال : یک ماهیگیر می خواهد در کنار رودخانه محوطه ای مستطیل شکل را فنس کشی کند. او تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر فنس کشی را در اختیار دارد .ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد .

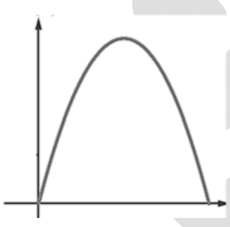


سوال : پنجره ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی الاضلاع دربالای آن می باشد .اگر محیط پنجره $۴m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد .

سوال : استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است .اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

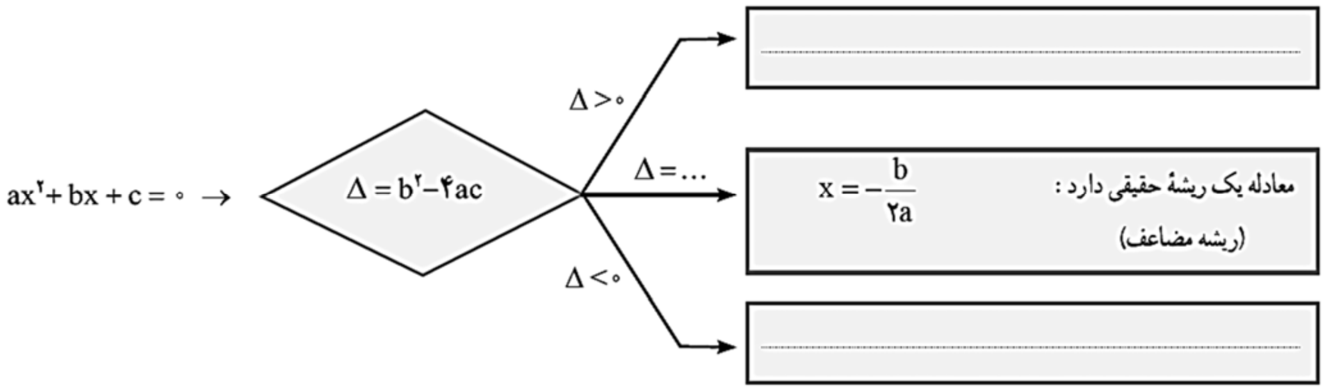
ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.



یادآوری : محل برخورد نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ با محور طول ها همان ریشه ها یا جواب های معادله ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ یا صـــفرهای تابع اســـت که چنین نقاطی دارای عرض صـــفر هستند.

سوال : آیا می توانید معادلهٔ درجه دومی بنویسید که صفرهای آن $۳-$ و$x = ۱$ با شد؟ به نظر شما این مساله چند پا سخ خواهد داشت؟

یادآوری :

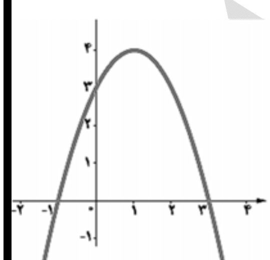


سوال : صفرهای سهمی های زیر را در صورت وجود بیابید.

۱) $y=-۲x^{۲}+۴x-۲$

۲) $y=-x^{۲}+۱$

۳) $y=(x-۱)^{۲}+۲$



تذکر : اگر به جای متغیر x در معادله مقدار صــفر را قرار دهیم ، محل برخورد نمودار با محور عرض ها بدست می آید که طول این نقطه صفر خواهد بود. $f(۰)=a(۰)^{۲}+b(۰)+c \to f(۰)=c$

سوال : نمودار سـهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ محور y ها را در نقطه ای به عرض ۳ و محورx را در نقاط به طول ۳, ۱− قطع کرده است، معادله ی سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

سوال : آیا می توانید معادلهٔ سهمی را بنویسید که محور طول ها را قطع نکند؟

سوال : جاهای خالی را تکمیل نمایید.

نمودار تقریبی سهمی با ضابطهٔ $y=ax^{۲}+bx+c$	علامت a	Δ
	+	+
	−	+
	+	۰
	−	۰
	+	−
	−	−

۵.۲ بحث در رابطه با تعداد و علامت ریشه های معادله ی درجه دوم

در یک معادلهٔ درجه دوم هرگاه تعداد ریشه ها مد نظر باشد از علامت Δ و علامت ریشه ها مورد سوال باشد از P و S استفاده می کنیم. به عنوان مثال در معادله $y = x^{۲} + ۶x + ۵$ دو ریشه ی حقیقی هم علامت منفی داریم چون که :

سوال : به نظر شما چه هنگام یک معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشه مثبت است؟

سوال : در مورد تعداد و علامت هر کدام از توابع درجهٔ دوم زیر بحث کنید.

الف) $f(x) = x^{۲} + ۴x - ۵$ ب) $g(x) = ۳x^{۲} - ۷x + ۱$ ج) $g(x) = -۲x^{۲} + ۵x - ۴$

تســت : اگر معادله ی $y = ۲x^{۲} - ۴x + m - ۳$ ، محور xها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است ؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

الف) $m > ۳$ ب) $۳ < m < ۴$ ج) $۳ < m < ۵$ د) $۴ < m < ۵$

تســت : به ازای کدام مقدار a معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{۲} - ۲(a-۲)x + ۱۴ - a = ۰$ ، دارای دو ریشــه مثبت اســت ؟ (سراسری ریاضی ۹۶)

الف) $-۲ < a < ۲$ ب) $۲ < a < ۵$ ج) $۲ < a < ۱۴$ د) $۵ < a < ۱۴$

تست : به ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $۲x^{۲} + mx + m - \frac{۳}{۲} = ۰$ دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز ا ست ؟ (سراسری تجربی ۸۱)

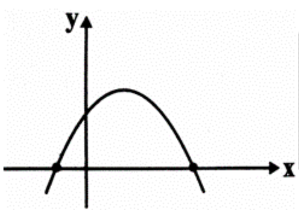
الف) $m > ۶$ یا $m < ۲$ ب) $۲ < m < ۶$ ج) $۳ < m < ۴$ د) $m > ۴$ یا $m < ۳$

تســت : به ازای کدام مجموعه مقادیر m منحنی به معادله ی $y=(m-2)x^2-2(m+1)x+12$ محور xها را در دو نقطه به طول منفی قطع می کند ؟

الف) $m>2$ ب) $-1<m<2$ ج) هر مقدار m د) هیچ مقدار m

تست : به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $y=ax^2+(a+3)x-1$ ، محور طول ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند ؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۲)

الف) $a<-9$ ب) $a<-3$ ج) $a>-1$ د) $-3<a<0$



تست : معادله ی نمودار مقابل کدام است ؟

الف) x^2+2x-3 ب) $-x^2-2x+3$

ج) $-x^2+2x-2$ د) $-x^2+2x+3$

تست : ریشه های حقیقی معادله ی $x^3-2x+1=0$ ، چگونه اند ؟ (سراسری ریاضی ۸۳)

الف) ریشه مضاعف مثبت – یک ریشه منفی ب) ریشه مضاعف منفی – یک ریشه مثبت

ج) یک ریشه مثبت – دو ریشه منفی د) دو ریشه مثبت – یک ریشه منفی

تســت : به ازای کدام مقادیر a معادله ی $x^۳+(a-۱)x^۲+(۴-a)x=۴$ ، دارای ســه ریشــه ی حقیقی مثبت متمایز است ؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۴)

الف) $a>۴$ ب) $a<۴$ ج) $a<-۴$ د) $a>-۴$

نکته : شــرط آنکه نمودار تابع درجهٔ دوم همواره بالای محور طول ها باشــد آن اســت که (همواره مثبت) مثلا معادلهٔ $y=۲x^۲+x+۱$ دارای چنین شرایطی است.

$ax^۲+bx+c>۰ \to$ 

$\to \begin{cases} a>۰ \\ \Delta<۰ \end{cases}$

سوال: به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y=(m-۱)x^۲+\sqrt{۳}x+m$ همواره بالای محور x هاست؟

تست : به ازای کدام مقدار a نمودار تابع $y=(۱-a)x^۲+۲\sqrt{۶}x-a$ ، همواره بالای محور x ها ست ؟ (سراسری ریاضی خارج کشور۹۶)

الف) $a<۱$ ب) $a<-۲$ ج) $a>۳$ د) $-۲<a<۱$

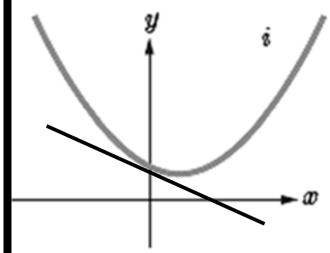
نکته : شــرط آنکه نمودار تابع درجه ی دوم همواره پایین محور طول ها باشــد آن است که : (همواره منفی)

$ax^۲+bx+c<۰ \to$ 

$\to \begin{cases} a<۰ \\ \Delta<۰ \end{cases}$

۱.۵.۲ تشخیص علامت ضرایب ax^2+bx+c به کمک نمودار

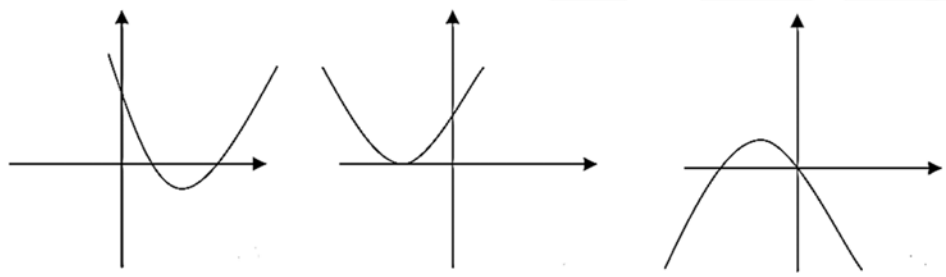
الف) تشخیص علامت a : همان طور که قبلا گفته شد اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد آنگاه $a>۰$ (مثبت) و اگر دهانه سهمی رو به پایین باشد آنگاه $a<۰$ (منفی) خواهد بود . به عنوان مثال سهمی $y=-(x+۱)^۲+۱$ دارای دهانهٔ رو به پایین است. اما سهمی $y=۲x^۲+x-۱$ دارای دهانهٔ رو به بالاست.



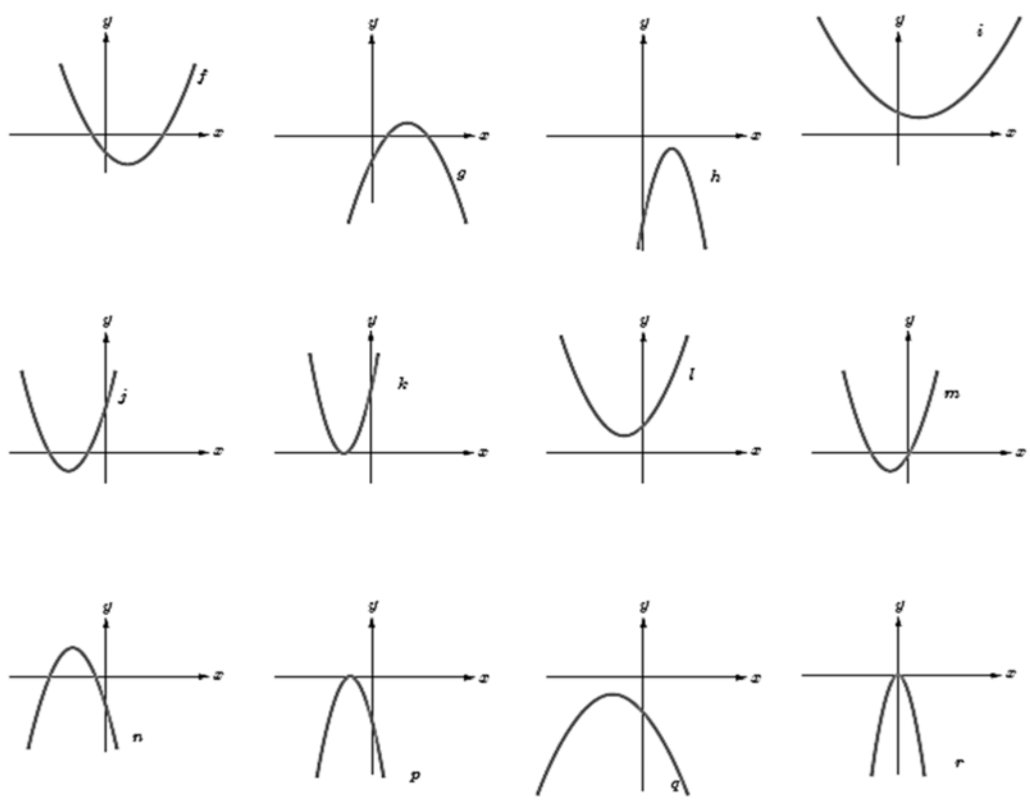
ب) تشخیص علامت b : در نقطهٔ برخورد نمودار با محور عرض ها ، بر نمودار مماسی رسم می کنیم اگر شیب این مماس مثبت باشد آنگاه $b > 0$ و اگر شیب آن منفی باشد آنگاه $b < 0$ و در حالتی که شیب آن صفر باشد ، $b = 0$ خواهد بود. به عنوان مثال در شکل مقابل شیب خط مماس رسم شده منفی است، لذا علامت b منفی خواهد بود.

ج) تشخیص علامت c : محل برخورد نمودار با محور عرض ها همان نقطهٔ c خواهد بود. به عنوان مثال در شکل بالا نقطهٔ c مثبت خواهد بود.

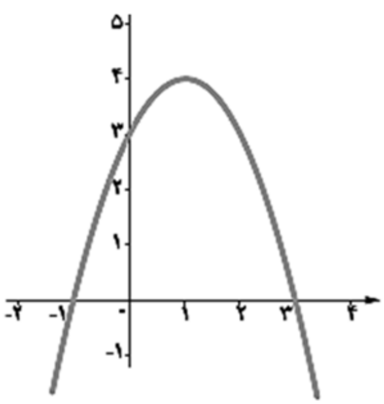
سوال : با توجه به نمودار سهمی های رسم شده به معادلهٔ $y = ax^2 + bx + c$ ، علامت هر کدام از ضرایب a, b, c را مشخص کنید.



سوال : با توجه به نمودارهای داده شده جدول زیر را کامل کنید.



ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+							+			−	
b	−							+			−	
c	−							۰			−	
تعداد ریشه‌ها	دو							دو			فاقد ریشه	
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت							یکی منفی یکی صفر			ریشه ندارد	



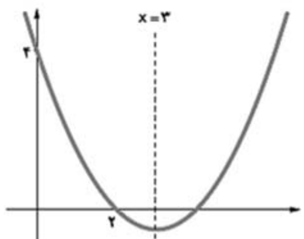
سوال : معادلهٔ سهمی داده شده را بنویسید.

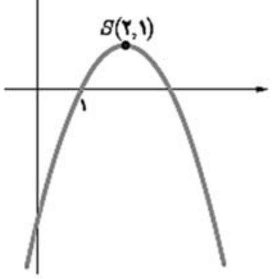
روش اول : هرگاه در یک سهمی ریشه ها و یک نقطهٔ دیگر از آن داده شده با شد می توان به کمک رابطهٔ $f(x) = ax^۲ + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ معادله را یافت. که در آن α و β ریشـــه ها هســـتند و نقطه دیگر را نیز در معادله جایگزینی می کنیم تا مقدار a بدست آید.

روش دوم : در این روش کافی است سه نقطهٔ داده شده را در معادله قرار دهیم تا پس از ساده کردن معادله ، مقادیر ضرایب را بیابیم.

تمرین : سعی کنید برای حل مسالهٔ بالا راه حل های دیگر ارائه دهید.

سوال : معادلهٔ هر کدام از سهمی های زیر را بنویسید.





سوال : تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ ریشه ندارد و حاصل $a + b + c$ منفی است. ثابت کنید که $c < ۰$ است.

اشاره : تمرین های صفحه ۱۸ کتاب درسی بررسی شود.

یک پرسش چالشی : فرض کنید یکی از ریشه های معادلهٔ $y = x^۳ - x^۲ - ۴x + ۴$ برابر با $x = ۲$ باشد ، آیا می توانید سایر ریشه های آن را بیابید؟

۲.۵.۲ تست های نمودار تابع درجه دوم

یادآوری : برای اینکه مشخص شود نمودار تابع درجه دوم از چه ناحیه هایی عبور می کند یا نمی کند باید به علامت های Δ ، P ، S و a توجه کنید.

تست : اگر عبارت $(a - ۱)x^۲ - (a - ۱)x + ۱$ به ازای جمیع مقادیر x منفی باشد حدود a کدام است ؟

الف) $۱ < a < ۵$ ب) $a < ۱$ ج) $\emptyset$ د) R

تست : نمودار تابع $y = ax^۲ + ۴x + a - ۱$ در دو طرف محور عرض ها ، محور طول ها را قطع می کند . حدود a کدام است ؟

الف) $۰ < a < ۱$ ب) $a > ۱$ ج) $-۱ < a < ۱$ د) $a < ۰$

تســت : به ازای کدام مقدار m منحنی تابع با ضــابطه ی $y = (m+۲)x^۲ + ۳x - m + ۱$ محور xها را در دو طرف مبدأ مختصات قطع می کند ؟

الف) $m > ۱$ یا $m < -۲$ ب) $-۲ < m < ۱$ ج) $m < -۲$ د) $m > ۱$

تست : نمودار تابع درجه ی دوم $y = ax^۲ + ۴x + a - ۳$ از طرف بالا بر محور طول ها مماس شده است ، طول نقطهٔ تماس کدام است؟ (ریاضی خارج کشور ۸۳)

الف) -۲ ب) ۲ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{-۱}{۲}$

تست : نمودار تابع $y = (m-۲)x^۲ + ۴mx + ۱$ همواره بالای خط $y = -۱$ قرار دارد. حدود m کدام است ؟

الف) $m \in \mathbb{R}$ ب) $۲ < m < ۴$ ج) $۲ < m < ۷$ د) $-۱ < m < ۲$

۳.۵.۲ برخی دیگر از خواص معادلهٔ درجه دوم

نکته : هرگاه در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ مجموع ضرایب صفر شود یکی از ریشه ها (۱) و دیگری $\frac{c}{a}$ است . به عنوان مثال در سهمی $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$:

نکته : هرگاه در معادله ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ داشته باشیم $b = a + c$ یکی از ریشه ها (۱-) و دیگری $-\frac{c}{a}$ است . به عنوان مثال در سهمی $۳x^۲ - ۲x - ۵ = ۰$:

تست : در معادله ی درجه دوم $x^۲ + bx + c = ۰$ با شرط $b = c + ۱$ ، یکی از ریشه های آن به کدام صورت است؟

الف) $-c$ ب) $۲b - ۱$ ج) $\frac{b}{۲}$ د) c

سوال : چرا در سهمی اگر aوc غیر هم علامت باشند ، سهمی دارای رو ریشه ی ناهم علامت است؟

سوال : اگر $x = -۱$ یکی از ریشه های معادلهٔ $۴x^۲ - mx - ۷ = ۰$ باشد ، مقدار m و ریشهٔ دیگر کدام است؟

۴.۵.۲ تشکیل معادله درجه دوم جدید (ارتباط بین دو معادله ی درجه دوم با هم)

روش کلی اول : معادله ی درجه دومی که ریشه های آن α و β باشد به صورت زیر مینویسیم که در آن $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha \times \beta$ آنگاه : $x^۲ - Sx + P = ۰$

سوال: در هر کدام از حالت های زیر معادله ی درجه دومی بنویسید که ریشه های آن β وα باشد.

الف) $\alpha = ۲$ و $\beta = ۳$ ب) $\alpha = \sqrt{۲} - ۱$ و $\beta = \sqrt{۲} + ۱$

تست : ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ یک واحدکمتراست ؟ (ت ۹۴)

الف) $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ ب) $x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

ج) $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$ د) $x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$

تست : ریشه های معادله ی درجه دوم $x^۲ + ax + b = ۰$ یک واحد از ریشه های معادله ی $۳x^۲ + ۷x + ۱ = ۰$ بیشتر است ، b کدام است ؟ (سراسری تجربی ۸۷)

الف) -۲ ب) -۱ ج) $\frac{۲}{۳}$ د) $\frac{۴}{۳}$

روش کلی دوم : در این روش هر ریشهٔ معادله ی مفروض را x و هر ریشه ی مطلوب را t در نظر میگیریم ، سپس رابطه ی بین x و t را نوشته و از آن x را برحسب t بدست آورده و در معادله ی مفروض قرار میدهیم تا پس از ساده کردن ، معادله ی مطلوب بر حسب t به دست می آید .

تست : ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ یک واحد کمتر است ؟

الف) $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ ب) $x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$

ج) $x^۲ - ۵x + ۲ = ۰$ د) $x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$

تست :ریشه های معادله ی $۳x^۲ + ax + b = ۰$ از ریشه های معادله ی $۳x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ یک واحد بیشتر است ، b کدام است؟ (ت خ ۸۶)

الف) -۵ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶

تست :اگر هر یک از ریشه های معادله ی $۳x^۲ + ax + b = ۰$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله ی $۴x^۲ - ۷x + ۳ = ۰$ باشد ، a کدام است؟ (ت ۸۶)

الف) -۱۴ ب) -۱۲ ج) -۸ د) -۶

نکته : تشکیل معادله ی درجه دومی که ریشه هایش ارتباط خاصی با ریشه معادله $ax^۲ + bx + c = ۰$ دارد :

الف) معادله ای که ریشه هایش قرینه ی ریشه های معادله $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد،

به شکل $ax^۲ - bx + c = ۰$ می باشد .

ب) معادله ای که ریشه هایش عکس ریشه های معادله ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد،

به شکل $cx^۲ + bx + a = ۰$ می باشد .

ج) معادله ای که ریشه هایش قرینه و عکس ریشه های معادله ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد،

به شکل $cx^۲ - bx + a = ۰$ می باشد .

د) معادله ای که ریشه هایش k برابر ریشه های معادله ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد،

به شکل $ax^۲ + kbx + k^۲c = ۰$ می باشد .

ی) معادله ای که ریشه هایش k واحد از ریشه های معادله ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ بیشتر باشد، به شکل $a(x-k)^۲ + b(x-k) + c = ۰$ می باشد .

تســـت : اگر α و β ریشـــه های معادله ی $x(۵x+۳)=۲$ باشـــند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب معادله ی $۴x^{۲}-kx+۲۵=۰$ به صورت $\left\{\frac{۱}{\alpha^{۲}},\frac{۱}{\beta^{۲}}\right\}$ می باشد ؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

الف) ۲۷ ب) ۲۸ ج) ۲۹ د) ۳۱

تســـت : اگر α و β ریشـــه های معادله ی $۲x^{۲}-۳x=۱$ باشـــند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب های معادله ی $۸x^{۲}+kx-۱=۰$ به صورت $\{\alpha^{۲}\beta,\alpha\beta^{۲}\}$ است ؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۰)

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۹

تســـت : اگر α و β ریشـــه های معادله ی $۲x^{۲}-۳x-۴=۰$ باشـــند، مجموعه جواب کدام معادله به صـــورت $\left\{\frac{۱}{\alpha}+۱,\frac{۱}{\beta}+۱\right\}$ است ؟ (ر۹۲)

الف) $۴x^{۲}-۵x+۱=۰$ ب) $۴x^{۲}-۳x+۱=۰$

ج) $۴x^{۲}-۵x-۱=۰$ د) $۴x^{۲}-۳x-۱=۰$

تســـت : اگر α و β ریشـــه های معادله $x^{۲}+kx+۱=۰$ باشـــند به ازای کدام مقدار k ریشـــه های معادله ی مقدار $x^{۲}-۴x+۱=۰$ به صورت $\left\{\sqrt{\alpha}و\sqrt{\beta}\right\}$ است؟

الف) ۱۲− ب) ۱۴− ج) ۱۰− د) ۸−

تســـت : اگر a و b اعداد صــحیحی بوده و یکی از جواب های صــحیح معادله $x^۴ + ax^۲ + b = ۰$ به صـــورت $x = \sqrt{۳ + \sqrt{۲}} + \sqrt{۳ - \sqrt{۲}}$ باشد $a + b$ کدام است ؟

الف) ۴−　　ب) ۲−　　ج) ۲　　د) ۴

تست : به ازای کدام مقدار m هر یک از ریشــه های معادله ی درجۀ دوم $۸x^۲ - mx - ۸ = ۰$ توان ســوم ریشــه های معادلۀ $۲x^۲ - x - ۲ = ۰$ است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۹۶)

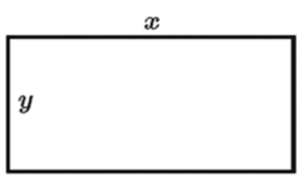
الف) ۳　　ب) ۴　　ج) ۵　　د) ۶

معادلات گویا

درس سوم

۳ معادلات گویا و گنگ

۱.۳ معادلات گویا



درس را با ذکر یک مثال شروع می کنیم : فرض کنید در یک مستطیل ، نسبت مجموع طول و عرض آن به طول آن برابر با شد با نسبت طول به عرض مستطیل.حال اگر عرض مستطیل را عدد یک در نظر بگیریم ، طول مستطیل را بیابید.

چنین معادلاتی که در بالا مورد بررسی قرار گرفت را معادلات گویا تعریف می کنیم.

بیشتر بدانیم : مستطیلی با شرایط بالا را مستطیل طلایی در نظر می گیریم و مقدار طول بدست آمده را ، نسبت طلایی تعریف می کنیم که در دوران باستان مورد توجه خاصی قرار می گرفت. این نسبت در طبیعت وجود دارد و در باستان آن را نسبت الهی می نامیدند که در حالت اعشاری برابر با ۱/۶۱۸ می باشد.

یافتن کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) چند جمله ای ها: برای این کار پس از تجزیه کردن چند جمله ای ها کافی است عوامل مشترک با بزرگترین توان را در عوامل غیر مشترک ضرب کنیم.

سوال : در هر دسته از چند جمله ای های زیر ک . م . م را بیابید.

الف) $x^2 - 1 , x + 1$

ب) $x^2 - 2x , x^2 - 3x + 2$

پ) $9 - x^2 , x - 3 , x$

د) $x^3 + 1 , x + 1$

روش حل معادلات گویا : همان طور که گفته شد ، معادلات گویا ، معادلاتی هستند که صورت و مخرج آنها به صورت چندجمله ای می باشد. برای حل یک معادلهٔ گویا می توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج ها، در کوچک ترین مضرب مشترک مخرج ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود .جواب های به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کنند و این جواب ها باید در معادلهٔ اولیه صدق نمایند.

سوال : هر کدام از معادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب های مورد قبول را مشخص کنید.

الف) $\frac{x}{x^۲-۱}-\frac{۲}{x+۱}=\frac{x-۲}{x^۲-x}$

ب) $\frac{۳}{x^۲}-۱۲=۰$

ج) $\frac{۲}{k}-\frac{۳k}{k+۲}=\frac{k}{k^۲+۲k}$

د) $\frac{۱}{k^۲-۲k+۱}=\frac{۳}{k^۲-۲k+۳}$

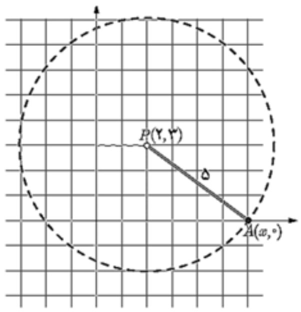
ه) $\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x-۳}=\frac{۱۲}{۹-x^۲}$

و) $\frac{۱}{(k-۲)^۲}=\frac{۳}{k^۲-۲k+۳}$

سوال : یک معادلهٔ گویا بنویسید که جملهٔ مقابل را نقض کند : جواب هیچ معادلهٔ گویا نمی تواند صفر باشد.

۲.۳ معادلات رادیکالی

سوال : نقطه ای روی محور طول ها بیابید که فا صلهٔ آن از نقطهٔ $p(۲,۳)$ برابر ۵ با شد. م سئله چند جواب دارد؟



معادلاتی مانند بالا که در آن عبارتِ رادیکالیِ شامل مجهول وجود دارد، یک معادلهٔ رادیکالی نامیده می شود.

روش حل معادلهٔ رادیکالی : برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می توان جملات را طوری به طرفین تساوی جابه جا کرد که عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد .سپس با توان رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج نمود .پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می کنند. به حل معادلهٔ بالا توجه کنید:

سوال : هر کدام از معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب ها مورد قبول است؟

الف) $۲x = ۱ - \sqrt{۲ - x}$

ب) $۲\sqrt{۲t - ۱} - t = ۱$

ج) $\sqrt{x + ۷} = \sqrt{x} + ۱$

د) $۲ + \sqrt{۲x^۲ - ۵x + ۲} = x$

ک) $\sqrt{x+۲}=x-۴$

گ) $\frac{۱}{\sqrt{u-۳}}-\frac{۲}{\sqrt{u}}=۰$

ل) $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$

و) $x+\sqrt{x}=۶$

ی) $m+\frac{۱}{\sqrt{m}}=۲$

سوال : آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

سوال : عددی صحیح بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن باشد .مسئله چند جواب دارد؟

سوال : معادله ای شاملِ مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه های آن باشد .پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

سوال : علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه ای منتشر می کند .پس از تایپ مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند. اگر رضا به او کمک نماید، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می انجامد .حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

سوال : اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند، می توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند .با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟

سوال : فرمول $T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ زمان نوسان (یک حرکت رفت و برگشت) پاندولی به طول l متر را بر حسب ثانیه نشان می دهد. اگر هر نوسان پاندول ۱/۵ ثانیه زمان ببرد ، مطلوب است محاسبهٔ طول آونگ. (مقدار g را برابر $۹/۸\frac{m}{s^۲}$ قرار دهید.)

۱.۲.۳ تست های تکمیلی معادلات گویا و رادیکالی

تست : جواب های معادلهٔ $\frac{x+۱}{x+۳} = \frac{x-۲}{x-۴}$ کدام است؟

الف) $x = \frac{۱}{۳}$ ب) $x = \frac{۱}{۲}$ ج) $x = \frac{۱}{۴}$ د) $x = ۱$

تست : از معادلهٔ $\frac{x-۱}{x-۲} = \frac{x+۱}{x} - \frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}$ چند مقدار برای x بدست می آید؟

الف) ۱   ب) ۲   ج) ۳   د) هیچ

تست : از حل معادلهٔ $\frac{۳x-۲}{x}+\frac{۲x+۵}{x+۳}=۵$ مقدار $\sqrt{۷-x}$ کدام است؟

الف) ۴ ب) ۳ ج) ۱ د) جواب ندارد

تست : از حل معادلهٔ $\frac{۵}{۵k^۲-k-۲۰}=\frac{۳}{۳k^۲-۳k-۲۸}$ چند مقدار برای k بدست می آید؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۱ د) هیچ

تست : به ازای چه مقدار k معادلهٔ $\frac{۳t^۲+k}{(t^۲+۱)^۲-۶۸}=\frac{۴-t}{۲-۲t}$ دارای جواب $t=-۳$ است؟

الف) ۲۸ ب) -۱ ج) ۱ د) ۲۹

تست : مقدار a چقدر باشد تا $x=۲$ جواب معادلهٔ $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{x}{a-x}$ شود؟

الف) صفر ب) -۲ ج) ۱ د) ۴

تست : معادلهٔ $\frac{x+۱}{x-۱}-\frac{x-۱}{x+۱}=۳x\left(۱-\frac{x-۱}{x+۱}\right)$ چند جواب دارد؟

الف) جواب ندارد ب) ۳ ج) ۱ د) ۲

تست : منحنی $y=x^۲-x+۱$ و خط $y=x$ چه وضعی دارند؟

الف) در یک نقطه متقاطع اند ب) در دو نقطه متقاطع اند ج) مماس اند د) یکدیگر را قطع نمی کنند

تست : معادلهٔ $\frac{۳}{x^۲-۹}=\frac{۲}{x+۳}+\frac{۱}{x-۳}$ چند جواب دارد؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۱ د) جواب ندارد

تست : در معادلهٔ کسری $\frac{۱}{۲x+۳}+\frac{۱}{x-۱}=۱$ حاصل ضرب جواب ها کدام است؟

الف) $\frac{۳}{۲}$ ب) $\frac{۵}{۲}$ ج) $\frac{-۵}{۲}$ د) $\frac{-۳}{۲}$

تست : اگر $x=۴$ یکی از جواب های معادلهٔ $\sqrt{۵x-x^۲}=x+a$ باشد جواب دیگر آن کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) ۲ ج) ۳ د) جواب دیگر ندارد

تست : اگر $x=۴$ یکی از جواب های معادلهٔ $x\sqrt{۴-x^۲}+۳\sqrt{۴-x^۲}=۰$ چند جواب دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

تست : ریشه های معادلهٔ رادیکالی $۲x-\sqrt{x+۱۲}=۴$ چگونه است؟

الف) یک ریشه منفی ب) یک ریشه مثبت ج) دو ریشه مثبت د) یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت دارد

تست : معادلهٔ $(x^۲-۹)\sqrt{x-۲}=۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

تست : معادله ی $x^2 - x - 4\sqrt{x^2 - x + 19} + 14 = 0$ چند ریشه ی حقیقی دارد ؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

تست: حاصل ضرب ریشه های معادله ی $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است ؟ (ر۹۴)

الف) ۱ ب) -2 ج) ۳ د) ۴