

تاریخ :

وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۲۰

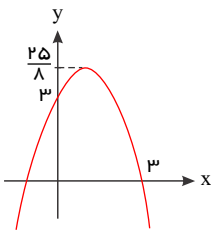
علیرضا فیضیان

موضوع

۱. اگر α و β ریشه‌های $x^2 - (m+3)x + 8 = 0$ باشند، مقدار m کدام باشد تا α و β جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند؟
 (۱) $m = -3$ یا $m = 9$ (۲) $m = -9$ یا $m = 3$ (۳) $m = 3$ یا $m = 9$ (۴) $m = -3$ یا $m = -9$

۲. اگر بین مقادیری که تابع $f(x) = x^2 + (4m-1)x + 1$ را صفر می‌کند، رابطه‌ی $x' - x'' = \sqrt{x'} + \sqrt{x''}$ برقرار باشد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

- (۱) $\{\frac{3}{4}\}$ (۲) $\{-\frac{1}{2}\}$ (۳) $\{\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\}$ (۴) $\{2\}$



۳. شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است، a کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{9}$ (۲) $-\frac{1}{9}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{2}{5}$

۴. نقطه A روی خط $y = 2x - 1$ طوری قرار دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطه $B(0, -1)$ و $C(2, 3)$ برابر $\sqrt{45}$ است. فاصله A از مبدأ مختصات کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

۵. دایره‌ای به مساحت 9π بر دو خط موازی و غیرمنطبق $3x - 4y = 1$ و $8y + nx = m$ مماس است. مقدار $m + 3n$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) -20 (۲) 40 (۳) -60 (۴) 80

۶. در مثلث ABC با رئوس $A(1, 1)$ ، $B(2, -1)$ و $C(6, 2)$ ، فاصله ارتفاع رسم شده از رأس A و عمودمنصف وارد بر ضلع BC کدام است؟

- (۱) $2, 1$ (۲) $2, 4$ (۳) $2, 7$ (۴) 3

۷. اگر در معادله درجه دوم $x^2 - (m+1)x + m = 0$ ، $m > 0$ و یکی از ریشه‌ها از دو برابر ریشه دیگر ۳ واحد بزرگ‌تر باشد، m کدام است؟

- (۱) 5 (۲) 4 (۳) 3 (۴) 1

۸. در مربع $ABCD$ ، مختصات رأس A به صورت $A(3, 2)$ است و ضلع BC روی خط $y = kx + 1$ قرار دارد. اگر مساحت این مربع ۵ باشد، حاصل جمع مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۹. مجموع فواصل نقطه $A(\alpha, 2\alpha)$ تا دو نقطه مبدأ مختصات و $M(2, 4)$ برابر $2\sqrt{5}$ است. دقیق‌ترین محدوده α کدام است؟

- (۱) $\alpha \in \mathbb{R}$ (۲) $\alpha \leq 0$ (۳) $\alpha > 2$ (۴) $\alpha \in [0, 2]$

۱۰. خطوط $y = 2$ ، $y = 5$ و $3x - 4y + 11 = 0$ منطبق بر سه ضلع یک لوزی هستند. کدام یک از نقاط زیر می‌تواند یکی از رئوس این لوزی باشد؟

- (۱) $(-6, 2)$ (۲) $(4, 5)$ (۳) $(8, 2)$ (۴) $(-1, 5)$

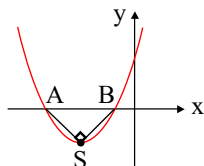
۱۱. مثلث ABC با رئوس $A(-1, 2)$ ، $B(3, 2m+1)$ و $C(-2, -2)$ در رأس A قائمه است. طول ارتفاع AH کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۲) $\frac{17}{6}$ (۳) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ (۴) $\sqrt{34}$

۱۲. به ازای چه مقدار از a ، مینیمم تابع $y = ax^2 - 4x + a$ ، برابر ۲ است؟

(۱) $1 - \sqrt{5}$ (۲) $1 + \sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{2} - 1$ (۴) $\sqrt{5} - 1$

۱۳. نمودار تابع $y = 5x^2 + 12x + a$ به صورت مقابل است. اگر مثلث ABS در رأس S قائمه باشد، مقدار a کدام است؟ (S رأس سهمی است.)



(۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۴

۱۴. اگر $x = -1$ تنها صفر تابع $f(x) = \frac{ax^2 + 2x - 1}{9x^2 + ax + b}$ باشد، مقدار b کدام است؟

(۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۱۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3 + 14\beta$ کدام است؟

(۱) ۵۷ (۲) ۴۲ (۳) ۷۲ (۴) -۲۷

۱۶. اگر α و β ریشه‌های معادله $x(2x - 3) = 4$ باشند، کدام معادله دارای ریشه‌های $1 - \frac{2}{\alpha}$ و $1 - \frac{2}{\beta}$ می‌باشد؟

(۱) $2x^2 + 7x - 1 = 0$ (۲) $2x^2 + 5x - 1 = 0$

(۳) $2x^2 - 7x + 1 = 0$ (۴) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

۱۷. اگر معادله $\frac{x}{x-2} + \frac{x+a}{x^2-4} = 1$ ریشه نداشته باشد، آن‌گاه حاصل ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟

(۱) -۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) -۲۰

۱۸. معادله $\sqrt{\sqrt{x+3}-x} = 1 + \sqrt{1-x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

(۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹. اگر نقطه $A(0, 6)$ قرینه نقطه B نسبت به نقطه $M(4, 7)$ باشد، مجموع طول و عرض نقطه B کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۲۰. به ازای چه حدودی از a تابع درجه دوم $f(x) = (a-1)x^2 - 2\sqrt{3}x + (a+1)$ از ناحیه سوم و چهارم نمی‌گذرد؟

(۱) $a \geq 2$ (۲) $1 \leq a \leq 2$ (۳) R (۴) $a > 1$

تاریخ :

وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۲۰

موضوع

علیرضا فیضیان

۱. گزینه ۲ نکته ۱: اگر a, b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه b واسطه‌ی حسابی دو عدد a و c است؛ یعنی:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

نکته ۲: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

α, β و $\alpha + \beta$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند، پس مطابق نکته داریم:

$$\beta = \frac{\alpha + (\alpha + \beta)}{2} \Rightarrow 2\beta = 2\alpha + \beta \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

از طرفی چون α و β ریشه‌های $x^2 - (m+3)x + 8 = 0$ هستند، داریم:

$$\begin{cases} P = \alpha\beta = 8 \\ S = \alpha + \beta = m + 3 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = m + 3 \xrightarrow{\beta=2\alpha} 3\alpha = m + 3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{m+3}{3} \\ \beta = \frac{2}{3}(m+3) \end{cases} (*)$$

$$\alpha\beta = 8 \xrightarrow{(*)} \frac{2}{9}(m+3)^2 = 8 \Rightarrow (m+3)^2 = 36 \Rightarrow m+3 = \pm 6 \Rightarrow m = 3 \text{ یا } m = -9$$

۲. گزینه ۲ اگر x' و x'' جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ باشند، در این صورت طرفین رابطه داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x' - x'')^2 = (\sqrt{x'} + \sqrt{x''})^2 \Rightarrow x'^2 + x''^2 - 2x'x'' = x' + x'' + 2\sqrt{x'x''}$$

$$\Rightarrow (S^2 - 2P) - 2P = S + 2\sqrt{P} \Rightarrow S^2 - 4P - S - 2\sqrt{P} = 0 \quad (1)$$

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = 1 - 4m, P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = 1 \xrightarrow{(1)} (1 - 4m)^2 - 4 - (1 - 4m) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 16m^2 - 4m - 6 = 0 \Rightarrow 8m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, m = \frac{3}{4}$$

اما اگر $m = \frac{3}{4}$ ، آن‌گاه $x' = x'' = -1$ که غیر قابل قبول اند پس $m = -\frac{1}{2}$

۳. گزینه ۳

$$f(0) = 3 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + 3$$

یکی از ریشه‌ها $x = 3$ است، پس $f(3) = 0$ می‌باشد.

$$9a + 3b + 3 = 0 \xrightarrow{+3} 3a + b + 1 = 0$$

عرض رأس سهمی هم $\frac{25}{8}$ است.

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{25}{8} \Rightarrow -\frac{b^2 - 4a(3)}{4a} = \frac{25}{8} \Rightarrow -b^2 + 12a = \frac{25}{2}a \xrightarrow{\times 2} -2b^2 + 24a = 25a \Rightarrow a = -2b^2$$

به جای a در معادله‌ی $3a + b + 1 = 0$ مقدار $-2b^2$ را قرار می‌دهیم.

$$3(-2b^2) + b + 1 = 0 \Rightarrow -6b^2 + b + 1 = 0 \Rightarrow 6b^2 - b - 1 = 0$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2(6)} = \frac{1 \pm 5}{12} \begin{cases} \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

چون $a < 0$ و طول رأس سهمی $(-\frac{b}{2a})$ هم مثبت است پس باید $b > 0$ باشد و $b = -\frac{1}{3}$ قابل قبول نیست.

$$\frac{x(x+2)+x+a}{x^2-4} = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + a = x^2 - 4 \Rightarrow 3x + a = -4 \Rightarrow x = \frac{-4-a}{3}$$

برای این که ریشه بدست آمده قابل قبول نباشد باید مخرج کسر را صفر کند پس ابتدا ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right. \xrightarrow{x = \frac{-4-a}{3}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{-4-a}{3} = 2 \Rightarrow -4-a = 6 \Rightarrow a = -10 \\ \frac{-4-a}{3} = -2 \Rightarrow -4-a = -6 \Rightarrow a = 2 \end{array} \right.$$

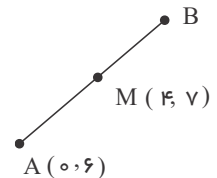
$$\Rightarrow a = -10 \times 2 = -20 \text{ حاصل ضرب مقادیر ممکن برای } a$$

۱۸. گزینه ۲ طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - x &= 1 + 1 - x + 2\sqrt{1-x} \\ \Rightarrow \sqrt{x+3} &= 2 + 2\sqrt{1-x} \Rightarrow x+3 = 4 + 4 - 4x + 8\sqrt{1-x} \\ \Rightarrow 5x - 5 &= 8\sqrt{1-x} \Rightarrow 25(x-1)^2 = 64(1-x) \Rightarrow 25(x-1)^2 + 64(x-1) = 0 \\ \Rightarrow (x-1)(25x - 25 + 64) &= 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (25x + 39) = 0 \\ \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{39}{25} \end{cases} & \text{ جواب } x = -\frac{39}{25} \text{ در معادله صدق نمی‌کند و معادله دارای یک جواب } x = 1 \text{ است.} \end{aligned}$$

۱۹. گزینه ۴ اگر نقطه A را نسبت به نقطه M قرینه کنیم تا نقطه B به دست آید، نقطه M وسط پاره خط AB است. داریم:

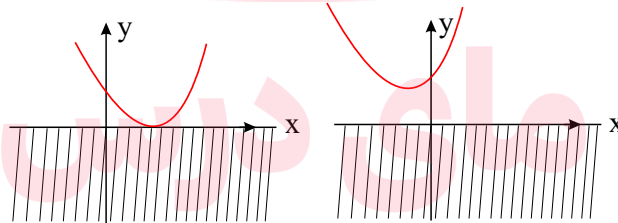
$$M \begin{cases} xM = \frac{xA + xB}{2} \Rightarrow xB = 2xM - xA \\ yM = \frac{yA + yB}{2} \Rightarrow yB = 2yM - yA \end{cases}$$



در نتیجه مختصات نقطه B به صورت زیر است:

$$B \begin{cases} x = 2(4) - 0 = 8 \\ y = 2(7) - 6 = 8 \end{cases} \Rightarrow xB + yB = 8 + 8 = 16$$

۲۰. گزینه ۱ سهمی که از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند باید به یکی از صورت‌های زیر باشد.



توجه: برای اینکه سهمی مینیمم داشته باشد باید ضریب x^2 مثبت باشد. برای اینکه سهمی بر محور xها مماس شود و یا ریشه نداشته باشد باید $\Delta \leq 0$.

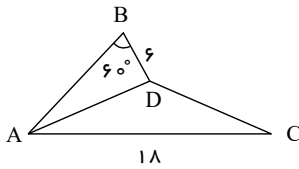
$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1 \quad (1)$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{3})^2 - 4(a-1)(a+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 12 - 4a^2 + 4 \leq 0 \Rightarrow 4a^2 \geq 16 \Rightarrow a^2 \geq 4 \Rightarrow |a| \geq 2$$

$$\Rightarrow a \leq -2 \text{ یا } a \geq 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a \geq 2$$



۱. در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه A است. مساحت مثلث ACD کدام است؟

- (۱) $9\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$
 (۳) $27\sqrt{3}$ (۴) $6\sqrt{3}$

۲. پاره خط AB به طول L مفروض است. اگر با توجه به مقدار L ، فقط یک نقطه در صفحه وجود داشته باشد که از A به فاصله 4 و از B به فاصله 6 باشد، آن گاه مجموع مقادیر ممکن برای L کدام است؟

- (۱) 6 (۲) 12 (۳) 10 (۴) 9

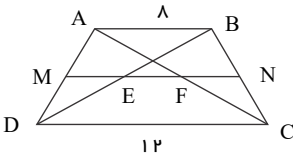
۳. چند مثلث متمایز با طول اضلاع $BC = 6$ ، $AB = 5$ و به مساحت 21 وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۴. در مربع $ABCD$ ضلع CD را از طرف C به اندازه ضلع مربع تا نقطه E امتداد می‌دهیم، به طوری که AE ضلع BC را در F قطع کند. مساحت چهار ضلعی $AFCD$ چند برابر مساحت مربع است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{7}$

۵. در شکل زیر، $ABCD$ دوزنقه و M و N وسط دو ساق است. طول EF کدام است؟



- (۱) 2 (۲) 1.5
 (۳) 1 (۴) $\frac{3}{4}$

۶. روی پاره خط $AB = a$ دو نقطه M و N را به قسمتی اختیار می‌کنیم که $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{AN} = 2$. در این صورت طول پاره خط MN چقدر است؟

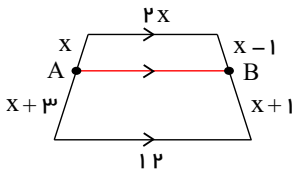
- (۱) $\frac{a}{4}$ (۲) $\frac{a}{2}$ (۳) $\frac{a}{3}$ (۴) $\frac{2a}{3}$

۷. اگر $k = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ و $k > 0$ ، آنگاه حاصل $\sqrt{\frac{2a^2 + 3c^2}{2b^2 + 3d^2}}$ کدام است؟

- (۱) k (۲) $-k$ (۳) $\frac{1}{k}$ (۴) $-\frac{1}{k}$

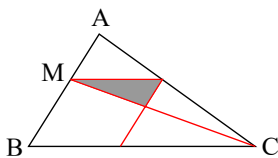
۸. در مثلث ABC ، رأس B را به نقطه O وسط میانه AM وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در N قطع کند. چه کسری از BN است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$



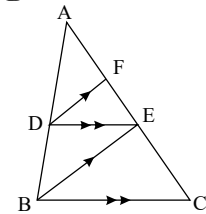
۹. در دوزنقه‌ی روبه‌رو، طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) 9 (۲) 7.5
 (۳) 10 (۴) 8



۱۰. در شکل زیر $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ ، مساحت مثلث سایه زده چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع است؟

- (۱) 20 (۲) 24
 (۳) 25 (۴) 30



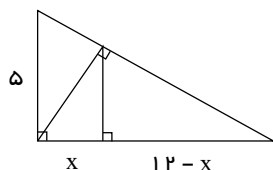
۱۱. در شکل مقابل با فرض $\frac{EF}{AC} = \frac{6}{25}$ ، حاصل $\frac{DE}{BC}$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) 0.2 (۲) 0.3
 (۳) 0.4 (۴) 0.5

۱۲. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد مربعی محاط کرده‌ایم. طول ضلع این مربع کدام است؟

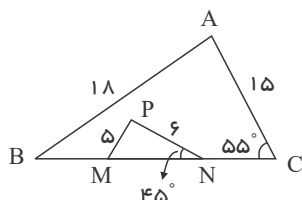
- (۱) $2\sqrt{2} - 2$ (۲) $2\sqrt{3} - 3$ (۳) $\sqrt{3} - 1$ (۴) $4 - 2\sqrt{3}$

۱۳. در شکل ارتفاع هر دو مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟



- (۱) $\frac{300}{169}$
 (۲) $\frac{144}{25}$
 (۳) $\frac{25}{13}$
 (۴) $\frac{144}{13}$

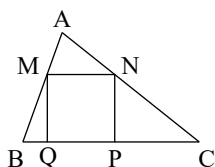
۱۴. در شکل روبه‌رو، $BM = MN = NC$. اندازه‌ی زاویه‌ی MPN چقدر است؟



- (۱) 70°
 (۲) 75°
 (۳) 80°
 (۴) 85°

۱۵. در مستطیل ABCD از رأس A، پاره خط AH را بر قطر BD عمود می‌کنیم، طوری که $HB = 3DH$. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی وسط ضلع AB از قطر مستطیل

برابر $2\sqrt{3}$ باشد. آن گاه اندازه‌ی ضلع AD چقدر است؟

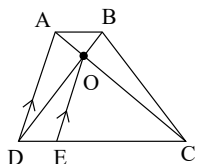


- (۱) ۱۲
 (۲) ۸
 (۳) $6\sqrt{2}$
 (۴) $3\sqrt{6}$

۱۶. در شکل زیر اگر $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$ ، مساحت مربع MNPQ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟

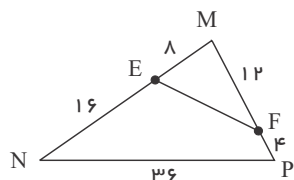
- (۱) ۳۶
 (۲) ۴۸
 (۳) ۶۴
 (۴) ۵۴

۱۷. در دوزنقه‌ی ABCD شکل زیر، $OE \parallel AD$ است. اگر $\frac{DE}{DC} = \frac{1}{5}$ باشد، مساحت مثلث AOB چه کسری از مساحت دوزنقه است؟



- (۱) $\frac{3}{10}$
 (۲) $\frac{2}{25}$
 (۳) $\frac{1}{25}$
 (۴) $\frac{2}{15}$

۱۸. در شکل زیر، محیط مثلث MEF چقدر است؟



- (۱) ۳۸
 (۲) ۳۲
 (۳) ۳۴
 (۴) ۳۶

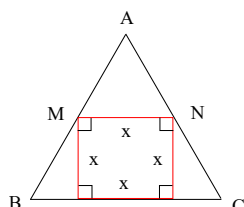
۱۹. نسبت مساحت دو مثلث مشابه ABC و $A'B'C'$ به صورت $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{9}{16}$ است. اگر بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC، واحد و نسبت کوچک‌ترین ضلع

به بزرگ‌ترین ضلع در مثلث $A'B'C'$ باشد، اندازه‌ی ضلع کوچک‌تر در مثلث $A'B'C'$ چند واحد است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$
 (۲) $\frac{14}{3}$
 (۳) $\frac{56}{9}$
 (۴) $\frac{28}{9}$

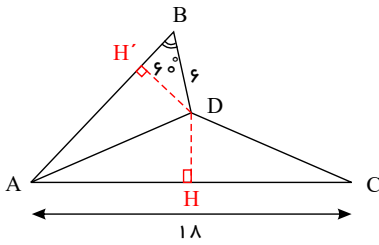
۲۰. در داخل مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $\sqrt{3}$ ، یک مربع محاط شده است. ضلع این مربع کدام است؟

- (۱) $2(3 - \sqrt{3})$
 (۲) $3(2 - \sqrt{3})$
 (۳) $2 - \sqrt{3}$
 (۴) $4 - \sqrt{3}$



۱. گزینه ۳

ارتفاع دو مثلث $\triangle ADC$ ، $\triangle ADB$ را رسم می‌نماییم.



با توجه به تصویر در مثلث $\triangle ADB$ داریم:

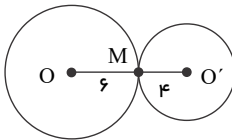
$$\sin 60^\circ = \frac{DH'}{DB} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DH'}{6} \rightarrow DH' = 3\sqrt{3}$$

نقطه D روی نیمساز قرار دارد پس از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، یعنی:

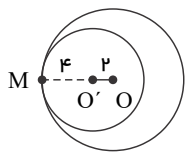
$$DH' = DH = 3\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} DH \times AC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 18 = 27\sqrt{3}$$

۲. گزینه ۳ با توجه به اینکه فقط یک نقطه با ویژگی ذکر شده وجود دارد می‌توان دو حالت در نظر گرفت:



$$\rightarrow L = OM + O'M = 6 + 4 = 10 \text{ :حالت اول:}$$



$$L = OM - O'M = 6 - 4 = 2 \text{ :حالت دوم:}$$

پس L دو مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد.

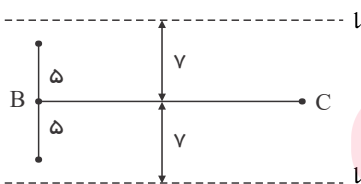
۳. گزینه ۱ با توجه به اطلاعات مسئله یعنی مساحت و طول ضلع می‌توان ارتفاع وارد بر بعضی اضلاع را محاسبه نمود:

$$S = \frac{1}{2} BC \times h_{BC} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \times 6 \times h_{BC} = 21 \rightarrow h_{BC} = 7$$

حال می‌توان گفت رأس در ۷ واحدی از ضلع BC قرار دارد، یعنی رأس A یا روی خط l قرار می‌گیرد یا l' .

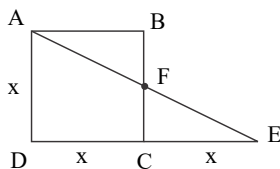
حال به مرکز B و شعاع ۵ دایره رسم می‌نماییم تا خط l یا l' قطع نماید، زیرا ضلع AB برابر ۵ واحد است. دایره مرسوم هیچ برخوردی با l یا l' ندارد؛



بنابراین هیچ مثلثی قابل رسم نمی‌باشد.

www.my-dars.ir

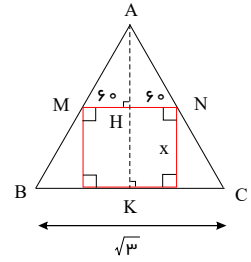
۴. گزینه ۳ ابتدا یک تصویر کلی از مسئله رسم می‌نماییم. با توجه به شکل در مثلث $\triangle ADE$ داریم:



$$AD \parallel CF \rightarrow \frac{CF}{AD} = \frac{CE}{DE} \rightarrow \frac{CF}{x} = \frac{x}{2x} \rightarrow CF = \frac{x}{2}$$

حال می‌توان مساحت دوزنقه را به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} \Delta AMN &\sim \Delta ABC \\ \frac{AH}{AK} &= \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{AK-x}{AK} = \frac{x}{\sqrt{3}}, AK = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2} \\ 1 - \frac{x}{\frac{3}{2}} &= \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{3}{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow x = 3(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$



راه حل دوم:

$$\begin{cases} AK = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2} \text{ (ارتفاع در مثلث متساوی الاضلاع } ABC) \\ AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times MN = \frac{\sqrt{3}}{2} x \text{ (ارتفاع در مثلث متساوی الاضلاع } AMN) \end{cases}$$

$$\frac{AK=AH+HK}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x + x}{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 3(2 - \sqrt{3})$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تاریخ :

وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۲۲

علیرضا فیضیان

موضوع

۱. اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{3}(x - 3)$ باشد، در بازه‌ی (a, b) نمودار تابع $f \circ g$ در زیر محور x ها قرار می‌گیرد. بیشترین

مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

۲. اگر $f^{-1} = \{(2, 1), (3, -2), (4, -1)\}$ و $f - 2g = \{(-2, -1), (-1, 8)\}$ و تابع g یک‌به‌یک باشد، کدام نقطه‌ی زیر حتماً روی g^{-1}

قرار دارد؟

- (۱) $(-1, -2)$ (۲) $(-2, -1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, -2)$

۳. کدام گزینه بیانگر تابعی وارون‌پذیر است؟

(۱) $y = |x| + 1 - x$ (۲) $y = 1 - 3|x| + x$

(۳) $y = 1 + 3|x| - x$ (۴) $y = 1 - 3x + |x|$

۴. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه با توجه به تعریف جزء صحیح کدام گزاره همواره صحیح است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۱) $[x + y] = [x] + [y]$ (۲) $[xy] = [x][y]$

(۳) $[x - y] = [x] - [y]$ (۴) $[x + 1] = [x] + 1$

۵. وارون $f(x) = 2 - \sqrt{3 - x}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۱) $(1, -1)$ (۲) $(1, 2)$ (۳) $(-1, 0)$ (۴) $(-1, 2)$

۶. اگر توابع f و g به صورت $f: N \rightarrow N$ و $f(x) = 2x$ و $g = \{(1, \frac{2}{3}), (4, -1), (5, 1), (6, 4)\}$ تعریف شوند، تابع $f + g^{-1}$ کدام است؟

(۱) $\{(1, 7), (4, 14)\}$ (۲) $\{(5, 3), (6, 12)\}$

(۳) $\{(1, \frac{1}{3}), (4, 7)\}$ (۴) $\{(5, 11), (6, 12)\}$

۷. M نقطه‌ای دلخواه روی خط $y = 3 - 2x$ است. فاصله M تا خط $3x - 4y = 8$ را به صورت تابعی از طول نقطه M نوشته‌ایم. ضابطه این تابع

کدام است؟

(۱) $f(x) = \frac{1}{25}|11x - 20|$ (۲) $f(x) = \frac{1}{5}|5x - 4|$

(۳) $f(x) = \frac{1}{25}|5x - 4|$ (۴) $f(x) = \frac{1}{5}|11x - 20|$

۸. اگر تابع $f(x) = \frac{1-x}{(m-1)x^2 + 3x + 1}$ تنها به‌ازای یک مقدار x قابل تعریف نباشد، m چند مقدار می‌تواند اختیار کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار

۹. اگر $f(x) = \frac{4}{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{2-x}$ باشد، دامنه توابع $g \circ f$ کدام است؟

- (۱) $R - \{2, 3\}$ (۲) $R - \{1, 2, 3\}$ (۳) $R - \{1, 2\}$ (۴) $R - \{1, 3\}$

۱۰. تابع وارون تابع $y = x + \sqrt{x}$ به صورت $y = (\frac{\sqrt{ax+1}-1}{b})^2$ می‌باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۱. اگر $f = \{(0, -1), (1, -2), (a, -1), (4, 0)\}$ و $g = \{(-2, 4), (-1, 1), (b, 1), (7, -3)\}$ و $D_{g \circ f} = \{0, 5, 1, 4\}$ باشد، حاصل

مقدار $b - 2a$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) ۸ (۴) -۸

۱۲. اگر $(fog^{-1})(x) = \sqrt[3]{2x^5 + 1}$ باشد، حاصل $(gof^{-1})(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{(x-1)^3}{2}$
 (۲) $1 - f^{-1}(\sqrt[5]{x-1})$
 (۳) $\sqrt[5]{\frac{x^3-1}{2}}$
 (۴) $1 - g^{-1}(\sqrt[5]{x-1})$

۱۳. در ماشین روبه رو، مقدار a کدام است؟

(۱) ۱
 (۲) -۱
 (۳) ۲
 (۴) $x \rightarrow \frac{ax+1}{2} \rightarrow \boxed{2ax-1} \rightarrow x$

۱۴. اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+2}{ax+b}$ بر نمودار تابع معکوس خود منطبق باشد، مقدار b چقدر است؟ ($a \neq 0$)

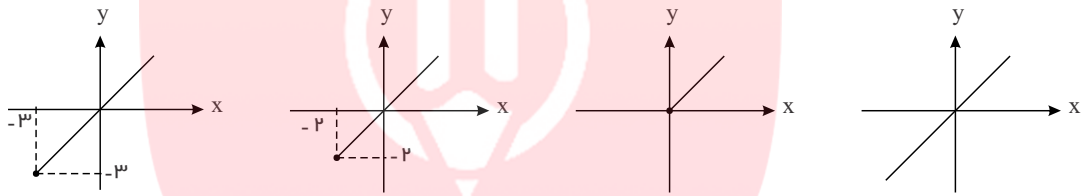
(۱) ۲
 (۲) ۱
 (۳) -۲
 (۴) -۱

۱۵. اگر $f\left(\frac{-x}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1}$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ ($x \neq -1$)

(۱) $\frac{1}{x-1}$
 (۲) $1-x$
 (۳) $\frac{2-x}{x-1}$
 (۴) $x+1$

۱۶. اگر $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$ ، نمودار $(fof^{-1})(x)$ در کدام گزینه آمده است؟

(۱) (۲) (۳) (۴)



۱۷. اگر f^{-1} وارون تابع $f(x) = x^2 + 2x + 4$ و $f: (-\infty, -1] \rightarrow R$ باشد، مجموع جواب های حقیقی معادله $f^{-1}(x) = x + 2$ کدام است؟

(۱) ۷
 (۲) -۷
 (۳) ۱۲
 (۴) معادله جواب حقیقی ندارد.

۱۸. اگر $f = \{(-1, 4), (2, 3), (-1, 4m), (m+1, n-1), (5, 6), (p, n+2)\}$ تابعی یک به یک باشد، $m+n+p$ چقدر است؟

(۱) ۷
 (۲) ۸
 (۳) ۹
 (۴) ۱۰

۱۹. کدام دو تابع با هم مساوی اند؟

(۱) $f(x) = (\sqrt{x})^2$ و $g(x) = \sqrt{x|x|}$
 (۲) $f(x) = x$ و $g(x) = (\sqrt{x})^2$
 (۳) $f(x) = \sqrt{x|x|}$ و $g(x) = \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|}$
 (۴) $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = (\sqrt{x})^2$

۲۰. معادله $2x^2 - 12x + 7 = \frac{3}{[x] + [-x]}$ چند جواب دارد؟

(۱) ۳
 (۲) ۲
 (۳) ۱
 (۴) صفر

۲۱. دامنه ی تابع $f(x) = \sqrt{([x] - \sqrt{5})(6 - [x])}$ کدام است؟

(۱) $[\sqrt{5}, 6]$
 (۲) $[\sqrt{5}, 7]$
 (۳) $[3, 6]$
 (۴) $[3, 7]$

۲۲. حاصل $\left[\sqrt{n^2 + 2n}\right] + \left[\sqrt{4n^2 + 4n}\right]$ با شرط طبیعی بودن n چقدر است؟

(۱) $2n + 1$
 (۲) $3n$
 (۳) $n + 2$
 (۴) $4n - 1$

تاریخ :

وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۲۲

موضوع

علیرضا فیضیان

۱. گزینه ۴

$$(f \circ g)(x) = \left(\frac{1}{2}(x-3)\right)^2 + \frac{1}{2}(x-3) - 2 = \frac{1}{4}(x^2 - 6x + 9) + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 2 = \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4}$$

$$(f \circ g)(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4} < 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 5$$

$$\rightarrow b - a = 5 - (-1) = 6$$

۲. گزینه ۲

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, -2), (4, -1)\} \Rightarrow f = \{(1, 2), (-2, 3), (-1, 4)\}$$

برای یافتن دامنه تابع $f - 2g$ باید اشتراک دامنه توابع f و g را به دست آوریم.

$$Df = \{1, -2, -1\}, D_{f-2g} = \{-2, -1\} \Rightarrow \{1, -2, -1\} \cap Dg = \{-2, -1\}$$

با توجه به رابطه بالا، قطعاً -2 و -1 در دامنه تابع g حضور دارند پس داریم:

$$f - 2g = \{(-2, -1)(-1, 8)\} \Rightarrow (f - 2g)(-2) = -1 \Rightarrow f(-2) - 2g(-2) = -1$$

$$\Rightarrow 3 - 2g(-2) = -1 \Rightarrow g(-2) = 2 \Rightarrow (-2, 2) \in g \Rightarrow (2, -2) \in g^{-1}$$

$$(f - 2g)(-1) = 8 \Rightarrow f(-1) - 2g(-1) = 8 \Rightarrow 4 - 2g(-1) = 8 \Rightarrow g(-1) = -2$$

$$\Rightarrow (-1, -2) \in g \Rightarrow (-2, -1) \in g^{-1}$$

۳. گزینه ۴ شرط آن که تابع وارون پذیر باشد آن است که یک به یک باشد، برای بررسی یک به یک بودن نمودار توابع را رسم می کنیم:

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

۱۸. گزینه ۴ توجه: برای این که یک زوج مرتب معرف یک تابع یک به یک باشد ابتدا تابع باشد یعنی مؤلفه‌ی اول یکسان نداشته باشد و در صورت وجود مؤلفه‌ی اول باید مؤلفه‌ی دوم هم برابر باشد و سپس باید یک به یک باشد یعنی مؤلفه‌ی دوم یکسان نداشته باشد و در صورت وجود مؤلفه‌ی دوم برابر، باید مؤلفه‌ی اول هم برابر باشد. بنابراین ابتدا شرط تابع بودن را بررسی می‌کنیم:

$$f \Rightarrow 4m = 4 \Rightarrow m = 1 \rightarrow f = \{(-1, 4), (2, 3), (2, n-1), (5, 6), (p, n+2)\}$$

برای تابع بودن باید مؤلفه‌ی اول یکسان نداشته باشد.

$$f \Rightarrow n-1 = 3 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow f = \{(-1, 4), (2, 3), (5, 6), (p, 6)\}$$

برای یک به یک بودن:

$$f \Rightarrow P = 5 \Rightarrow m + n + p = 10$$

۱۹. گزینه ۱ در گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ دامنه دو تابع داده شده برابر نیستند زیرا:

$$2 \text{ گزینه } Df = \mathbb{R}, Dg : x \geq 0 \Rightarrow Dg = [0, +\infty) \Rightarrow Df \neq Dg$$

$$3 \text{ گزینه } Df : x|x| \geq 0 \xrightarrow{|x| \geq 0} x \geq 0 \Rightarrow Df = [0, +\infty), Dg = \mathbb{R} \Rightarrow Df \neq Dg$$

$$4 \text{ گزینه } Df : x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow Df = \mathbb{R}, Dg : x \geq 0 \Rightarrow Dg = [0, +\infty) \Rightarrow Df \neq Dg$$

جواب گزینه ۱ می‌باشد زیرا:

$$f(x) = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow Df = [0, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x|x|} \Rightarrow x|x| \geq 0 \xrightarrow{|x| \geq 0} x \geq 0 \Rightarrow Dg = [0, +\infty) \Rightarrow Df = Dg = [0, +\infty)$$

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow g(x) = \sqrt{x|x|} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = f(x)$$

و f برابرند.

۲۰. گزینه ۴ باید $[x] + [-x] = -1$ باشد، زیرا مخرج کسر نباید صفر شود.

$$[x] + [-x] = -1 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow 2x^2 - 12x + 7 = \frac{3}{-1} = -3$$

$$2x^2 - 12x + 7 = -3 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5 \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} \text{ معادله جواب ندارد.}$$

۲۱. گزینه ۴

$$([x] - \sqrt{5})(6 - [x]) \geq 0 \quad [x]t \Rightarrow (t - \sqrt{5})(6 - t) \geq 0$$

$$\sqrt{5} \leq t \leq 6 \Rightarrow \sqrt{5} \leq [x] \leq 6$$

مای درس

| | | |
|---|------------|---|
| t | $\sqrt{5}$ | 6 |
| p | - | + |

باید اولین عدد صحیح بعد از $\sqrt{5}$ را در نظر بگیریم.

$$3 \leq [x] \leq 6 \Rightarrow 3 \leq x < 7$$

گروه آموزشی عصر

۲۲. گزینه ۲

$$n^2 < n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \Rightarrow n^2 < n^2 + 2n < (n+1)^2 \Rightarrow n < \sqrt{n^2 + 2n} < n+1$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{n^2 + 2n} \right] = n$$

$$4n^2 < 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow (2n)^2 < 4n^2 + 4n < (2n+1)^2$$

$$2n < \sqrt{4n^2 + 4n} < 2n+1 \Rightarrow \left[\sqrt{4n^2 + 4n} \right] = 2n$$

$$\left[\sqrt{n^2 + 2n} \right] + \left[\sqrt{4n^2 + 4n} \right] = n + 2n = 3n$$

تاریخ :

وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۲۰

موضوع

علیرضا فیضیان

۱. اگر $\cot(25^\circ - \alpha) + \tan \alpha + \tan 20^\circ + 3 \tan \alpha \tan 20^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲. حاصل $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۳. اگر $\frac{\sqrt{3}}{4} \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$ و $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ بوده و α و β زاویه هایی در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ باشند اندازه β کدام است؟

- (۱) $\frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{\pi}{12}$ (۳) $\frac{\pi}{16}$ (۴) $\frac{\pi}{24}$

۴. اگر $\frac{1}{2} \sin x - \cos x = \cos 4x$ باشد حاصل $\cos 4x$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

۵. حاصل $\sin x(\sin x + \cos x)$ به ازای $A = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{6}-2}{4}$ (۲) $\frac{2+\sqrt{6}}{4}$ (۳) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ (۴) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

۶. عبارت $\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

۷. اگر $\frac{1}{4} \sin(x+20^\circ) = \sin(x+50^\circ) + \sin(x-10^\circ)$ مقدار $\sin(x+20^\circ)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{1}{8}$

۸. حاصل عبارت $(\tan 20^\circ + \cot 40^\circ) \times \sin 50^\circ$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\tan 50^\circ$ (۳) $\sqrt{3} \sin 50^\circ$ (۴) $\cos 50^\circ$

۹. کدام یک بزرگ تر است؟

- (۱) $\sin 1$ (۲) $\sin 2$ (۳) $\sin 3$ (۴) $\sin 4$

۱۰. حاصل عبارت $8 \tan 8x - 4 \tan 4x - 2 \tan 2x - \tan x - \cot x$ به ازای $x = \frac{\pi}{96}$ کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{3}$ (۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ (۴) $16\sqrt{3}$

۱۱. اگر $2 \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \cos 2\alpha$ مقدار $\tan\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $-\frac{4}{5}$

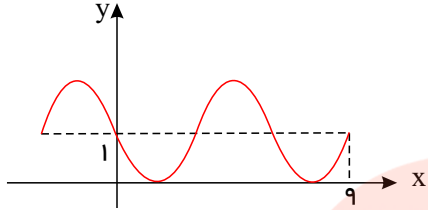
۱۲. حاصل عبارت $\frac{1}{\sin x} - \frac{\sqrt{3}}{\cos x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{18}$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $4 \sin 20^\circ$ (۴) $4 \cos 20^\circ$

۱۳. شعاع چرخ جلو درشکه‌ای یک متر و شعاع چرخ عقب آن ۱۲۰ cm است. وقتی چرخ جلو ۷۰° می‌چرخد، چرخ عقب چند رادیان می‌چرخد؟

$\frac{35\pi}{50}$ (۴) $\frac{31\pi}{108}$ (۳) $\frac{35\pi}{108}$ (۲) $\frac{7\pi}{18}$ (۱)

۱۴. نمودار زیر مربوط به تابع $a + \cos(-\frac{1}{2} + bx)\pi$ می‌باشد. حاصل $f(29)$ کدام است؟



$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱) $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳)

۱۵. اگر انتهای کمان α در ناحیه‌ی اول باشد عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ برابر کدام است؟

$\cot \alpha$ (۴) $\tan \alpha$ (۳) $-\cot \alpha$ (۲) $-\tan \alpha$ (۱)

۱۶. اگر $2 + \sqrt{3} \cot 15^\circ$ آن‌گاه حاصل $\frac{2 \sin 165^\circ - \sin 105^\circ}{\cos 345^\circ + \sqrt{3} \cos 255^\circ}$ کدام است؟

$-\sqrt{3}$ (۴) 2 (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

۱۷. حاصل $\cos(\frac{\pi}{n}) + \cos(\frac{2\pi}{n}) + \dots + \cos(\frac{(n-2)\pi}{n}) + \cos(\frac{(n-1)\pi}{n}) + \sin^2(\frac{7\pi}{14})$ کدام است؟

2 (۴) 1 (۳) -2 (۲) -1 (۱)

۱۸. اگر زاویه‌ی θ در موقعیت استاندارد باشد، به طوری که نقطه‌ی انتهایی کمان θ دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$ قطع کند، مقدار

$A = \frac{1 + \cot^2 \theta}{\cos(\frac{3\pi}{4} - \theta)}$ کدام است؟

$-\frac{27}{2}$ (۴) $\frac{27}{2}$ (۳) -27 (۲) 27 (۱)

۱۹. در صورتی که $\frac{x^2}{4} \tan \frac{\pi}{9}$ باشد کسر زیر کدام گزینه است؟

$A \frac{3 \sin(\frac{8\pi}{9}) + \sin \frac{11\pi}{18} + \sin(\frac{10\pi}{9})}{\cos \frac{17\pi}{9} - \sin \frac{25\pi}{18}}$

$x^2 + 2$ (۴) $x^2 + \frac{1}{2}$ (۳) $2x^2$ (۲) $\frac{x^2 + 2}{4}$ (۱)

۲۰. نقطه‌ی A بر روی دایره‌ای به شعاع ۳ واحد قرار دارد متحرکی از نقطه‌ی A در خلاف جهت مثلثاتی ۴۲° درجه چرخیده و در نقطه‌ی M قرار گرفته است متحرک دیگر از نقطه‌ی A در جهت مثلثاتی ۲۱۰° درجه چرخیده و در نقطه‌ی N قرار گرفته است. طول قوس MN چند واحد است؟

3.96 (۴) 4.71 (۳) 4.29 (۲) 4.08 (۱)

تاریخ :

وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۲۰

علیرضا فیضیان

موضوع

۱. گزینه ۳ از رابطه‌ی داده شده $\tan(\alpha + 20^\circ)$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan \alpha + \tan 20^\circ = 3(1 - \tan \alpha \tan 20^\circ) \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan 20^\circ}{1 - \tan \alpha \tan 20^\circ} = 3 \Rightarrow \tan(\alpha + 20^\circ) = 3$$

به کمک عبارت $\tan(\alpha + 20^\circ)$ عبارت $\tan(45^\circ - (\alpha + 20^\circ))$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan(25^\circ - \alpha) = \tan(45^\circ - (\alpha + 20^\circ)) = \frac{\tan(45^\circ) - \tan(\alpha + 20^\circ)}{1 + \tan(45^\circ)\tan(\alpha + 20^\circ)} = \frac{1 - 3}{1 + 3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

پس $\cot(25^\circ - \alpha)$ برابر ۲- است.

۲. گزینه ۳

می‌دانیم که: $80 + 10 = 90 \Rightarrow \sin 80 = \cos 10$

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \sin 80^\circ} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} = 4$$

نکات: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ $\sin(2\alpha) = 2\sin \alpha \cos \alpha$

۳. گزینه ۲ از فرمول $\cos^2 a - \sin^2 b = \cos(a+b)\cos(a-b)$

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{12}$$

۴. گزینه ۴

می‌دانیم $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$

$$\sin x - \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4}$$

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2 \times \frac{9}{16} = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$$

۵. گزینه ۵

می‌دانیم $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$A = \sin^2 x + \sin x \cos x = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

۶. گزینه ۳

$$\cos 3\alpha = 4\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) \cos(60^\circ + \alpha)$$

$$\cos 30^\circ = 4\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ \Rightarrow 2\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

۷. گزینه ۳

$$\sin(x + 20^\circ + 30^\circ) + \sin(x + 20^\circ - 30^\circ) = \sin((x + 20^\circ) + 30^\circ) + \sin((x + 20^\circ) - 30^\circ)$$

$$\sin(x + 20^\circ)\cos 30^\circ + \cos(x + 20^\circ)\sin 30^\circ + \sin(x + 20^\circ)\cos 30^\circ - \cos(x + 20^\circ)\sin 30^\circ$$

$$2\sin(x + 20^\circ)\cos 30^\circ = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

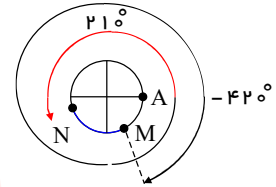
$$\frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos\frac{\pi}{9}}{2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + 2 \cos\frac{\pi}{9}} \quad 2 \tan\left(\frac{\pi}{9}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{9} \frac{x^2}{4} \rightarrow \left(\frac{x^2}{4}\right) + \frac{1}{2} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \quad \frac{x^2 + 2}{4}$$

۲۰. گزینه ۳

واضح است نقطه‌ی M از 27° درجه به اندازه‌ی 3° درجه بیشتر است و نقطه‌ی N از 18° درجه به اندازه‌ی 3° درجه بیشتر است پس کمان MN برابر 9° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان است.

$$\theta \quad \frac{L}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \frac{L}{3} \rightarrow L \quad \frac{3\pi}{2} \quad \frac{3(3,14)}{2} \quad 4,71$$



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تاریخ :

وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۲۲

علیرضا فیضیان

موضوع

۱. اگر $g_{25} = A$ ، حاصل $g_{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{2} g_{4-2\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $1 - \frac{A}{2}$ (۲) $\frac{1-A}{2}$ (۳) $1 - 2A$ (۴) $1 + 2A$

۲. هسته‌های نوعی ماده‌ی رادیواکتیو طوری واپاشیده می‌شوند که در ۳ ساعت، نصف هسته‌ها از بین می‌رود. با گذشت چه زمانی ۸۰ درصد ماده‌ی اولیه از بین خواهد رفت؟

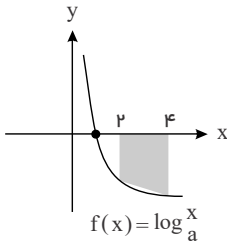
- (۱) $g_{\frac{5}{2}}$ (۲) $31 g_{\frac{5}{2}}$ (۳) $1 g_{\frac{5}{8}}$ (۴) $1 g_{\frac{25}{2}}$

۳. اگر $x > 0$ و $x^2 > 2^x$ در بازه (a, b) برقرار باشد، حداکثر مقدار عبارت $g_{\sqrt{b-a}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۴. نمودار زیر مربوط به تابع $f(x) = 1 g_a^x$ است. اگر مساحت دوزنقه هاشورخورده برابر ۳ باشد، مقدار $f(64)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) ۵ (۴) -۵



۵. اگر $2^x = \sqrt{19}$ باشد، حاصل $2[1-x] + 3$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۳ (۴) -۵

۶. جواب معادله $1 g_x^{10} + 1 g_x^9 + 1 g_x^8 + \dots + 1 g_x^2 + 1 g_x^1 = 220$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) 10^2 (۳) 10^3 (۴) 10^4

۷. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $g_x^4 = 4 g_x^2 + 21$ باشند، مقدار $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۸. نمودار تابع $y = 1 g(ax+b)$ ، محور x ها را در نقطه‌ای با طول 10 قطع می‌کند. اگر دامنه‌ی این تابع، بازه‌ی $(-10, -\infty)$ باشد، مقدار $1 g\sqrt{ab}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۹. اگر $1 g_{\sqrt{3}}^{\sqrt{x-1}} + 1 g_{\sqrt{3}}^{\sqrt{x}} = 1 g_{\sqrt{3}}^{x+1}$ ، آن گاه حاصل $1 g_{\sqrt{3}}^{3x-1}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $1,5$ (۳) ۲ (۴) $2,5$

۱۰. حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $1 g_x^{x+1} = 10^6$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $0,1$ (۳) 10^5 (۴) $0,001$

۱۱. اگر $1 g_a^b = 3$ ، آن گاه معادله‌ی $3^{x-a} = 2^{x^2}$ فقط یک جواب دارد. b کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۲. کدام تابع رفتار نمایی ندارد؟

- (۱) $f(x) = \sqrt{2^{x+1}}$ (۲) $g(x) = \frac{3^{x+1}}{2^{x-2}}$ (۳) $h(x) = 10\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}$ (۴) $s(x) = \frac{4^{x-1}}{2^2 x + 3}$

۱۳. دامنه تابع $y = 1 - g(2^x - 3)$ کدام است؟

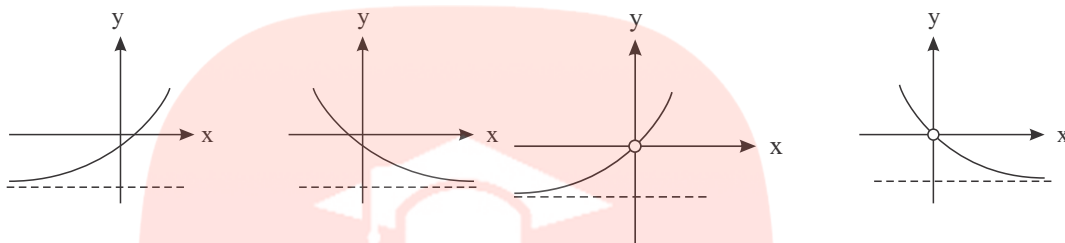
- (۱) $(0, +\infty)$ (۲) $(1 - g^{\frac{1}{3}}, +\infty)$ (۳) $(1 - g^{\frac{2}{3}}, +\infty)$ (۴) $(0, 1)$

۱۴. نمودار توابع $f(x) = 1 - g(m+1)^x$ و $g(x) = (3 - 2m)^x$ نسبت به خط $y = x$ قرینه هستند. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۵. نمودار تابع $f(x) = \frac{4^x - 2^x - 2}{2^x + 1}$ کدام است؟

- (۱) (۲) (۳) (۴)



۱۶. اگر مجموعه جواب نامعادله $(\sqrt{5} + 2)^{3x-4} > (\sqrt{5} - 2)^{x^2}$ بازه (a, b) باشد، حاصل $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۷. اگر $g^1 a = b^1 g^3$ ، مقدار $g_a b$ کدام است؟

- (۱) $g^1 g^2$ (۲) $\frac{1}{2} g^1 g^3$ (۳) $2^1 g^1 g^3$ (۴) $\frac{1}{2} g^1 g^2$

۱۸. نقطه برخورد دو تابع $y = 9 \times 3^{a-x}$ و $y = 3^{x+2a}$ بر نقطه برخورد دو تابع $y = 1 + g x$ و $y = 1 + g(2x + a)$ منطبق است. مقدار a کدام است؟

- (۱) $1, 2$ (۲) $1, 4$ (۳) $1, 5$ (۴) $1, 6$

۱۹. اگر دامنه تابع $f(x) = 1 - g \frac{ax+6}{x+b}$ بازه $(-2, 3)$ باشد، نمودار f خط $y = 1$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{32}{7}$ (۲) $-\frac{7}{9}$ (۳) $-\frac{7}{6}$ (۴) $\frac{36}{7}$

۲۰. مجموعه‌ی جواب معادله $g(1 + 2^x) = x + 1$ کدام است؟

- (۱) $\{2, -3\}$ (۲) $\{1, 2\}$ (۳) $\{1\}$ (۴) $\{-3\}$

۲۱. جمعیت شهری ۲۰۰۰۰۰ نفر می‌باشد و پس از هر سال ۲۰ درصد به جمعیت آن شهر اضافه می‌شود، پس از چند سال جمعیت شهر ۸۰۰۰۰۰ نفر خواهد شد؟ ($g^1 4 = 0,6$ و $g^1 1,2 = 0,8$)

- (۱) $7,5$ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) $8,5$

۲۲. انرژی آزاد شده در زلزله‌ای به بزرگی ۸ ریشتر چند برابر انرژی آزاد شده در زلزله‌ای به بزرگی ۶ ریشتر است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) 10^2 (۳) 10^3 (۴) $10^{\frac{4}{3}}$

تاریخ :

وقت : دقیقه

نام و نام خانوادگی :

تعداد سوالات: ۲۲

موضوع

علیرضا فیضیان

۱. گزینه ۱ می‌دانیم: $1 g_k^a + 1 g_k^b = 1 g_k^{ab}$, $1 g_k^{a^n} = n 1 g_k^a$ با کمی دقت، $4 - 2\sqrt{3}$ همان $(\sqrt{3}-1)^2$ است، $(\sqrt{3}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$ پس داریم:

$$\begin{aligned} & 1 g(1 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} 1 g(\sqrt{3}-1)^2 \\ &= 1 g(1 + \sqrt{3}) + 1 g(\sqrt{3}-1) = 1 g \underbrace{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}_{\text{مزدوج}} \\ &= 1 g(3-1) = 1 g 2 = 1 g \frac{10}{5} = 1 - 1 g 5 \end{aligned}$$

چون $1 g 25 = A$ است، پس $1 g 5 = \frac{A}{2}$ و پاسخ $1 - \frac{A}{2}$ خواهد بود.

$$(1 g 25 = 1 g 5^2 = 2 1 g 5 = A \quad 1 g 5 = \frac{A}{2})$$

۲. گزینه ۲ اگر نیمه‌ی عمر ماده‌ای هسته‌ای T و مقدار اولیه آن M باشد، جرم باقی مانده پس از t که با $m(t)$ نشان می‌دهند از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید.

$$m(t) = M \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow m(t) = M \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$$

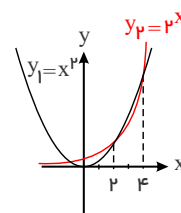
۸۰ درصد ماده اولیه از بین رفته باشد یعنی ۲۰ درصد آن باقی مانده است یعنی:

$$m(t) = \frac{20}{100} M \Rightarrow M \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} = \frac{20}{100} M \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{t}{3}}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2^{\frac{t}{3}} = 5$$

$$\frac{t}{3} = 1 g_2 5 \quad t = 3 1 g_2 5$$

۳. گزینه ۱ با توجه به شکل و این که $x > 0$ است، نمودار $y_1 = x^2$ در بازه $(2, 4)$ بالای نمودار $y_2 = 2^x$ قرار می‌گیرد.

$$1 g_8 \sqrt{b-a} = 1 g_8 \sqrt{2} = 1 g_{2^3} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

۴. گزینه ۲ اندازه قاعده‌های دوزنقه هاشورخورده برابر با $f(2)$ و $f(4)$ می‌باشد که هر دو منفی هم هستند.

با توجه به این که مساحت دوزنقه برابر ۳ است داریم:

$$\text{ارتفاع دوزنقه} = 4 - 2 = 2 \Rightarrow S = \frac{|f(2) + f(4)| \times 2}{2} = 3 \Rightarrow |f(2) + f(4)| = 3$$

با توجه به این که $f(2)$ و $f(4)$ هر دو منفی هستند داریم:

$$f(2) + f(4) = -3 \Rightarrow 1 g_a^2 + 1 g_a^4 = -3 \Rightarrow 1 g_a^{(2 \times 4)} = -3 \Rightarrow a^{-3} = 8$$

$$a^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = 1 g_{\frac{1}{2}}^x \Rightarrow f(64) = 1 g_{\frac{1}{2}}^{64} = 1 g_{2^{-1}}^{2^6} = \frac{1}{-1} \times 6 1 g_2 = -6$$

۵. گزینه ۲

$$16 < 19 < 25 \Rightarrow 4 < \sqrt{19} < 5 \Rightarrow 4 < \sqrt{19} < 8 \Rightarrow 2^2 < 2^x < 2^3$$

$$\frac{a}{8} = \frac{2-a}{2} \Rightarrow a = 8 - 4a \Rightarrow 5a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{5} = 1,6$$

۱۹. گزینه ۳ نکته: دامنه‌ی تابع $y = 1 \text{ g} u(x)$ عبارت است از: $\{x \in D_u | u(x) > 0\}$

باتوجه به نکته‌ی بالا، دامنه‌ی $f(x)$ ، مجموعه‌ی همه‌ی x هایی است که به ازای آن‌ها $\frac{ax+6}{x+b} > 0$ باشد. طبق قاعده‌ی تعیین علامت، علامت

بین ریشه‌های صورت و مخرج مخالف علامت a و خارج ریشه‌ها موافق علامت a است، اما طبق فرض، دامنه‌ی این تابع بازه‌ی محدود

$(-2, 3)$ است. بنابراین -2 و 3 ریشه‌های صورت و مخرج عبارت $\frac{ax+6}{x+b}$ هستند و علامت a منفی است. (زیرا عبارت بین دو ریشه مثبت شده

است.) در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \text{ریشه‌ی صورت } -2: -2a + 6 = 0 \Rightarrow a = 3 > 0 \times \\ \text{ریشه‌ی مخرج } 3: 3a + 6 = 0 \Rightarrow a = -2 < 0 \end{cases}$$

حال محل تقاطع $f(x) = 1 \text{ g} \frac{-2x+6}{x+2}$ و خط $y = 1$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 1 \Rightarrow 1 \text{ g} \frac{-2x+6}{x+2} = 1 \Rightarrow 1 \text{ g} \frac{-2x+6}{x+2} = 1 \text{ g} 1 \Rightarrow \frac{-2x+6}{x+2} = 1$$

$$\Rightarrow -2x + 6 = 1 \cdot x + 2 \Rightarrow 12x = -14 \Rightarrow x = \frac{-7}{6}$$

۲۰. گزینه ۳

$$\begin{aligned} x + 1 \text{ g}(1 + 2^x) &= 1 \text{ g} 10^x + 1 \text{ g}(1 + 2^x) \\ x \text{ l g} 5 + 1 \text{ g} 6 &= 1 \text{ g} 5^x + 1 \text{ g} 6 \Rightarrow 1 \text{ g} 10^x (1 + 2^x) = 1 \text{ g}(5^x \times 6) \\ \Rightarrow 10^x (1 + 2^x) &= 5^x \times 6 \Rightarrow 2^x (1 + 2^x) = 6 \end{aligned}$$

$2^x = u$ قرار می‌دهیم.

$$u(u+1) = 6 \Rightarrow u^2 + u - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (u+3)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = -3 \\ u = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = -3 \\ 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

۲۱. گزینه ۱ اگر جمعیت اولیه یعنی ۲۰۰۰۰۰ نفر را با M نشان دهیم داریم:

$$\text{جمعیت پس از یک سال} = f(1) = M + \frac{20}{100}M = M + 0,2M = 1,2M$$

$$\text{جمعیت پس از ۲ سال} = f(2) = f(1) + \frac{20}{100}f(1) = 1,2f(1) = (1,2)^2 M$$

$$\text{جمعیت پس از ۳ سال} = f(3) = f(2) + \frac{20}{100}f(2) = 1,2f(2) = (1,2)^3 M$$

$$\text{جمعیت پس از } t \text{ سال} = f(t) = (1,2)^t \cdot M = 200000 \times (1,2)^t$$

$$f(t) = 800000 = 200000 \times (1,2)^t \Rightarrow (1,2)^t = 4$$

$$1 \text{ g}(1,2)^t = 1 \text{ g} 4 \quad t \text{ l g}(1,2) = 1 \text{ g} 4 \Rightarrow t = \frac{1 \text{ g} 4}{1 \text{ g} 1,2} = \frac{0,6}{0,08} = 7,5$$

۲۲. گزینه ۳

$$1 \text{ g} E_1 = 11,8 + 1,5 \times 8 = 23,8 \quad E_1 = 10^{23,8}$$

$$1 \text{ g} E_2 = 11,8 + 1,5 \times 6 = 20,8 \quad E_2 = 10^{20,8}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{23,8}}{10^{20,8}} = 10^3 = 1000$$

۱. اگر $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right] + \left[-\frac{1}{x} \right]$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \frac{1}{1^0}} f(x)$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) موجود نمی‌باشد.

۲. در کدام نقطه با طول صحیح از تابع $f(x) = 4[x] + 3[-x]$ ، حد چپ دو برابر حد راست تابع است؟ (نماد [] جزء صحیح است)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۲

۳. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a[x^2] - 3|2x - 2| + 1}{2b + |x + 2|} = \frac{1}{7}$ باشد، آن گاه $a^2 + b^2$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است)

- (۱) ۰ (۲) $\frac{35}{49}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{26}{36}$

۴. به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} 6ax^2 + 1 & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{-2x + 4} & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ دارای حد است؟

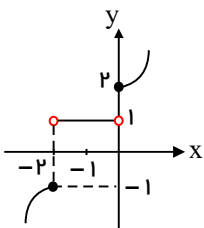
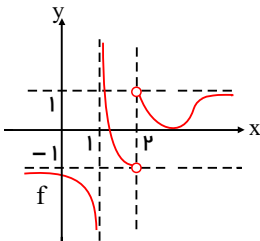
- (۱) $-\frac{1}{24}$ (۲) $-\frac{1}{48}$ (۳) $\frac{1}{24}$ (۴) $\frac{1}{48}$

۵. حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} - \left[\frac{1}{\cos x} \right] \right) \tan^2 x$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) π^2 (۴) $\frac{\pi^2}{2}$

۶. باتوجه به نمودار f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} [f \circ f \circ f](x)$ کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۰



۷. با توجه به شکل زیر حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(1 - x^2)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۰ (۳) ۱ (۴) -۲

۸. حد کسر $\frac{\cos^2 x + [-\sin^2 x]}{\sin^2 x + [\sin^2 x]}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است. ([] نماد جزء صحیح)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ∞

۹. حد عبارت $\frac{\sqrt{x^2 + 12} + 2x}{|x^2 + x - 2|}$ وقتی $x \rightarrow (-2)^+$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۰. مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{-\tan x} - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲

۱۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{|x^2 - 1|}{x + \sqrt{x+2}}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) ۱

۱۲. تابع $f(x) = (x^3 + ax + b)[2x]$ در فاصله $(-1, 1)$ حد دارد. $a - b$ کدام است؟ []، [] نماد جزء صحیح است.

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۱۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4-x}}}{x - \sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۴. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] - \sqrt[3]{x+6}}{|2-x|}$ ، کدام است؟ [] علامت جزء صحیح است.

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $-\frac{1}{12}$

۱۵. اگر تابع $f(x) = a[2x] + b[-x]$ در $x = -3$ دارای حد ۲ باشد، a کدام است؟ [] نماد جزء صحیح است.

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۶. حاصل حد وقتی $x \rightarrow 2$ $\frac{\log_2^x - \log_2^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \log_2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۷. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 3x}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۸. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

۱۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1 - \cos^3 x}}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۲۰. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) $-\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۱. گزینه ۱

تابع $f(x) = [x] + [-x]$ در هر نقطه‌ی حقیقی دارای حدی برابر -1 می‌باشد، لذا:

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} [x] + [-x] = -1$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{1^0}} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \frac{1}{1^0}} f(x) = -2$$

$$[x] + [-x] = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{نکته: در حالت کلی:}$$

۲. گزینه ۴ فرض کنیم k نقطه‌ای با طول صحیح باشد، لذا داریم:

$$x \rightarrow k^+ : x > k \Rightarrow \begin{cases} [x] = k \\ -x < -k \Rightarrow [-x] = -k - 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow k^+} (4[x] + 3[-x]) = 4k + 3(-k - 1) = k - 3$$

$$x \rightarrow k^- : x < k \Rightarrow \begin{cases} [x] = k - 1 \\ -x > -k \Rightarrow [-x] = -k \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow k^-} (4[x] + 3[-x]) = 4(k - 1) + 3(-k) = k - 4$$

$$k - 4 = 2(k - 3) \Rightarrow k = 2$$

حد چپ دو برابر حد راست تابع است، در نتیجه می‌توان نوشت:

۳. گزینه ۳ حد چپ و راست تابع را در $x = 1$ برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a[x^2] - 3|2x - 2| + 1}{2b + |x + 2|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a[x^2] - 6|x - 1| + 1}{2b + 3} = \frac{1}{7}$$

$$x \rightarrow 1^+ : x > 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \Rightarrow [x^2] = 1 \\ |x - 1| = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a - 6(x - 1) + 1}{2b + 3} = \frac{a + 1}{2b + 3} = \frac{1}{7}$$

$$x \rightarrow 1^- : x < 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \\ |x - 1| = -(x - 1) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(0) + 6(x - 1) + 1}{2b + 3} = \frac{1}{2b + 3} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow 2b + 3 = 7 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a + 1}{7} = \frac{1}{7} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2^2 + 0^2 = 4$$

۴. گزینه ۲ برای آن که $f(x)$ در $x = 2$ حد داشته باشد، باید داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ لذا می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{-2x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x - 2)^2}}{-2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{-2(x - 2)} \xrightarrow{x < 2 \Rightarrow (x - 2) < 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{-2(x - 2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (6ax^2 + 1) = 24a + 1 \Rightarrow 24a + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow 24a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{48}$$

توجه: در مسائل حدی به مقدار تابع توجه نمی‌کنیم.

۵. گزینه ۱ می‌دانیم: $0 = \text{کراندار} \times \text{صفر}$

می‌دانیم برای هر $k \in \mathbb{R}$ ، $0 \leq k - [k] < 1$ ، بنابراین $0 \leq \frac{1}{\cos x} - [\frac{1}{\cos x}] < 1$ ، لذا کراندار است از طرفی $x \rightarrow 0$ ، پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} - [\frac{1}{\cos x}] \right) \tan \pi^2 x = 0$$

می‌توان نوشت:

www.my-dars.ir

۶. گزینه ۱ با توجه به شکل داریم:

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 1^- \Rightarrow f(f(x)) \rightarrow -\infty \Rightarrow f(f(f(x))) \rightarrow (-1)^- \Rightarrow \lim_{n \rightarrow 2^+} [f \circ f \circ f(x)] = [(-1)^-] = -2$$

۷. گزینه ۴

$$x \rightarrow 0^+ : x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow -2 - x^2 < -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) = f((-2)^-) = -1$$

$$x \rightarrow (-1)^- : x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow -x^2 < -1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(1 - x^2) = f((0)^-) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-2 - x^2) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(1 - x^2) = -1 - 1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_2^x + 1}{2 \log_2^x} = \frac{1 + 1}{2 \times 1} = 1$$

۱۷. گزینه ۱ می‌دانیم: $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, $\sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin x)}{\sin x + 3 \sin x - 4 \sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin x)}{4 \sin x (1 - \sin^2 x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin x)}{4 \sin x (1 - \sin x) (1 + \sin x)} = \frac{1}{4 \times 1 \times 2} = \frac{1}{8}$$

۱۸. گزینه ۱ می‌دانیم $\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

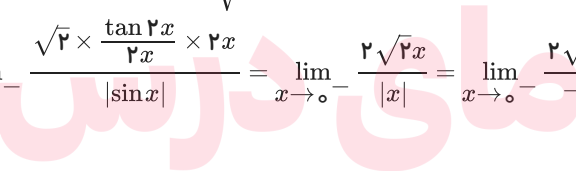
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \sqrt{\cos^2 x})(\cos x + \sqrt{\cos^2 x})}{x^2 (\cos x + \sqrt{\cos^2 x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 x}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۱۹. گزینه ۳

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin^3 x}{3x} \times 3x}{\sqrt{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) \times 3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{\left|\sin \frac{x}{2}\right| \sqrt{6}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{\left|\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{x}{2}\right| \sqrt{6}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{\left|\frac{x}{2}\right| \sqrt{6}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{\frac{x}{2} \times \sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

۲۰. گزینه ۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan^2 x}{\sqrt{1 - \cos x}} \times \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan^2 x \times \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \tan^2 x}{\sqrt{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \times \frac{\tan^2 x}{2x} \times 2x}{|\sin x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{2}x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{2}x}{-x} = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$



گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir