

نام و نام خانوادگی: .....

مقطع و رشته: .....

نام پدر: .....

شماره داوطلب: .....

تعداد صفحه سؤال: ۴ صفحه

نام درس: ریاضی ۲

نام دبیر: آقای مظاهری

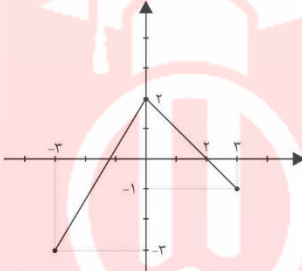
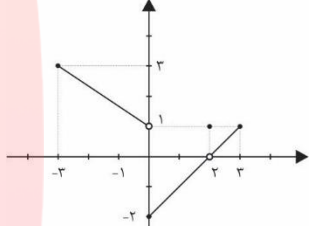
تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۰۳/۰۵

ساعت امتحان: ۰۸:۰۰ صبح / عصر

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	سوال	محل مهر و امضاء مدیر	نمره
۱	مختصات مرکز دایره‌ای برابر $O(-1, 0)$ و نقطه $A(2, 4)$ روی محیط این دایره قرار دارد. الف) طول قطر دایره را بیابید. ب) وضعیت نقطه $B(1, 1)$ را نسبت دایره مشخص کنید.		۱
۱	معادلات زیر را حل کنید: الف) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ ب) $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2 - 2x}$		۱
۱	الف) اگر $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{3y-3}{3x-2}$ را بیابید. ب) اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2}{y}$ باشد، حاصل $\frac{a+b}{b} + \frac{c}{d-c}$ چقدر است؟		۱
۱	مثال: در شکل زیر $DE \parallel BC$ ، با استفاده از قضیه تالس مقدار $x$ را بیابید. 		۱
۱	مثال: دامنه توابع گویای زیر را بیابید. الف) $y = \frac{2x}{x^2 - x - 2}$ ب) $y = \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 - 4}$		۱
۱,۵	مثال: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید. الف) $y = \sqrt{2x-3}$		۱,۵

		$y = \frac{x+6}{3x-4} \text{ (ب)}$ $y = x^2 - 4x + 6 \text{ (پ)}$	
۱,۵	مثال: با فرض یک به یک بودن توابع زیر، ضابطه وارون آنها را بیابید.	$y = 2 - \sqrt{x+1} \text{ (الف)}$ $y = \frac{x+2}{2x-2} \text{ (ب)}$	۷
۱	مثال: مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.	$\frac{\sin(-30^\circ) - 2 \cos(-45^\circ)}{-\tan(-45^\circ) + 3 \tan(-60^\circ)} \text{ (الف)}$ $A = \frac{\sin 120^\circ + 3 \cos 30^\circ}{3 \tan 135^\circ} \text{ (ب)}$	۸
۱	مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.	$y = \cos(3\pi - x) \text{ (الف)}$ $y =  -1 - \cos x  \text{ (ب)}$	۹
۱	مثال: معادلات زیر را حل کنید.	$4^{2x-3} = 8^{x+2} \text{ (الف)}$ $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 224 \text{ (ب)}$	۱۰
۱	مثال: دامنه توابع لگاریتمی زیر را به دست آورید.	$y = \log_{x-1}^{x+1} \text{ (الف)}$ $y = \log_{x+1}^{x^2 - 2x} \text{ (ب)}$	۱۱
۱	مثال: با استفاده از خواص لگاریتم حاصل عبارات زیر را بیابید.	$\log_9^{81} \text{ (الف)}$	۱۲

		$\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{8} \text{ (ب)}$ $\log_{\sqrt[3]{32}} \sqrt[4]{25} \text{ (پ)}$ $\log_{\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}} \text{ (ت)}$	
۱	<p>مثال: معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.</p> $\log_7^{(\Delta x + 1)} + \log_7^x = 2 \text{ (الف)}$ $\log_7^{(12x - 21)} - \log_7^{(x^2 - 3)} = 2 \text{ (ب)}$	۱۳	
۱	<p>مثال: اگر نمودارهای <math>f</math> و <math>g</math> به صورت زیر باشند، حدود خواسته شده را بیابید.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>g(x)</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>f(x)</math></p> </div> </div> $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + g(x)) \text{ (ب)}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (ت)}$	$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x)) \text{ (الف)}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{f(x)} \text{ (پ)}$	۱۴
۰,۵	<p>مثال: آیا تابع <math>f(x) = \begin{cases} [x] - 1 &amp; x &lt; 0 \\ 3x - 2 &amp; x \geq 0 \end{cases}</math> در نقطه <math>x = 0</math> دارای حد است؟ چرا؟</p>	۱۵	
۱	<p>مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید.</p> $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x - 6} \text{ (الف)}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} \text{ (ب)}$	۱۶	
۱	<p>مثال: پیوستگی توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.</p> $x = 2 \text{ (الف) } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	۱۷	

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases} \quad \text{ب) در نقطه } x = 3$$

۰,۵

کارمندان اداره‌ای مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند، احتمال آنکه کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد چقدر است؟

جنسیت \ تحصیلات	زن	مرد
دانشگاهی	۱۰	۱۵
کمتر از دانشگاه	۸۰	۹۰

۱

مثال: احتمال اینکه علی در درس فیزیک قبول شود  $\frac{1}{3}$  و احتمال قبولی در درس ریاضی  $\frac{1}{4}$  است. اگر احتمال قبولی در درس ریاضی در صورتی که فیزیک را نیز قبول شده باشد  $\frac{1}{3}$  باشد. با چه احتمالی علی حداقل در یکی از این دو درس قبول شده است؟

۱۹

۱

مثال: اگر میانگین ده داده آماری  $\frac{13}{2}$  باشد و داده‌های ۵ و ۷ را از بین آنها خارج کنیم میانگین ۸ داده باقی‌مانده چقدر است؟

۲۰





نام درس: ریاضی ۲  
 نام دبیر: آقای مظاهری  
 تاریخ امتحان: ۹۷/۰۳/۰۵  
 ساعت امتحان: صبح/ عصر  
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

کلید سؤالات پایان ترم نوبت دوم سال تحصیلی ۹۷-۹۶

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	الف) فاصله مرکز دایره تا نقطه‌ای روی دایره برابر شعاع است.	$r = OA = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-4)^2} = 5 \Rightarrow 2r = 10$
	ب) فاصله این نقطه تا مرکز دایره را حساب می‌کنیم، اگر فاصله کمتر از شعاع باشد نقطه داخل دایره، اگر برابر شعاع باشد نقطه روی دایره و اگر بزرگتر از شعاع باشد نقطه خارج از دایره است.	$OB = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5} < OA$
	بنابراین نقطه B داخل دایره قرار دارد.	
۲	الف) قرار می‌دهیم $x^2 = t$ و سپس معادله حاصل را حل می‌کنیم.	
	یا $t = 1$	
	حال چون $t = x^2$ داریم:	
	$x^2 = t = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$	
	$x^2 = t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$	
	ب)	
	$\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$	
	م.م.م.مخرج‌ها $x(x-2) \Rightarrow (x+2)x - (x-2) = 2 \Rightarrow x^2 + 2x - x + 2 - 2 = 0$	
	$\Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -1$	
	$x = 0$ غیرقابل قبول است.	
۳	پاسخ:	
	$\left. \begin{aligned} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} &\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3y}{3x} = \frac{3}{2} \\ \frac{3y}{3x} &= \frac{3y-3}{3x-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3y-3}{3x-2} = \frac{3}{2}$	

	<p>پاسخ:</p> $\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{2}{7} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{2+7}{7} = \frac{9}{7} \\ \frac{c}{d} = \frac{2}{7} \rightarrow \frac{c}{d-c} = \frac{2}{7-2} = \frac{2}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a+b}{b} + \frac{c}{d-c} = \frac{9}{7} + \frac{2}{5} = \frac{45+14}{35} = \frac{59}{35}$	
	<p>پاسخ: طبق قضیه تالس داریم:</p> $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2x - 0/5}{4/5} \Rightarrow 4/5x = 6x - 1/5 \Rightarrow 1/5x = 1/5 \Rightarrow x = 1$	۴
	<p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>D = \mathbb{R} - \{x; x^2 - x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 2\}</math></p> <p>ب) <math>D = \mathbb{R} - \{x; x^4 + 1 = 0\} = \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R}</math></p>	۵
	<p>پاسخ:</p> <p>الف) <math>f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{2x_1 - 3} = \sqrt{2x_2 - 3}</math>  <math>\Rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow</math> یک به یک است</p> <p>ب) <math>f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 + 6}{3x_1 - 4} = \frac{x_2 + 6}{3x_2 - 4} \Rightarrow (x_1 + 6)(3x_2 - 4) = (x_2 + 6)(3x_1 - 4)</math>  <math>\Rightarrow 3x_1x_2 - 4x_1 + 18x_2 - 24 = 3x_1x_2 - 4x_2 + 18x_1 - 24</math>  <math>\Rightarrow -4x_1 + 18x_2 = -4x_2 + 18x_1 \Rightarrow 22x_2 = 22x_1</math>  <math>\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow</math> یک به یک است</p> <p>پ) ابتدا تابع را مربع کامل می‌نمائیم</p> $y = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$ $f(x_1), f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 2)^2 + 2 = (x_2 - 2)^2 + 2 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2$ $\Rightarrow x_1 - 2 = \pm(x_2 - 2)$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 + 4 \end{cases}$ <p>چون در همه حالت‌ها <math>x_1</math> با <math>x_2</math> برابر نیست پس تابع یک به یک نیست.</p>	۶
	<p>پاسخ: الف) ابتدا جای <math>x</math> و <math>y</math> را عوض می‌کنیم، بنابراین:</p> $x = 2 - \sqrt{y+1}$ <p>حال <math>y</math> را بر حسب <math>x</math> پیدا می‌کنیم.</p>	۷

$$\begin{aligned}\sqrt{y+1} &= 2-x \Rightarrow y+1 = (2-x)^2 \\ \Rightarrow y &= (2-x)^2 - 1 \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= (2-x)^2 - 1\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}x = \frac{y+2}{2y-2} &\Rightarrow x(2y-2) = y+2 \Rightarrow 2xy - 2x = y+2 \\ \Rightarrow 2xy - y &= 2+2x \Rightarrow y(2x-1) = 2+2x \\ \Rightarrow y &= \frac{2+2x}{2x-1} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) &= \frac{2+2x}{2x-1}\end{aligned}$$

$$\frac{-\sin 30^\circ - 2 \cos 45^\circ}{\tan 45^\circ - 3 \tan 60^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1 - 3\sqrt{3}} = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{2}}{1 - 3\sqrt{3}}$$

پاسخ:

۸

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sin(90^\circ + 30^\circ) + 3 \cos(270^\circ + 30^\circ)}{3 \tan(90^\circ + 45^\circ)} = \frac{\cos 30^\circ + 3 \sin 30^\circ}{-3 \cot 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)}{-3(1)} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 3}{-6}\end{aligned}$$

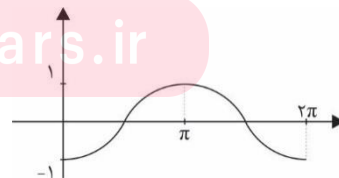
پاسخ: ابتدا تمام نسبت‌های مثلثاتی را طوری ساده می‌کنیم که در آنها زاویهٔ  $20^\circ$  ظاهر شود.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(90^\circ + 20^\circ) + 2 \cos(270^\circ + 20^\circ)}{3 \cos(90^\circ - 20^\circ)} &= \frac{\cos 20^\circ + 2 \sin 20^\circ}{3 \sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{3 \sin 20^\circ} + \frac{2 \sin 20^\circ}{3 \sin 20^\circ} \\ &= \frac{1}{3} \cot 20^\circ + \frac{2}{3} = \frac{1}{3 \tan 20^\circ} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3a} + \frac{2}{3} = \frac{1+2a}{3a}\end{aligned}$$

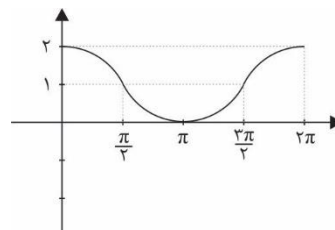
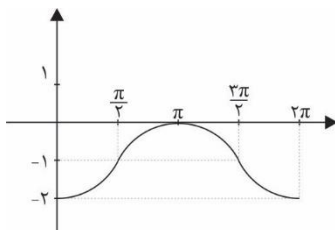
۹

پاسخ: الف) می‌توانیم ابتدا این تابع را ساده کنیم و سپس نمودار آن را رسم کنیم.

$$\cos(3\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$



ب) ابتدا نمودار  $y = -1 - \cos x$  را رسم می‌کنیم و سپس قسمت پائین محور  $x$ ها را نسبت به محور  $x$ ها قرینه می‌کنیم.



۱۰

پاسخ: الف)

۱۱

$$4^{2x-3} = 8^{x+2} \Rightarrow 2^{4x-6} = 2^{3x+6} \Rightarrow 4x-6 = 3x+6 \Rightarrow x = 12$$

$$2^x(2^{-1} + 1 + 2) = 224 \Rightarrow 2^x \left(\frac{3}{2}\right) = 224 \Rightarrow 2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$$

(ب)

پاسخ: الف) دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

۱۲

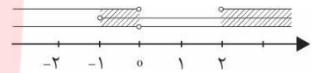
$$D: \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ 1 > 0 \\ 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} > 0$$

x	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$
x+1	-	o	+	+
x-1	-	-	+	+
$\frac{x+1}{x-1}$	تن	+	o	-

$\Rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$

(ب) مجموعه جواب دستگاه نامعادلات زیر را به دست می‌آوریم:

$$D: \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2) > 0 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$



اکنون با استفاده از نمودار زیر اشتراک جواب‌های سه نامعادله فوق را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow D = (-1, 0) \cup (2, +\infty)$$

پاسخ:

۱۳

الف)  $\log_9^8 1 = \log_9^{9^2} = 2 \log_9^9 = 2$

ب)  $\log_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{-2} \log_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = -\frac{3}{4}$

پ)  $\log_{\sqrt[3]{32}}^{\frac{1}{25}} = \log_{\frac{1}{\sqrt[3]{32}}}^{\frac{1}{25}} = \log_{\frac{1}{2^5}}^{\frac{1}{5}} = -2 \times \frac{3}{5} \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{6}{5}$

ت)  $\log_{1+\sqrt{2}}^{3+2\sqrt{2}} = \log_{1+\sqrt{2}}^{(1+\sqrt{2})^2} = 2 \log_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} = 2$

پاسخ:

۱۴

$$\log_2^{\Delta x+1} + \log_2^x = 2 \Rightarrow \log_2^{(\Delta x+1)x} = 2$$

(الف)



$$\Rightarrow 2^2 = 5x^2 + x$$

$$\Rightarrow 5x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{4}{5}$$

$x = -1$  قابل قبول نیست چون در دامنه معادله لگاریتمی وجود ندارد (جلوی لگاریتم را منفی می کند).

$$\log_2^{12x-21} - \log_2^{x^2-3} = 2 \Rightarrow \log_2^{12x-21} = 2 + \log_2^{x^2-3} \quad (ب)$$

$$\Rightarrow \frac{12x-21}{x^2-3} = 2^2 \Rightarrow 12x-21 = 4x^2-12$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow (2x-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

چون  $x = \frac{3}{2}$  در دامنه معادله لگاریتمی قرار ندارد پس معادله فاقد جواب است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0 + 0 = 0 \quad (الف) \quad 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -2 + 2 = 0 \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{f(x)} = \sqrt{1} = 1 \quad (پ)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-2}{2} = -1 \quad (ت)$$

۱۶ حد چپ و راست این تابع را در  $x = 0$  محاسبه کرده و با هم مقایسه می کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] - 1 = -1 - 1 = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$$

www.my-dars.ir

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x - 6} = \frac{(-1)^2 - 3(-1) - 4}{(-1)^2 - 5(-1) - 6} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \quad (الف)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x - 6} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-4)(x+1)}{(x-6)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-4}{x-6} = \frac{5}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \quad (ب)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x} = \frac{0}{2} = 0$$

الف) مقدار تابع در نقطه ۲ یعنی  $f(2)$  وجود ندارد، بنابراین تابع در نقطه  $x = 2$  ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 3 = 6 \quad (\text{ب})$$

$$f(3) = 5 \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

چون حد تابع در نقطه  $x = 3$  با  $f(3)$  برابر نیست، بنابراین  $f(x)$  در نقطه  $x = 3$  پیوسته نیست

پاسخ:

$$P(\text{تحصیلات دانشگاهی} | \text{مرد بودن}) = \frac{n(\text{تحصیلات دانشگاهی و مرد بودن})}{n(\text{تحصیلات دانشگاهی})} = \frac{15}{10+15} = \frac{3}{5}$$

پاسخ: اگر  $A$  پیشامد قبول شدن در درس فیزیک و  $B$  پیشامد قبول شدن در درس ریاضی باشد، داریم:

$$P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{6}, P(B | A) = \frac{1}{3}$$

پیشامدی که به دنبال محاسبه احتمال آن هستیم  $A \cup B$  است.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{6}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6+3-2}{12} = \frac{7}{12}$$

پاسخ: ابتدا مجموع تمام داده‌ها را به دست می‌آوریم و سپس ۵ و ۷ را از مجموع داده‌ها کم می‌کنیم.

$$\mu = \frac{x_1 + \dots + x_{10}}{10} \Rightarrow 13/2 = \frac{x_1 + \dots + x_{10}}{10} \Rightarrow x_1 + \dots + x_{10} = 132$$

$$(x_1 + \dots + x_{10}) - (7 + 5) = 120$$

مجموع ۸ داده باقیمانده برابر ۱۲۰ است، بنابراین میانگین ۸ داده باقیمانده برابر است با:

$$\frac{120}{8} = 15$$

$$\frac{120}{8} = 15$$

امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح: مجتبی مظاهری فرد

جمع بارم: ۲۰

