فصل اول : هندسه و استدلال

بادرخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: خیلی خوب
سبز: متوسط
قرمز: به این قسمت مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول، به آن مبحث مسلط نبودید و دانش خود را در حد رنگ قرمز ارزیابی کردید، در نوبت‌های بعدی مطالعه و تمرین، در صورتی که پیشرفت کردید می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید.

- **هندسه و استدلال**
  - استدلال در هندسه
  - زاویه (آبی / سبز / قرمز)
    - مقدمات زاویه
    - خطوط موازی و مورب
  - مثلث (آبی / سبز / قرمز)
    - مثلث و زاویه در آن
    - مثلث‌های همنهشت
    - انواع مثلث
      - مثلث متساوی‌الساقین
      - مثلث قائم‌الزاویه
  - از خم تا چند ضلعی (آبی / سبز / قرمز)
    - خم و انواع آن
    - چند ضلعی
    - متوازی الاضلاع
    - چهارضلعی‌های خاص

تعداد مثال های فصل	۷۶
تعداد سؤالات تشریحی	۳۲
تعداد تست ها	۴۲

فصل اول

هندسه و استدلال

استدلال در هندسه

به طور کلی در هندسه، مسأله‌ها را می‌توان به ۲ دسته‌ی عمده‌ی: «مسأله‌های ثابت کردنی» و «مسأله‌های یافتنی» تقسیم کرد. در مسأله-های ثابت کردنی، بخشهای اساسی عبارت است از «فرض» و «حکم» و در مسأله‌های یافتنی، بخشهای اساسی عبارت است از «داده‌ها»، «شرط» و «مجهول».

هدف یک مسأله ثابت کردنی، اثبات قطعی یک ادعا یا اثبات قطعی عدم صحت آن است و هدف یک مسأله‌ی یافتنی، بدست آوردن چیزی است، که همان مجهول مسأله است.

در حالت کلی برای حل کردن یک مسأله‌ی هندسه (و به طور کلی مسأله‌ی ریاضی) چهار مرحله‌ی زیر پیشنهاد می‌شود:

۱. فهمیدن مسأله (مجهول چیست؟ داده‌ها کدام است؟ شرط چیست؟ ...)

۲. طرح نقشه (یافتن ارتباط میان داده‌ها و مجهول‌ها)

۳. اجرای نقشه (این مرحله توسط استدلال‌های درست انجام می‌شود.)

۴. امتحان کردن جواب و نتیجه‌ی بدست آمده

همانطور که در مرحله‌ی سوم (اجرای نقشه) ذکر شد، باید برای رسیدن به نتیجه‌ی مسأله، استدلال کنیم، یعنی با توجه به مطالبی که همه-ی افراد درستی آن را قبول دارند، درست بودن یک مطلب جدید را نشان دهیم. مسلّم و واضح است که لزوماً یک راه رسیدن به نتیجه وجود ندارد و می‌تواند نوع استدلال ما فرق کند. در کتاب هندسه (۱) با دو نوع استدلال آشنا خواهیم شد:

استدلال استقرایی
استدلال استنتاجی

استدلال استقرایی

فرض کنید دانش آموزی در جلسات اول درس هندسه، تازه با مفهوم زاویه آشنا شده و به دنبال مجموع زوایای یک مثلث می‌گردد. این دانش آموز، چند مثلث دلخواه رسم می‌کند و با استفاده از نقّاله، شروع می‌کند به اندازه‌گیری زوایای مثلث و پس از چند بار اندازه گیری، به این حدس می‌رسد که «مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر 180° است». این دانش‌آموز، حدس خود را روی چند مثلث دیگر نیز امتحان می‌کند و این حدس را به عنوان یک نتیجه گیری کلی قبول کرده و با معلم خود در میان می‌گذارد.

به استدلالی که این دانش‌آموز برای رسیدن به نتیجه گیری این حکم، طی کرده است «استدلال استقرایی» گفته می‌شود.

در واقع این دانش آموز، بر اساس یک سری مشاهدات محدود (!) به یک نتیجه‌ی کلی رسیده است. دقت کنید که در این نوع استدلال، چیزی اثبات نشده، بلکه فقط نتیجه‌ای حدس زده شده است. این نوع استدلال، نمی‌تواند یک استدلال درست محسوب شود و صرفاً

می‌تواند مسیر ما را برای رسیدن به نتیجه‌ی مورد نظر و استفاده از استدلال‌های درست، هموارتر کند.

استدلال استنتاجی

در واقع اکثر اثبات‌ها و استدلال ما در ریاضیات و هندسه، همین نوع استدلال است، زیرا نتایج بدست آمده توسط استدلال استنتاجی همواره قابل قبول هستند. در این نوع استدلال از احکام درست که قبلاً آنها را ثابت کرده‌ایم، استفاده می‌کنیم.

تعریف نشده‌ها: در استدلال استنتاجی، با واژه‌ها و مفاهیمی سروکار داریم که تعریف صریح و دقیقی از آن نداریم و بـرای رهـایی از آنهـا و رفع بن بست در تعاریف و قضایا، آنها را به عنوان «تعریف نشده» می‌پذیریم.

به عنوان مثال، به تعریف «مربع» دقت کنید:

مربع: «مستطیلی که اضلاع آن با هم برابرند.»

← مستطیل: «متوازی الاضلاعی که چهارزاویه‌ی برابر دارد.»

← متوازی الاضلاع: «چهارضلعی‌ای که ضلع‌های مقابل آن موازی‌اند.»

← چهار ضلعی: «شکلی که چهار ضلع دارد.»

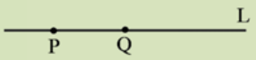
← شکل؟

در واقع برای مفاهیمی همچون: «شکل»، «نقطه»، «خط راست» و ....، تعریف دقیقی نداریم و بـرای همگـی صـرفاً یـک درک واضـح از آنهـا داریم. این چنین مفاهیمی را «مفاهیم اولیه» یا «تعریف نشده» می‌گوییم.

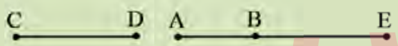
اصول: به گزاره‌های واضحی که درستی آنها بدیهی بوده و بدون اثبات، آنها را می‌پذیریم «اصول» می‌گوییم.

به عنوان مثال، در هندسه مسطحه، پنج اصل (به نام اصول پنج گانه‌ی اقلیدسی) داریم که عبارتند از:

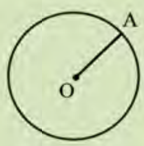
(اصل اول) به ازای هر نقطه‌ی P و هر نقطه‌ی Q که با P مساوی نباشد، خط یکتایی مانند L وجود دارد که بر P و Q می‌گذرد. (هر دو نقطه‌ی متمایز، یک خط راست منحصر به فرد را مشخص می‌سازند.)



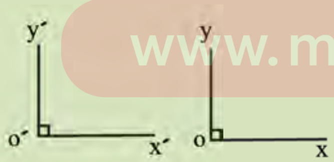
(اصل دوم) به ازای هر پاره خط AB و هر پاره خط CD، نقطه‌ی منحصر به فردی چون E وجود دارد، چنانکه B میان A و E واقع است و پاره خط CD با پاره خط BE قابل انطباق است. (هر پاره خط AB را می‌توان به اندازه‌ی پاره خط BE که با پاره خط داده‌شده‌ی CD قابل انطباق است، امتداد داد.)



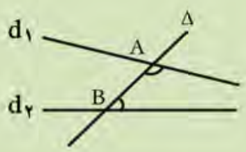
(اصل سوم) به ازای هر نقطه‌ی O و هر نقطه‌ی A که با O مساوی نباشد، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA وجود دارد.



(اصل چهارم) همه‌ی زاویه‌های قائمه، با یکدیگر قابل انطباقند.



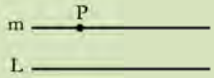
(اصل پنجم) اگر دو خط به وسیله‌ی موربی چنان قطع شوند که مجموع اندازه‌های زاویه‌ی درونی واقع در یک طرف مورب کمتر از 180° باشد، اگر این دو خط را تا بی نهایت امتداد دهیم، آنگاه این دو خط همدیگر را در همان طرف مورب، قطع می‌کنند.



توجه داشته باشید آقای پِلِی فِیر (playfair) در کتاب هندسه‌ی اقلیدسی خود در سال ۱۷۹۵ میلادی، اصل پـنجم را بـه صـورت اصـل زیـر آورده که هم ارز آن است و اکثراً شاید این اصل را به عنوان اصل پنجم اقلیدس شنیده باشند.

آورده که هم ارز آن است و اکثراً شاید این اصل را به عنوان اصل پنجم اقلیدس شنیده باشند.

(اصل توازی پلی فیر) به ازای هر خط L و هر نقطه‌ی P غیرواقع بر آن، تنها یک خط مانند m وجود دارد چنانکه از P می‌گذرد و با L موازی است.



قضیه: گزاره‌ای است که درستی آن نیازمند اثبات و برهان است. هر قضیه شامل دو قسمت است:

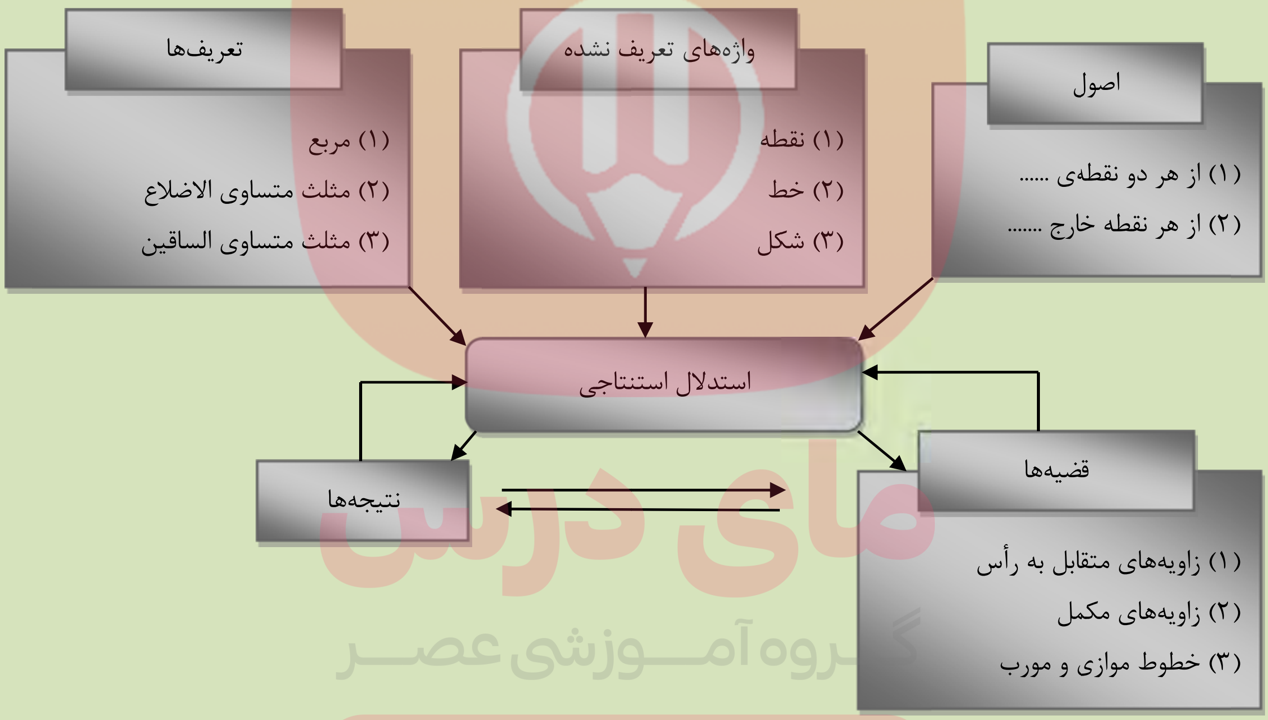
(قسمت اول) **فرض قضیه**: گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آنها را قبول داریم.

(قسمت دوم) **حکم یا نتیجه‌ی قضیه**: گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آنها را می‌خواهیم ثابت کنیم.

به عنوان مثال در قضیه‌ی «در هر مثلث قائم الزاویه، مربع اندازه‌ی وتر، مساوی مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه است.» که قضیه‌ی فیثاغورس نامیده می‌شود، فرض و حکم قضیه به صورت زیر هستند:

قضیه‌ی فیثاغورس: {(فرض قضیه) مثلث، قائم الزاویه است.
(حکم قضیه) مربع اندازه‌ی وتر برابر مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر است.}

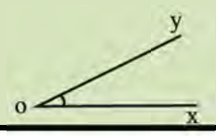
وقتی در هندسه، از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، در واقع با استفاده از تعریف‌ها، اصول، واژه‌های تعریف نشده و قضیه‌های درست، روندی را طی می‌کنیم که ما را به نتیجه‌ی مورد نظر می‌رساند.



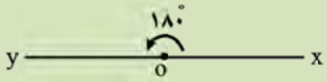
زاویه

مقدمات زاویه

زاویه: شکلی است که از دو نیم خط با مبدأ مشترک پدید می‌آید. مبدأ مشترک، «رأس زاویه» و هر یک از دو نیم‌خط، «ضلع زاویه» نامیده می‌شود؛ در شکل بالا، زاویه $x\hat{o}y$ را به صورت‌های $x\hat{o}y$ یا $\angle xoy$ و یا $\hat{o}$ $(\angle o)$ نمایش می‌دهند.

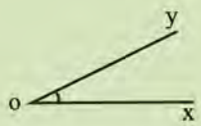


زاویه‌ی نیم صفحه: زاویه‌ای است که دو ضلع آن در یک امتداد باشند. در واقع، زاویه‌ی نیم صفحه برابر ۱۸۰ درجه است.

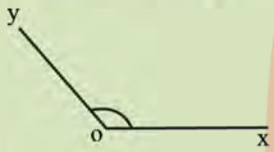


زاویه‌ی قائمه: نصف زاویه‌ی نیم صفحه است؛ اندازه‌ی زاویه‌ی قائمه ۹۰ درجه است.

زاویه‌ی حادّه (زاویه‌ی تند): زاویه‌ای است که از زاویه‌ی قائمه کوچکتر است. اندازه زاویه‌ی حادّه بین صفر و ۹۰ درجه است.



زاویه‌ی منفرجه (زاویه‌ی باز): زاویه‌ای است که بزرگتر از زاویه‌ی قائمه و کوچکتر از زاویه‌ی نیم صفحه است. اندازه زاویه‌ی منفرجه بین ۹۰° و ۱۸۰° است.



تعریف: (۱) دو زاویه‌ی α و β را «متمم» یکدیگر گویند هرگاه $\alpha+\beta=۹۰^\circ$.

(۲) دو زاویه‌ی α و β را «مکمل» یکدیگر گویند هرگاه $\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$.

▼ **مثال۱**: **اگر دو زاویه مکمل هم باشند و یکی n برابر دیگری باشد، اندازه‌ی هر یک را بدست آورید.** (پرتکرار، ۲ بار تکرار)

☑ **پاسخ**: *زاویه‌های فوق را α و β در نظر می‌گیریم، داریم:*

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۱۸۰^\circ\\ \alpha=n\beta\end{cases}\Rightarrow n\beta+\beta=۱۸۰^\circ\Rightarrow\beta=\frac{۱۸۰^\circ}{n+۱},\alpha=n\beta=\frac{۱۸۰^\circ n}{n+۱}$$

نکته: می‌توانیم متمم و مکمل زاویه‌ی x را با $(۹۰^\circ-x)$ و $(۱۸۰^\circ-x)$ نشان دهیم.

▼ **مثال۲**: **دو زاویه‌ی A و B متمم‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی A، برابر $\frac{۴}{۹}$ اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی B است. زاویه‌ی A چند درجه است؟**

(سراسری ریاضی - ۷۵)

۱) ۲۷ ۲) ۳۶ ۳) ۶۳ ۴) ۷۲

☑ **پاسخ**: *با توجه به فرض داریم:*

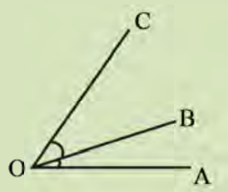
$$\begin{cases}\widehat{A}+\widehat{B}=۹۰^\circ\\ \widehat{A}=\frac{۴}{۹}(۱۸۰^\circ-\widehat{B})\Rightarrow\widehat{A}=۸۰^\circ-\frac{۴}{۹}\widehat{B}\end{cases}\Rightarrow(۸۰^\circ-\frac{۴}{۹}\widehat{B})+\widehat{B}=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow\frac{۵}{۹}\widehat{B}=۱۰^\circ\Rightarrow\widehat{B}=۱۸^\circ\Rightarrow\widehat{A}=۹۰^\circ-\widehat{B}=۷۲^\circ$$

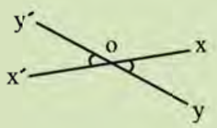
نکته: اگر دو زاویه با هم برابر باشند، آنگاه هم متممشان و هم مکملشان با هم برابر است.

گزینه (۴) صحیح است.

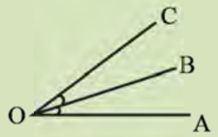
تعریف:



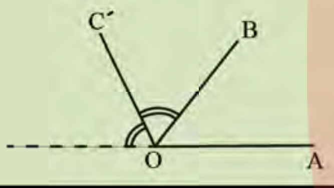
(۱) **دو زاویه‌ی مجاور:** دو زاویه‌ای هستند که در رأس و یک ضلع مشترکند و دو ضلع غیرمشترک آنها در دو طرف ضلع مشترکشان قرار دارد، مانند دو زاویه‌ی $A\hat{O}B$ و $B\hat{O}C$.



(۲) **دو زاویه‌ی متقابل به رأس:** دو زاویه‌ای هستند که رأس مشترک دارند و ضلعهای آنها دو به دو در امتداد یکدیگر و در دو جهت مختلف هستند، مانند زاویه‌های xoy و $x'oy'$.

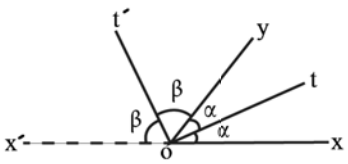


(۳) **نیمساز (داخلی) زاویه:** نیم‌خطی است که مبدأ آن رأس زاویه است و زاویه را به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم می‌کند، مانند نیم‌خط OB که نیمساز زاویه‌ی $A\hat{O}C$ است.



(۴) **نیمساز خارجی زاویه:** نیم‌خطی است که مبدأ آن رأس زاویه است و زاویه‌ای که از امتداد یکی از اضلاع زاویه پدید می‌آید را به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم می‌کند، مانند نیمخط OC' که نیمساز خارجی زاویه‌ی $A\hat{O}B$ است.

▼ **مثال۳:** **نشان دهید که نیمساز داخلی هر زاویه بر نیمساز خارجی‌اش عمود است.**



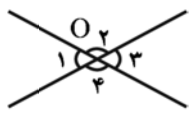
☑ **پاسخ:** **مطابق شکل ot و ot' نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی $x\hat{o}y$ هستند.**

مطابق شکل، نیمساز ot زاویه‌ی $x\hat{o}y$ را به دو زاویه و نیمساز ot' زاویه‌ی $x'\hat{o}y$ (مکمل $x\hat{o}y$) را به دو زاویه‌ی β تقسیم کرده است. چون دو زاویه‌ی $x\hat{o}y$ و $x'\hat{o}y$ مکمل هم هستند، پس:

$$x\hat{o}y + x'\hat{o}y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} \alpha + \beta = ۹۰^\circ$$

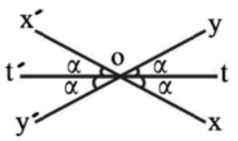
پس $t\hat{o}t' = \alpha + \beta = ۹۰^\circ$ *، یعنی نیمسازهای ot و ot' بر هم عمودند.*

▼ **مثال٤:** **نشان دهید که دو زاویه‌ی متقابل به رأس:**



اولاً) با هم مساوی‌اند. **ثانیاً) نیمسازهای آنها بر یک خط راست واقع‌اند.**

☑ **پاسخ:** *برای اثبات قسمت اول، مطابق شکل ، دو زاویه‌ی $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ همچنین دو زاویه‌ی $\hat{O}_۲$ و $\hat{O}_۳$ مکمل‌اند، یعنی داریم:*



$$\begin{cases} \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ \ (\text{زاویه‌ی نیم صفحه}) \\ \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ = ۱۸۰^\circ \ (\text{زاویه‌ی نیم صفحه}) \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۳$$

و به طریق مشابه داریم $\hat{O}_۲ = \hat{O}_۴$.

برای اثبات قسمت دوم، مطابق شکل روبه رو، ot و ot' نیمسازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس $x\hat{o}y$ و $x'\hat{o}y'$ را رسم می‌کنیم. در قسمت اول نشان داریم که $x\hat{o}y = x'\hat{o}y'$ ، پس ot و ot' هر کدام از این دو زاویه‌ی متقابل به رأس را به دو زاویه‌ی مساوی α تقسیم می‌کنند. از آنجا که $y\hat{o}y'$ یک زاویه‌ی نیم صفحه است، پس داریم:

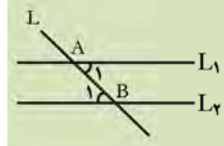
$$y\hat{o}y' = ۱۸۰^\circ \ (\text{نیم صفحه}) \Rightarrow ۲\alpha + x'\hat{o}y = ۱۸۰^\circ \quad (*)$$

برای زاویه‌ی $t\hat{o}t'$ *داریم:*

$$t\hat{o}t' = \alpha + x'\hat{o}y + \alpha = ۲\alpha + x'\hat{o}y = ۱۸۰^\circ$$

پس $t\hat{o}t'$ زاویه‌ی نیم صفحه است، یعنی ot و ot' در یک راستا قرار دارند.

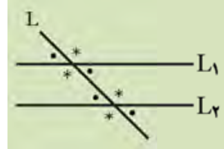
خطوط موازی و مورب



قضیه‌ی خط موازی و مورب: مطابق شکل، خط L ، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را قطع کرده و زاویه‌های $\hat{A}_۱$ و $\hat{B}_۱$ را پدید آورده است:

۱- اگر $L_۱ || L_۲$ ، آنگاه $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$.

۲- اگر $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$ ، آنگاه $L_۱ || L_۲$.



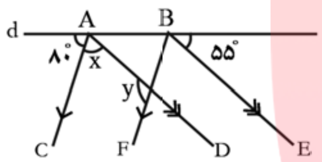
نتیجه: در برخورد خط L با دو خط موازی $L_۱$ و $L_۲$:

(اولاً) زوایای حادّه با هم و زوایای منفرجه نیز با هم برابرند.

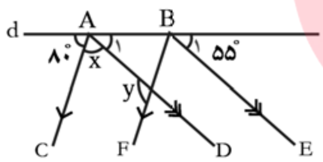
(ثانیاً) هر زاویه‌ی حادّه، مکمل زاویه‌ی منفرجه است.

در حالت خاص، اگر خط L بر دو خط $L_۱$ و $L_۲$ عمود باشد، هر ۸ زاویه قائمه هستند.

▼ **مثال۵: در شکل زیر اندازه‌ی زاویای x و y را بدست آورید.** (پر تکرار- ۶ بار تکرار)



☑ **پاسخ**: *مطابق شکل داریم:*



$$AD||BE \text{ و مورب } d \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = ۵۵^\circ$$

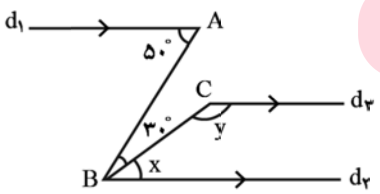
رأس **A** *روی خط* **d** *یک زاویه‌ی نیم صفحه بوجود آورده است، پس :*

$$۸۰^\circ + x + \hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}_۱ = ۵۵^\circ} x = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ - ۵۵^\circ = ۴۵^\circ$$

از طرفی خط مورب **AD** *دو خط موازی* **AC** *و* **BF** *را قطع کرده، پس طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \mathbf{y} = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$$

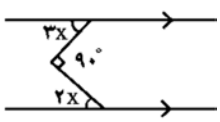
▼ **مثال۶: در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی زاویه‌های x و y را بدست آورید.** (پرتکرار- ٤ بار تکرار)



☑ **پاسخ**: *با توجه به شکل داریم:*

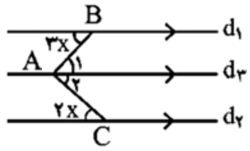
$$d_۱||d_۲ \text{ و مورب } AB \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} ۵۰^\circ = ۳۰^\circ + x \Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

$$d_۲||d_۳ \text{ و مورب } BC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} x + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow y = ۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ = ۱۶۰^\circ$$



▼ **مثال۷: در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی x را بدست آورید.** (پرتکرار- ۵ بار تکرار)

☑ **پاسخ**: *از رأس زاویه‌ی قائمه (نقطه‌ی* **A***) خط* $d_۳$ *را موازی* $d_۱$ *و* $d_۲$ *رسم می‌کنیم. داریم:*



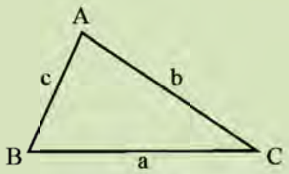
$$\begin{cases} d_۱ || d_۳ \text{ و مورب } AB \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۱ = ۳x \\ d_۲ || d_۳ \text{ و مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۲ = ۲x \end{cases}$$

چون $\hat{A} = ۹۰^\circ$، پس:

$$\hat{A} = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۳x + ۲x = ۹۰^\circ \Rightarrow x = \frac{۹۰^\circ}{۵} = ۱۸^\circ$$

مثلث

مثلث و زاویه در آن:



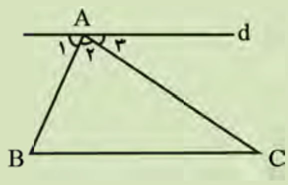
مثلث: اگر سه نقطه‌ی غیرواقع بر یک خط راست را، دو به دو به هم وصل کنیم، شکل حاصل را «مثلث» می‌نامند. هر یک از این نقطه‌ها، یک «رأس» مثلث و پاره خط ایجاد شده بین هر دو نقطه، یک «ضلع» مثلث است. همچنین زاویه‌های ایجاد شده بین هر دو ضلع را «زاویه‌های داخلی» مثلث می‌نامند.

در مثلث ABC (شکل روبه‌رو) سه ضلع AB، AC و BC و سه زاویه‌ی $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را «اجزای اصلی» مثلث می‌نامند.

از آنجا که هر ضلع مثلث، مقابل یک رأس و یک زاویه از آن است، لذا اندازه‌ی هر ضلع مثلث را با حرف کوچک رأس مقابلش نمایش می‌دهند؛ یعنی اضلاع BC، AC و AB را به ترتیب با a، b و c نمایش می‌دهند.

قضیه: مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث، ۱۸۰° است.

اثبات: مطابق شکل، از رأس A در مثلث ABC، خط d را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. داریم:



$$\begin{cases} d || BC \text{ و مورب } AB \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۱ = \hat{B} \\ d || BC \text{ و مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۳ = \hat{C} \end{cases}$$

رأس A روی خط d یک زاویه‌ی نیم صفحه تشکیل داده است، پس :

$$\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳ = ۱۸۰^\circ \ \text{(نیم صفحه)} \Rightarrow \hat{B} + \hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

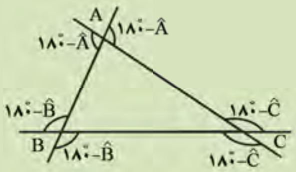
▼ **مثال۸:** **در یک مثلث، اندازه‌ی زاویه‌ی اول از زاویه‌ی دوم ۲۵ درجه بیشتر و اندازه‌ی زاویه‌ی سوم ۹ درجه کمتر از دو برابر زاویه‌ی دوم است. اندازه‌ی زوایای داخلی این مثلث را بدست‌آورید.**

☑ **پاسخ:** مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را در نظر می‌گیریم؛ طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = ۲۵^\circ + \hat{B} \\ \hat{C} = ۲\hat{B} - ۹^\circ \end{cases} \xrightarrow{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ} (۲۵^\circ + \hat{B}) + \hat{B} + (۲\hat{B} - ۹^\circ) = ۱۸۰^\circ$$

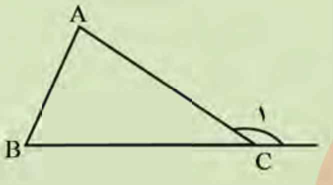
$$\Rightarrow ۴\hat{B} = ۱۸۰^\circ - ۱۶^\circ = ۱۶۴^\circ \xrightarrow{\div ۴} \hat{B} = ۴۱ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = ۲۵^\circ + ۴۱^\circ = ۶۶^\circ \\ \hat{C} = ۲(۴۱^\circ) - ۹^\circ = ۷۳^\circ \end{cases}$$

زاویه‌ی خارجی مثلث: زاویه‌ی بین هر ضلع و امتداد ضلع دیگر از مثلث را یک «زاویه‌ی خارجی» مثلث می‌نامند.



قضیه: زاویه‌ی خارجی نظیر هر رأس مثلث، برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور با آن.

اثبات: مطابق شکل، در مثلث ABC داریم:



$$\begin{cases} \hat{C}+\hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \ (\text{زاویه نیم صفحه}) \\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^\circ \ (\text{مجموع زوایای داخلی مثلث}) \end{cases} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \hat{C}+\hat{C}_۱$$

$$\Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{A}+\hat{B}$$

▼ **مثال۹: زاویه‌های داخلی مثلثی متناسب با اعداد ۸، ۵ و ۲ است. اندازه‌ی کوچکترین زاویه‌ی خارجی این مثلث چند درجه است؟**

(سراسری تجربی- ۸۰)

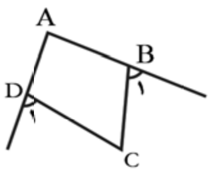
۱) ۷۲   ۲) ۸۲   ۳) ۸٤   ٤) ۹۶

☑ **پاسخ**: *با توجه به فرض، زاویه‌های مثلث را برابر ۸α ، ۵α و ۲α در نظر می‌گیریم. داریم:*

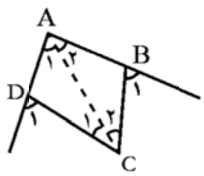
$$۸\alpha+۵\alpha+۲\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۵\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۱۲^\circ \Rightarrow \text{زوایای داخلی مثلث}: ۹۶^\circ , ۶۰^\circ , ۲۴^\circ$$

کوچکترین زاویه‌ی خارجی مثلث، متناظر با بزرگترین زاویه‌ی داخلی مثلث است، یعنی کوچکترین زاویه‌ی خارجی برابر است با $۱۸۰^\circ - ۹۶^\circ = ۸۴^\circ$.

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



▼ **مثال۱۰: در شکل روبرو ثابت کنید:** $\hat{B}_۱+\hat{D}_۱=\hat{A}+\hat{C}$

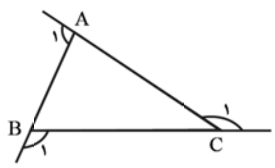


☑ **پاسخ**: *مطابق شکل، رأس A را به C وصل می‌کنیم؛ دو مثلث ACD و ABC پدید می‌آید. داریم:*

$$\begin{cases} (\text{زاویه‌ی خارجی } ACD)\ \hat{D}_۱ = \hat{A}_۱+\hat{C}_۱ \\ (\text{زاویه‌ی خارجی } ABC)\ \hat{B}_۱ = \hat{A}_۲+\hat{C}_۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} \hat{D}_۱+\hat{B}_۱ = \underbrace{(\hat{A}_۱+\hat{A}_۲)}_{\hat{A}} + \underbrace{(\hat{C}_۱+\hat{C}_۲)}_{\hat{C}}$$

▼ **مثال۱۱: ثابت کنید که در هر مثلث، مجموع زوایای خارجی برابر ۳۶۰° است.**

☑ **پاسخ**: *مطابق شکل با امتداد اضلاع ABC (در یک جهت) داریم:*

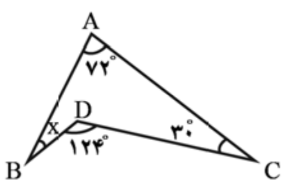


$$\begin{cases} (\text{زاویه‌ی خارجی})\hat{A}_۱ = \hat{B}+\hat{C} \\ (\text{زاویه‌ی خارجی})\hat{B}_۱ = \hat{A}+\hat{C} \\ (\text{زاویه‌ی خارجی})\hat{C}_۱ = \hat{A}+\hat{B} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} \hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱ = ۲(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}) = ۲\times ۱۸۰^\circ = ۳۶۰^\circ$$

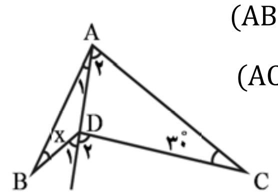
▼ **مثال۱۲**: در شکل روبه‌رو، مقدار x چند درجه است؟

۱) ۱۸   ۲) ۲۰

۳) ۲۲   ٤) ۲٤



☑ **پاسخ**: *مطابق شکل، رأس A را به D وصل کرده و امتداد می‌دهیم:*

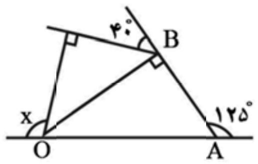


$$\left.\begin{array}{l}(\text{زاویه‌ی خارجی } ABD)\ \hat{D}_1 = \hat{A}_1 + x \\ (\text{زاویه‌ی خارجی } ACD)\ \hat{D}_2 = \hat{A}_2 + \hat{C}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = \underbrace{(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)}_{\hat{A}} + x + \hat{C}$$

$$\Rightarrow 124° = 72° + x + 30° \Rightarrow x = 22°$$

گزینه (۳) صحیح است.

▼ **مثال۱۳: در شکل مقابل $\hat{A} = 125°$ و $\hat{B} = 40°$، زاویه‌ی x چند درجه است؟** (سراسری تجربی -۸۷)

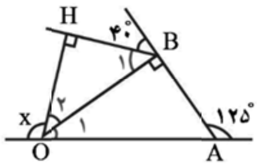


۱۰۵(۱

۱۱۰(۲

۱۱۵(۳

۱۲۵(٤



☑ **پاسخ:** *مطابق شکل، زاویه‌ی $125°$ زاویه‌ی خارجی مثلث OAB است، پس:*

$$125° = \hat{O}_1 + 90° \Rightarrow \hat{O}_1 = 35°$$

از طرفی برای زاویه‌ی نیم صفحه‌ی رأس B داریم:

$$90° + \hat{B}_1 + 40° = 180° \quad \Rightarrow \hat{B}_1 = 50°$$

در مثلث OHB داریم:

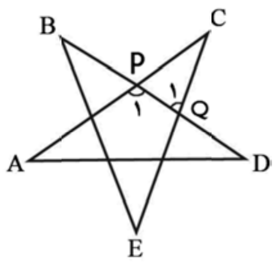
$$\hat{O}_2 = 180° - (90° + \hat{B}_1) = 180° - 140° = 40°$$

و در آخر برای زاویه‌ی نیم صفحه‌ی رأس O داریم:

$$x + \hat{O}_2 + \hat{O}_1 = 180° \Rightarrow x = 180° - (40° + 35°) = 105°$$

گزینه (۱) صحیح است.

▼ **مثال۱٤: در شکل روبه‌رو، مجموع زوایای A، B، C، D و E کدام است؟** (سراسری تجربی-۷٤)



۱۸۰°(۱

۲۷۰°(۲

۳)کمتر از ۱۸۰°

۴)بین ۱۸۰° و ۲۷۰°

☑ **پاسخ:** *در مثلث APD داریم:*

$$\hat{A} + \hat{D} + \hat{P}_1 = 180° \quad (1)$$

زاویه‌ی P_1 زاویه‌ی خارجی مثلث CPQ است، پس :

$$\hat{P}_1 = \hat{C} + \hat{Q}_1 \quad (2)$$

از طرفی زاویه‌ی Q_1 زاویه‌ی خارجی مثلث BQE است، پس:

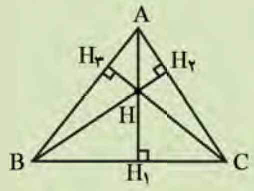
$$\hat{Q}_1 = \hat{B} + \hat{E} \quad (3)$$

$$(1) \text{ و } (2) \text{ و } (3) \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} + \hat{C} + \hat{B} + \hat{E} = 180°$$

گزینه (۱) صحیح است.

اجزای فرعی مثلث:

در قسمت قبل، اضلاع و زاویه‌های یک مثلث را به عنوان اجزای اصلی مثلث معرفی کردیم. در این قسمت، به معرفی اجزای فرعی مثلث از جمله «ارتفاع‌ها»، «میانه‌ها»، «نیمسازها» و «عمود منصف‌های اضلاع» می‌پردازیم.



۱.ارتفاع مثلث: هر ارتفاع مثلث، پاره خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث و سر دیگر آن، پای عمودی است که از آن رأس بر ضلع مقابل به آن رأس فرود می‌آید، مانند ارتفاع AH_1 در مثلث روبه‌رو:

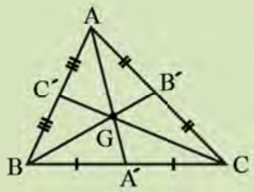
تذکر:

(۱) هر مثلث، سه ارتفاع دارد؛ AH_1، BH_2 و CH_3 که هر سه در نقطه‌ای مانند H به نام «مرکز ارتفاعی» مثلث همرسند.

(۲) اندازه‌ی ارتفاع‌های AH_1، BH_2 و CH_3 را به ترتیب با h_a، h_b و h_c نشان می‌دهند.

(۳) چنانچه مثلث دارای زاویه‌ی منفرجه باشد، آنگاه مرکز ارتفاعی مثلث در خارج مثلث می‌افتد.

(۴) چنانچه مثلث دارای زاویه‌ی قائمه باشد، آنگاه مرکز ارتفاعی مثلث، همان رأس قائمه است.

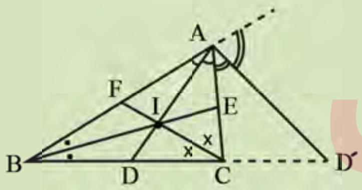


۲.میانه‌ی مثلث: پاره‌خط‌هایی که هر رأس مثلث را به وسط ضلع روبه‌رو به آن رأس وصل می‌کنند، میانه‌های (اضلاع) مثلث نامیده می‌شوند.

تذکر:

(۱) اندازه‌ی میانه‌های AA'، BB' و CC' از مثلث ABC را با m_a، m_b و m_c نشان می‌دهند.

(۲) ثابت می‌شود که سه میانه‌ی هر مثلث در نقطه‌ی G به نام «مرکز ثقل» مثلث همرسند و این نقطه، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کند.



۳. نیمساز زاویه‌های مثلث: پاره‌خط‌هایی هستند که هر زاویه‌ی مثلث را نصف می‌کنند و به رأس زاویه و نقطه‌ای از ضلع روبه‌رو به آن محدودند؛ مانند پاره خط‌های AD، AD'، BE و CF در مثلث ABC:

تذکر:

(۱) هر مثلث، سه نیمساز داخلی (AD، BE و CF) و سه نیمساز خارجی (AD'، BE' و CF') دارد.

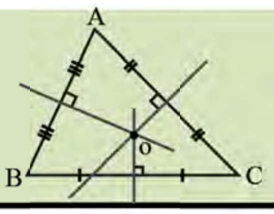
(۲) اندازه‌ی نیمسازهای داخلی AD، BE و CF از مثلث ABC را با d_a، d_b و d_c نشان می‌دهند.

(۳) اندازه نیمسازهای خارجی AD'، BE' و CF' از مثلث ABC را با d'_a، d'_b و d'_c نشان می‌دهند.

(۴) ثابت می‌شود که سه نیمساز داخلی هر مثلث در نقطه‌ی I به نام «مرکز دایره‌ی محاطی» مثلث همرسند.

(۵) ثابت می‌شود که نقطه‌ی همرسی نیمسازهای داخلی مثلث، از سه ضلع آن مثلث به یک فاصله است.

(۶) همچنین ثابت می‌شود که در هر مثلث دو نیمساز خارجی به همراه نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم همرسند.



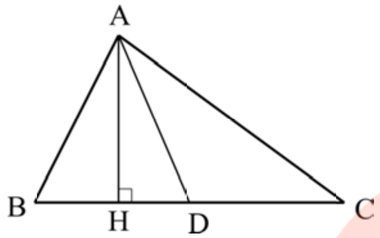
۴. عمود منصف اضلاع مثلث: خطی است که از وسط یک ضلع مثلث می‌گذرد و بر آن عمود است.

تذکر:

(۱) هر مثلث، سه عمود منصف دارد که ثابت می‌شود در نقطه‌ی O به نام «مرکز دایره‌ی محیطی» مثلث همرسند.

(۲) ثابت می‌شود که نقطه‌ی همرسی عمود منصف‌ها، از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

▼ مثال۱۵: ثابت کنید در هر مثلث، اندازه‌ی زاویه‌ای که بین نیمساز و ارتفاع نظیر یک زاویه پدید می‌آید برابر است با نصف قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی دیگر. (پرتکرار- ۸ بار تکرار)



☑پاسخ:

فرض	نیمساز $\hat{A}$: AD ، ارتفاع: AH
حکم	$H\hat{A}D = \dfrac{\lvert \hat{B} - \hat{C} \rvert}{۲}$

با توجه به شکل داریم:

$$H\hat{A}D = H\hat{A}C - D\hat{A}C \quad (*)$$

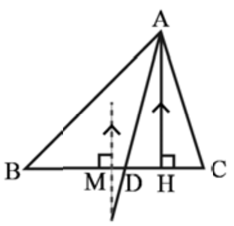
از طرفی: $\begin{cases} H\hat{A}C = ۹۰^\circ - \hat{C} \quad (\text{در مثلث } HAC) \\ D\hat{A}C = \frac{\hat{A}}{۲} \quad (\text{نیمساز } \hat{A} \text{ } AD) \end{cases} \xrightarrow{(*)} H\hat{A}D = \left(۹۰^\circ - \hat{C}\right) - \frac{\hat{A}}{۲} \quad (**)$

همانطور که می‌دانید $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ *، پس* $\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ$ *؛ لذا به عنوان یک ایده‌ی خوب، همواره به خاطر داشته باشید که می‌توانید هرکجا که لازم بود به جای ۹۰°، عبارت* $\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲}$ *را جایگذاری کنید، در نتیجه:*

$$(**) \Rightarrow H\hat{A}D = \frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} - \hat{C} - \frac{\hat{A}}{۲} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲} \xrightarrow{\text{در حالت کلی}} \frac{\lvert \hat{B} - \hat{C} \rvert}{۲}$$

▼ مثال۱۶: اگر در مثلث ABC، $\hat{A} = ۵۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$، آنگاه زاویه‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع BC چقدر است؟ (آزاد-۷۸)

۱) ۱۵° ۲) ۷۵° ۳) ۵° ۴) ۴۵°



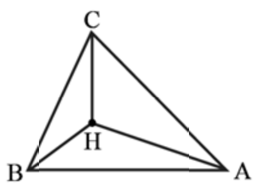
☑پاسخ: *زاویه‌ی $\hat{C}$ برابر می‌شود با:* $\hat{C} = ۱۸۰^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$

مطابق شکل، عمود منصف ضلع BC موازی ارتفاع AH است، پس کافیست زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز خارج شده از رأس A را بدست آوریم که طبق مثال قبل برابر می‌شود با:

$$H\hat{A}D = \frac{\lvert \hat{B} - \hat{C} \rvert}{۲} = \frac{\lvert ۶۰^\circ - ۷۰^\circ \rvert}{۲} = ۵^\circ$$

گزینه (۳) صحیح است.

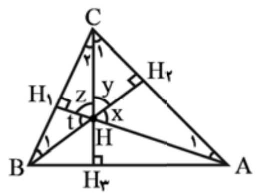
▼ مثال۱۷: در مثلث ABC که در آن $\hat{A} = ۴۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و H محل تلاقی سه ارتفاع است، زاویه‌ی $A\hat{H}C$ چند برابر زاویه‌ی $B\hat{H}C$ است؟ (آزاد -۸۸)



۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

☑**پاسخ**:مطابق شکل، ارتفاع $AH_۱$، $BH_۲$ و $CH_۳$ را رسم می‌کنیم. با نامگذاری زاویه‌های روی شکل داریم:



$$\begin{cases} CHH_۲: y+\hat{C}_۱=۹۰^\circ \\ ACH_۲: \hat{C}_۱+\hat{A}=۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow y=\hat{A}$$

$$\begin{cases} AHH_۲: x+\hat{A}_۱=۹۰^\circ \\ ACH_۱: \hat{A}_۱+\hat{C}=۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x=\hat{C}$$

برای زاویه‌ی نیم صفحه‌ی $A\hat{H}H_۱$ داریم:

$$A\hat{H}H_۱=x+y+z=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}+\hat{A}+z=۱۸۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ} z=\hat{B}$$

همچنین دو زاویه‌ی x و t متقابل به رأس‌اند، پس $t=x=\hat{C}$.

در این مثلث، چون $\hat{A}=۴۰^\circ$، $\hat{B}=۶۰^\circ$، پس $\hat{C}=۸۰^\circ$ و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} A\hat{H}C=x+y=\hat{C}+\hat{A}=۸۰^\circ+۴۰^\circ=۱۲۰^\circ \\ B\hat{H}C=t+z=\hat{C}+\hat{B}=۸۰^\circ+۶۰^\circ=۱۴۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{A\hat{H}C}{B\hat{H}C}=\frac{۱۲۰^\circ}{۱۴۰^\circ}=\frac{۶}{۷}$$

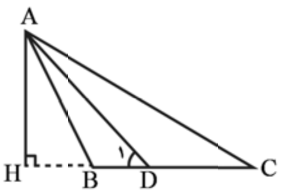
گزینه (۳) صحیح است.

▼**مثال۱۸: اگر در مثلثی $\hat{B}-\hat{C}=۹۰^\circ$، آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و ضلع BC برابر است با:** (سراسری تجربی- ۵۱)

۱) ۱۵° ۲) ۳۰°

۳) ۴۵° ۴) ۶۰°

☑**پاسخ**:در مثال۱۵، ثابت کردیم که زاویه‌ی بین نیمساز داخلی $\hat{A}$ و ارتفاع AH برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویه‌ی $\hat{B}$ و $\hat{C}$، پس مطابق شکل داریم:



$$H\hat{A}D=\frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}=\frac{۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$$

پس در مثلث HAD داریم:

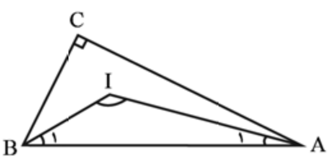
$$۹۰^\circ+H\hat{A}D+\hat{D}_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۱=۱۸۰^\circ-۱۳۵^\circ=۴۵^\circ$$

گزینه (۳) صحیح است.

▼**مثال۱۹: در مثلث قائم الزاویه با زوایای $\hat{A}=۲۰^\circ$ و $\hat{C}=۹۰^\circ$، زاویه‌ی بین نیمسازهای زاویه‌های A و B کدام است؟** (آزاد – ۸۶)

۱) ۱۰° ۲) ۳۵° ۳) ۱۱۰° ۴) ۱۳۵°

☑**پاسخ**:مطابق شکل، نقطه‌ی برخورد نیمسازهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را I در نظر می‌گیریم.



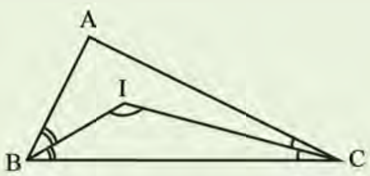
در مثلث ABI داریم:

$$\hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{I}=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{۲۰^\circ}{۲}+\frac{۷۰^\circ}{۲}+\hat{I}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{I}=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ=۱۳۵^\circ$$

گزینه (۴) صحیح است.

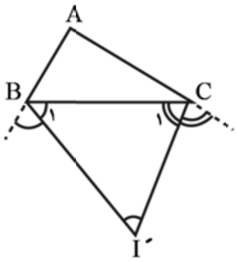
نکته: زاویه‌ی منفرجه‌ی بین نیمسازهای داخلی زوایای B و C در مثلث ABC برابر است با:



$$B\hat{I}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}$$

▼**مثال۲۰: ثابت کنید در مثلث ABC، زاویه‌ی حاده‌ی بین دو نیمساز خارجی زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برابر است با:** $۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$ (پرتکرار - ۳ بار تکرار)

☑**پاسخ:** *مطابق شکل، نیمسازهای خارجی زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نقطه‌ی I' متقاطع‌اند، داریم:*

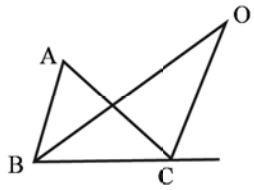


$$\begin{cases} \hat{B}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{B}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} \\ \hat{C}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{I'BC}: \hat{I'} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱) = ۱۸۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} - \frac{\hat{C}}{۲}) = \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

توجه کنید که باز هم از رابطه‌ی مهم $\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ$ *استفاده کردیم.*

▼**مثال۲۱: در شکل زیر، اگر $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و BO و CO نیمساز باشند، آنگاه:** (آزاد -۷۶)



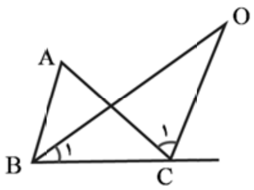
۱) $\hat{O} = ۴۵^\circ$

۲) $\hat{O} = ۶۰^\circ$

۳) $\hat{O} = ۳۰^\circ$

۴) هیچکدام

☑**پاسخ:** *داریم:*



$$\begin{cases} (\hat{B} \text{ نیمساز داخلی}: BO) \rightarrow \hat{B}_۱ = \frac{\hat{B}}{۲} \\ (\hat{C} \text{ نیمساز خارجی}: CO) \rightarrow \hat{C}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲} \end{cases}$$

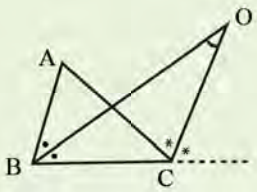
$$\overset{\Delta}{BOC}: \hat{O} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_۱ + \hat{C} + \hat{C}_۱) = ۱۸۰^\circ - (\frac{\hat{B}}{۲} + \hat{C} + ۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲}) = ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} - \frac{\hat{C}}{۲}$$

چون $\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ$ *، پس:* $\hat{O} = \frac{\hat{A}}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$

گزینه (۳) صحیح است.

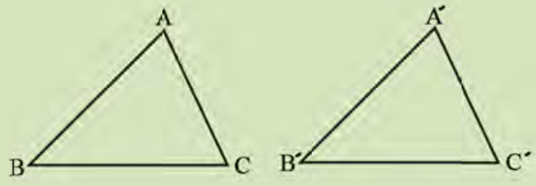
نکته: زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز داخلی $\hat{B}$ و نیمساز خارجی $\hat{C}$

برابر است با نصف زاویه سوم ،یعنی : $\hat{O} = \frac{\hat{A}}{۲}$



مثلث‌های همنهشت:

دو مثلث را که بتوان به طور کامل بر هم منطبق کرد، دو مثلث «همنهشت» می‌نامیم. به عنوان مثال، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به طور کامل می‌توان بر هم منطبق کرد، پس همنهشت بوده و تمامی اجزای اصلی آن (اضلاع و زوایای متناظر) با هم برابر است.



$$\overset{\Delta}{ABC} \cong A'\overset{\Delta}{B'}C' \Rightarrow \begin{cases} AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C' \\ \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

توجه: در دو مثلث همنهشت:
(۱) دو زاویه‌ی متناظر، دو زاویه‌ی روبه‌رو به دو ضلع برابر هستند.
(۲) دو ضلع متناظر، دو ضلع روبه‌رو به دو زاویه‌ی برابر هستند.

نکته: از همنهشتی دو مثلث نتیجه می‌شود که علاوه بر تساوی اجزای اصلی آنها، تمامی اجزای فرعی متناظر دو مثلث نیز با هم برابرند، یعنی در دو مثلث همنهشت، نیمسازهای متناظر، ارتفاع‌های متناظر، میانه‌های متناظر، ... همگی با هم برابر هستند.

حالت‌های اصلی همنهشتی دو مثلث:

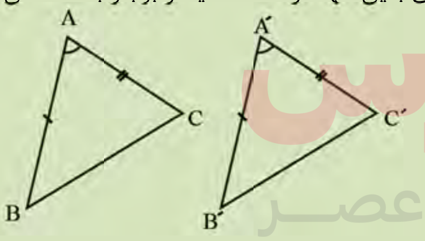
برای این که دو مثلث را بر هم منطبق کنیم، سه حالت اصلی برای همنهشتی آن دو مثلث وجود دارد که عبارتند از:

الف) حالت (**ض‌زض**): تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها

ب) حالت (**زض‌ز**): تساوی دو زاویه و ضلع بین آنها

ج) حالت (**ض‌ض‌ض**): تساوی سه ضلع

الف) حالت (**ض‌زض**): هرگاه دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند، یعنی:

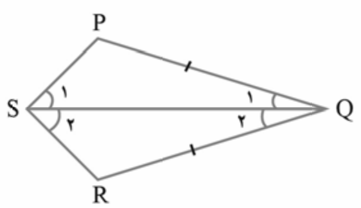


$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

▼ مثال۲۲: در چهار ضلعی PQRS، PQ=QR و قطر QS زاویه‌ی $\hat{Q}$ را نصف می‌کند. ثابت کنید قطر QS زاویه‌ی $\hat{S}$ را نیز نصف می‌کند.

(پرتکرار- ۳ بار تکرار)

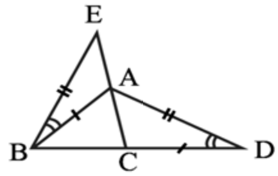
پاسخ: *مطابق شکل و با توجه به فرض داریم:*



$$\begin{cases} PQ = QR \\ QS\ (\text{ضلع مشترک}) \\ \hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} P\overset{\Delta}{Q}S \cong R\overset{\Delta}{Q}S$$

از همنهشتی دو مثلث PQS و RQS نتیجه می‌شود که دو زاویه‌ی $\hat{S}_1$ و $\hat{S}_2$ در آن دو مثلث نیز با هم برابر هستند، یعنی قطر QS زاویه‌ی $\hat{S}$ را نصف می‌کند.

▼ **مثال۲۳: با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه گیری لزوماً درست است؟**

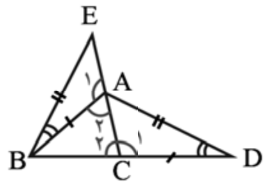


(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۵)

۱) AB=AC ۲) AB=BC

۳) AE=BC ۴) BC=AC

☑ **پاسخ**: با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} AB = CD \\ BE = AD \\ A\hat{B}E = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{CDA}$$

از همنهشتی دو مثلث ABE و CDA نتیجه می‌شود که:

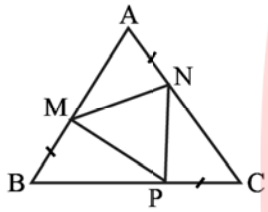
$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\text{تساوی زوایای مکمل}} \hat{A}_2 = \hat{C}_2$$

پس مثلث ABC در رأس B متساوی الساقین است، یعنی AB=BC.

گزینه (۲) صحیح است.

▼ **مثال۲۴: در شکل زیر مثلث ABC متساوی الاضلاع است. ثابت کنید.**

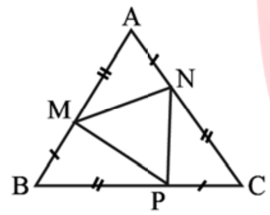
مثلث MNP نیز متساوی الاضلاع می‌باشد. (پرتکرار- ۳ بار تکرار)



☑ **پاسخ**: با توجه به شکل، چون مثلث ABC متساوی الاضلاع است (AB=AC=BC) و

AN=BM=CP، پس: AM=BP=CN

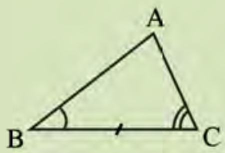
در نتیجه سه مثلث AMN، BMP و CNP به حالت (ض‌زض) با هم همنهشتند و داریم:

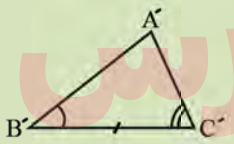


$$\overset{\Delta}{AMN} \cong \overset{\Delta}{BMP} \cong \overset{\Delta}{CNP} \Rightarrow MN = MP = NP$$

یعنی مثلث MNP متساوی الاضلاع است.

ب) حالت (زض‌ز): هرگاه دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند، **یعنی:**

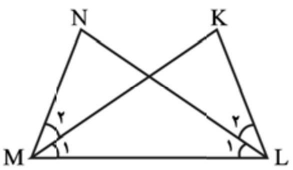




$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \\ BC = B'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

توجه: وقتی دو زاویه‌ی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ از مثلث ABC با دو زاویه‌ی $\hat{B}'$ و $\hat{C}'$ برابر است، نتیجه می‌شود که زاویه‌ی سوم آنها نیز با هم برابر است، یعنی $\hat{A} = \hat{A}'$؛ در نتیجه، لازم نیست که ضلع مفروض حتماً بین دو زاویه‌ی متناظر باشد!

▼ **مثال۲۵: در شکل مقابل $\hat{L}_1 = \hat{M}_1$ و $\hat{L}_2 = \hat{M}_2$، ثابت کنید: KL=NM** (پرتکرار-۲ بار تکرار)



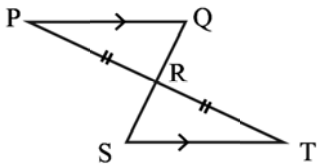
☑ **پاسخ**: توجه داشته باشید که $\underbrace{\hat{L}_1 + \hat{L}_2}_{\hat{L}} = \underbrace{\hat{M}_1 + \hat{M}_2}_{\hat{M}}$، پس:

$$\begin{cases} \hat{L} = \hat{M} \\ \hat{M}_1 = \hat{L}_1 \\ ML \ (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{NML} \cong \overset{\Delta}{KLM}$$

در دو مثلث همنهشت NML و KLM، داریم KL=NM.

▼ مثال۲۶: اگر PQ||ST و نقطه‌ی R وسط PT باشد، ثابت کنید نقطه‌ی R وسط QS نیز است.

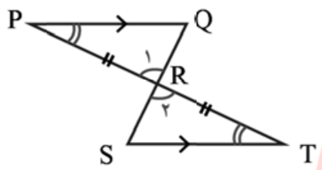
(پرتکرار- ۲ بار تکرار)



☑ **پاسخ:** مطابق شکل، PQ موازی ST و خط PT مورب است، پس طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که:

$\hat{P} = \hat{T}$

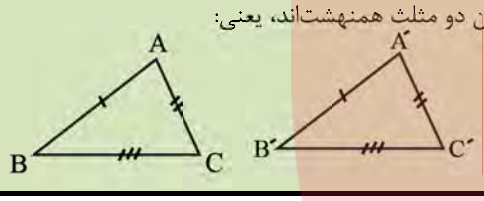
داریم:



$$\begin{cases} \hat{R}_1 = \hat{R}_2 \quad (\text{متقابل به رأس}) \\ \hat{P} = \hat{T} \\ PR = RT \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{PQR} \cong \overset{\Delta}{TSR}$$

در دو مثلث همنهشت PQR و TSR، دو ضلع QR و SR با هم برابر هستند، یعنی R وسط QS است.

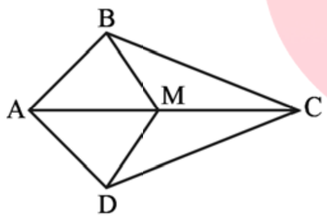
ج) حالت (ض‌ض‌ض): هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند، یعنی:



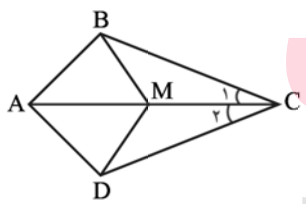
$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

▼ مثال۲۷: در شکل زیر، BC=DC و AB=AD می‌باشد.

ثابت کنید: BM=MD (پرتکرار- ۲ بار تکرار)



☑ **پاسخ:** مطابق شکل و فرض سوال داریم:



$$\begin{cases} AB = AD \\ BC = DC \\ AC (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC}$$

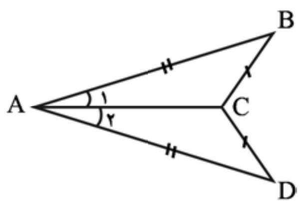
در دو مثلث همنهشت ABC و ADC، داریم $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$، پس:

$$\begin{cases} BC = DC \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ MC (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{BMC} \cong \overset{\Delta}{DMC}$$

در دو مثلث همنهشت BMC و DMC داریم BM=MD .

▼ مثال۲۸: در شکل مقابل ثابت کنید: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (پرتکرار- ۲ بار تکرار)

☑ **پاسخ:** با توجه به شکل داریم:

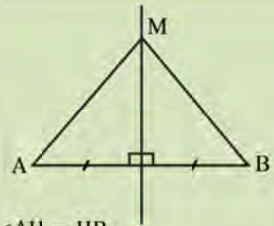


$$\begin{cases} AB = AD \\ BC = DC \\ AC (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC}$$

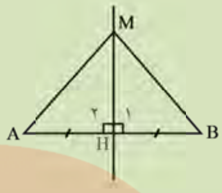
در دو مثلث همنهشت ABC و ADC داریم $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

قضیه: (خاصیت عمودمنصف یک پاره‌خط): هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط، فاصله‌ی یکسانی دارد، یعنی اگر M نقطه‌ای دلخواه روی عمود منصف پاره خط AB باشد، آنگاه:

MA=MB



اثبات: مطابق شکل داریم:



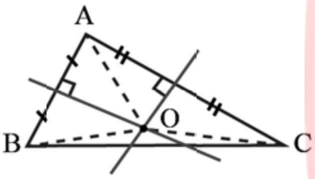
$$\begin{cases} AH = HB \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ MH (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}$$

در دو مثلث همنهشت AMH و BMH داریم MA=MB.

تمرین: نشان دهید که هر نقطه که فاصله‌ی یکسانی از دو سر پاره خط AB دارد، روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

▼ **مثال۲۹: ثابت کنید که عمود منصف‌های اضلاع مثلث ABC در یک نقطه متقاطع‌اند(همرسند).**

☑**پاسخ**: *مطابق شکل، فرض می‌کنیم که عمود منصف‌های دو ضلع AB و AC در نقطه‌ی O متقاطع باشند، داریم:*

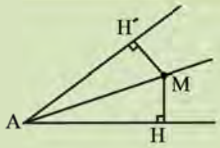


$$\begin{cases} O \rightarrow OA=OB \ \text{روی عمود منصف AB قرار دارد.} \\ O \rightarrow OA=OC \ \text{روی عمود منصف AC قرار دارد.} \end{cases} \Rightarrow OB = OC$$

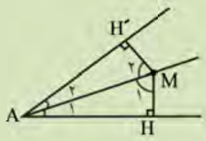
از OB=OC نتیجه می‌گیریم که O از دو سر ضلع BC به یک فاصله است، یعنی O روی عمود منصف BC قرار دارد و به بیان دیگر، سه عمود منصف اضلاع AB، AC و BC در نقطه‌ی O همرسند.

توجه: نقطه‌ی O که از سه رأس A، B و C به یک فاصله است، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌باشد.

قضیه (خاصیت نیمساز یک زاویه): هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه، فاصله‌ی یکسانی دارد، یعنی اگر M نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز $\hat{A}$ باشد، آنگاه: $MH = MH'$



اثبات: مطابق شکل $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$، پس دو زاویه‌ی $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ در دو مثلث AMH و AMH′ با هم برابر است و داریم:



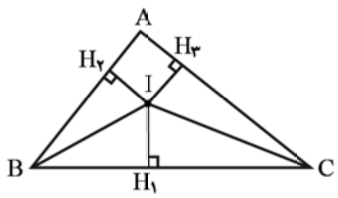
$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ AM (\text{ضلع مشترک}) \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{AMH'}$$

در دو مثلث همنهشت AMH و AMH′ داریم MH = MH′.

تمرین: نشان دهید که هر نقطه که فاصله‌ی یکسانی از دو ضلع زاویه‌ی $\hat{A}$ دارد، روی نیمساز $\hat{A}$ قرار دارد.

▼ **مثال۳۰**: ثابت کنید نیمسازهای داخلی مثلث ABC در یک نقطه متقاطع‌اند (همرسند).

☑**پاسخ**: *مطابق شکل، فرض می‌کنیم که نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نقطه‌ی I متقاطع باشند، داریم:*



$$\begin{cases} I \rightarrow IH_1 = IH_2 \ \text{روی نیمساز } \hat{B} \text{ قرار دارد.} \\ I \rightarrow IH_1 = IH_3 \ \text{روی نیمساز } \hat{C} \text{ قرار دارد.} \end{cases} \Rightarrow IH_2 = IH_3$$

از $IH_3 = IH_2$ نتیجه می‌گیریم که I از دو ضلع زاویه‌ی $\widehat{A}$ به یک فاصله است، یعنی I روی نیمساز $\widehat{A}$ قرار دارد و به بیان دیگر، سه نیمساز داخلی زوایای $\widehat{A}$، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ در نقطه‌ی I همرسند.

توجه: ***نقطه‌ی I که از سه ضلع AB، AC و BC به یک فاصله است، مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC می‌باشد.***

انواع مثلث

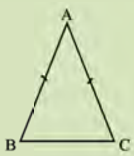
مثلث‌ها را می‌توان هم از نظر ضلع و هم از نظر زاویه تقسیم بندی کرد.

تقسیم بندی مثلث‌ها از نظر ضلع: ۱- مختلف الاضلاع ۲ - متساوی الساقین ۳- متساوی الاضلاع.

۱. **مختلف الاضلاع**: مثلثی که سه ضلع (دو به دو) نابرابر داشته باشد، مختلف الاضلاع نامیده می‌شود.

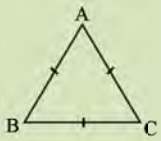
۲. **متساوی الساقین**: مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد، متساوی الساقین نامیده می‌شود.

به عنوان مثال، در شکل روبه‌رو AB = AC و مثلث ABC متساوی‌الساقین است. به هر کدام از دو ضلع برابر (AC, AB) «ساق»، به رأس مشترک بین دو ساق (رأس A) «رأس» و به ضلع روبه‌روی رأس (ضلع BC) «قاعده» مثلث گفته می‌شود.



۳. **متساوی الاضلاع** : مثلثی که سه ضلعش با هم برابر است، متساوی الاضلاع نامیده می‌شود.

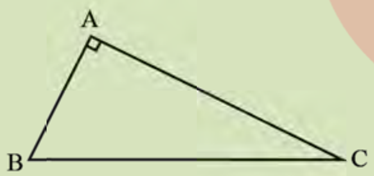
توجه : مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الساقین نیز هست!



تقسیم‌بندی مثلث‌ها ازنظر زاویه : ۱- قائم الزاویه ۲- حاده الزاویه ۳- منفرجه الزاویه.

۱- **قائم الزاویه**: مثلثی که زاویه‌ی قائمه دارد، قائم الزاویه نامیده می‌شود. به عنوان مثال،

در شکل روبه‌رو $\widehat{A} = 90^\circ$ و مثلث ABC قائم الزاویه است. به ضلع روبه‌روی زاویه‌ی قائمه (ضلع BC) «وتر» و به هر یک از اضلاع دیگر (AB, AC) «ضلع قائمه» گفته می‌شود.



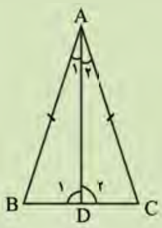
۲- **حاده الزاویه** : مثلثی که همه‌ی زاویه‌های آن حاده است، حاده الزاویه نامیده می‌شود.

۳- **منفرجه الزاویه** : مثلثی که یکی از زوایای آن منفرجه است، منفرجه الزاویه نامیده می‌شود.

مثلث متساوی الساقین :

قضیه : در هر مثلث متساوی الساقین، زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم مساوی‌اند.

اثبات : مطابق شکل. نیمساز زاویه‌ی رأس A را رسم می‌کنیم، داریم :



$$\begin{cases} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ AB = AC \\ AD(\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACD}$$

در دو مثلث همنهشت ABD و ACD، داریم $\widehat{B} = \widehat{C}$.

نتیجه : تساوی اجزای متناظر دو مثلث همنهشت ABD و ACD نتیجه می‌دهد که $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 90^\circ$ و BD = DC، یعنی «در مثلث متساوی الساقین، نیمساز زاویه رأس، ارتفاع و میانه نیز هست.»

قضیه : مثلثی که هر یک از بندهای زیر در آن برقرار باشد، متساوی الساقین است.

الف) دو زاویه‌ی برابر داشته باشد.

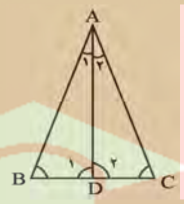
ب) نیمساز و ارتفاع نظیر یک رأس بر هم منطبق باشند.

ج) نیمساز و میانه‌ی نظیر یک رأس بر هم منطبق باشند.

د) ارتفاع و میانه‌ی نظیر یک ضلع بر هم منطبق باشند.

اثبات : تنها مورد (الف) را ثابت می‌کنیم و بقیه‌ی موارد را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

نیمساز زاویه‌ی رأس A را رسم می‌کنیم، داریم :

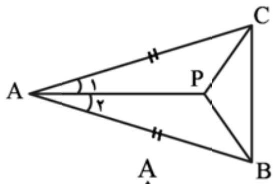


$$\begin{cases}\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ \widehat{B} = \widehat{C}\end{cases} \xrightarrow[\text{ACD, ABD}]{\text{جمع زوایا در دو مثلث}} \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = 90^\circ$$

$$\begin{cases}\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ AD(\text{ضلع مشترک})\end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACD}$$

در دو مثلث همنهشت ABD و ACD داریم AB = AC.

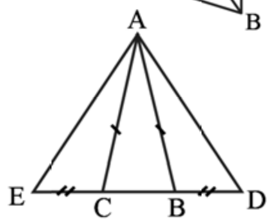
▼ **مثال ۳۱** :**درشکل زیر نشان دهید مثلث PBC متساوی‌الساقین است.** (پر تکرار- ۲ بار تکرار)



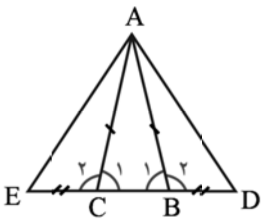
☑ **پاسخ**: *مطابق شکل داریم:*

$$\begin{cases}AB = AC \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \\ AP(\text{ضلع مشترک})\end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{APB} \cong \overset{\Delta}{APC}$$

در دو مثلث همنهشت APB و APC داریم PB = PC، یعنی مثلث PBC در رأس P متساوی الساقین است.



▼ **مثال ۳۲** : **با توجه به شکل ثابت کنید : AD = AE** (پر تکرار- ۲ بار تکرار)



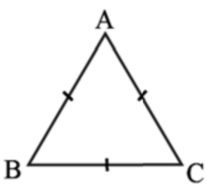
☑ **پاسخ**: *چون مثلث* **ABC** *متساوی الساقین است* **(AB = AC)**، *پس* $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$ *و در نتیجه* $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$ *است، داریم :*

$$\begin{cases}AB = AC \\ \widehat{B}_2 = \widehat{C}_2 \\ BD = CE\end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACE}$$

در دو مثلث همنهشت ABD و ACE داریم AD = AE، یعنی مثلث ADE در رأس A متساوی الساقین است.

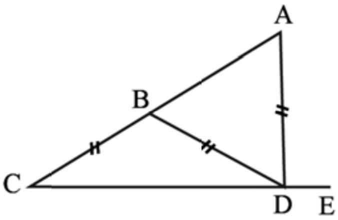
▼ **مثال ۳۳** : **ثابت کنید تمام زوایای یک مثلث متساوی الاضلاع برابر °۶۰ هستند.**

☑ **پاسخ**: *ابتدا نشان می‌دهیم که تمام زوایای مثلث متساوی الاضلاع با هم برابرند :*



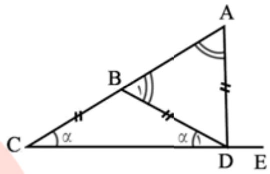
$$\begin{cases}AB = AC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{B} \\ AB = BC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{A}\end{cases} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$$

از طرفی مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است، پس : $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\frac{1}{3}\underbrace{(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})}_{180^\circ}=60^\circ$



▼ **مثال۳۴ : با توجه به شکل توضیح دهید که چرا $A\hat{D}E = 3\,A\hat{C}E$.** (پر تکرار- ۲ بار تکرار)

☑ **پاسخ**: مطابق شکل، در مثلث متساوی الساقین **CBD** فرض می‌کنیم که $\hat{C} = \hat{D}_1 = \alpha$؛ داریم :



$$(\overset{\Delta}{CBD} \text{ زاویه خارجی}) \ \hat{B}_1 = \hat{C} + \hat{D}_1 = 2\alpha$$

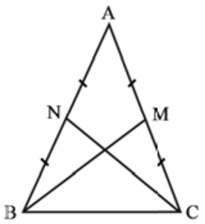
$$(\text{متساوی الساقین}) \ \overset{\Delta}{ABD}: AD = DB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_1 = 2\alpha$$

در مثلث **ACD**، زاویه‌ی $\widehat{ADE}$ زاویه‌ی خارجی است، پس :

$$A\hat{D}E = \hat{A} + \hat{C} = 2\alpha + \alpha = 3\alpha = 3A\hat{C}E$$

▼ **مثال۳۵ : ثابت کنید میانه‌های نظیر ساق‌های یک مثلث متساوی الساقین با هم برابرند.** (پر تکرار- ۳ بار تکرار)

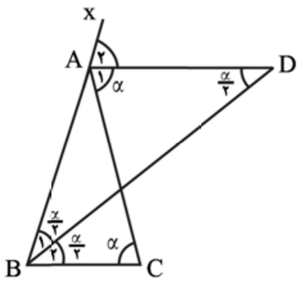
☑ **پاسخ**: مطابق شکل، میانه‌های BM و CN ساق‌های مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$ را نصف کرده‌اند. داریم :



$$\begin{cases} BN = CM \ (\text{نصف ساق}) \\ \hat{B} = \hat{C} \\ BC (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{BNC} \cong \overset{\Delta}{BMC}$$

در دو مثلث همنهشت BNC و BMC داریم $BM = CN$، یعنی میانه‌های نظیر ساق‌ها با هم برابرند.

▼ **مثال۳۶ : در مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$، نیمساز خارجی زاویه‌ی A و نیمساز داخلی زاویه‌ی B در نقطه‌ی D متقاطع‌اند. طول پاره خط AD برابر کدام جزء مثلث است؟** (سراسری تجربی- ۷٤)



۱) AC ۲) طول نیمساز داخلی زاویه‌ی B

۳) BC ٤) ارتفاع وارد بر قاعده

☑ **پاسخ**: ابتدا نشان می‌دهیم که نیمساز خارجی زاویه‌ی رأس A موازی قاعده BC است. چون مثلث ABC متساوی الساقین است پس فرض می‌کنیم $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$، در نتیجه :

$$(\overset{\Delta}{ABC} \text{ زاویه‌ی خارجی}) C\hat{A}X = \hat{B} + \hat{C} = 2\alpha \xrightarrow{AD \text{ نیمساز}} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \alpha$$

چون $\hat{C} = \hat{A}_1 = \alpha$ و AC خط مورب است، پس طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که $AD \parallel BC$.

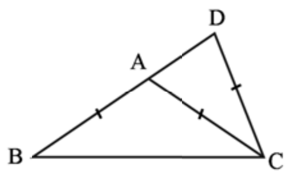
مطابق شکل، BD نیمساز $\hat{B}$ است، پس $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\alpha}{2}$؛ از طرفی $AD \parallel BC$ و خط BD مورب است، پس طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که $\hat{D} = \hat{B}_2 = \frac{\alpha}{2}$.

مثلث ABD متساوی الساقین است، چون $\hat{B}_1 = \hat{D} = \frac{\alpha}{2}$، پس طول ساق‌های AD و AB با هم برابر است. در نتیجه طول پاره خط AD با طول ساق‌های مثلث متساوی الساقین ABC برابر است،یعنی گزینه (۱) صحیح است.

▼ **مثال۳۷** : در مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$، ساق BA را از نقطه‌ی B به اندازه‌ی قاعده‌ی BC تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم.

اگر $CA = CD$ باشد زاویه‌ی A چند درجه است؟

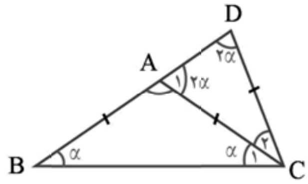
(سراسری ریاضی خارج از کشور-۹٤)



۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۵

۳) ۱۰۸ ٤) ۱۱۲

☑**پاسخ:** مطابق شکل در مثلث متساوی الساقین ABC فرض می‌کنیم $\hat{B} = \hat{C}_1 = \alpha$؛ داریم :



$$\overset{\Delta}{ABC}\ (\text{زاویه‌ی خارجی})\ \hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C}_1 = ۲\alpha \xrightarrow{CD = CA} \hat{D} = \hat{A}_1 = ۲\alpha$$

همچنین مثلث BCD (BC = BD) متساوی الساقین است، پس:

$$\hat{C}_۲ + \hat{C}_۱ = \hat{D} = ۲\alpha \xrightarrow{\hat{C}_۱ = \alpha} \hat{C}_۲ = \alpha$$

جمع زوایای داخلی مثلث ACD را می‌نویسیم :

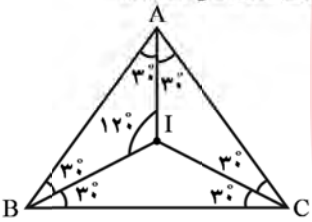
$$\hat{A}_۱ + \hat{C}_۲ + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + \alpha + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۸۰^\circ}{۵} = ۳۶^\circ$$

$$\Rightarrow \text{زاویه ی رأس A در } \overset{\Delta}{ABC} : \hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha = ۱۸۰^\circ - ۷۲^\circ = ۱۰۸^\circ$$

گزینه (۳) صحیح است.

▼**مثال۳۸ : یک مثلث متساوی الاضلاع به سه مثلث همنهشت تقسیم شده است. زاویه‌های هر مثلث همنهشت کدام است؟**

(سراسری تجربی خارج از کشور-۸۷)



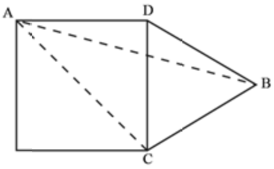
۱) ۶۰°، ۶۰° و ۶۰°
۲) ۳۰°، ۷۰° و ۸۰°
۳) ۳۰°، ۶۰° و ۹۰°
٤) ۳۰°، ۳۰° و ۱۲۰°

☑**پاسخ:** منظور سؤال شکل روبه‌روست، که در آن نیمسازهای $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نقطه‌ی I همدیگر را قطع کرده‌اند. هر یک از مثلث‌های به وجود آمده، متساوی الساقین با دو زاویه‌ی ۳۰° و یک زاویه‌ی منفرجه‌ی ۱۲۰° هستند.

گزینه (۴) صحیح است.

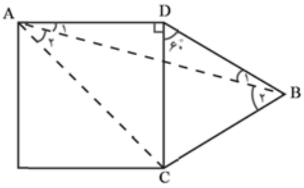
▼**مثال۳۹ : در شکل زیر، بر روی ضلع مربع مفروض، مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است.**

درمثلث ABC بزرگترین زاویه، چند برابر کوچکترین زاویه‌ی آن است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۸)



۱) ۳
۲) $\frac{۷}{۲}$
۳) ٤
٤) $\frac{۹}{۲}$

☑**پاسخ:** مثلث BCD متساوی الاضلاع است، یعنی تمام اضلاع آن با هم برابر و مساوی ضلع مربع است. داریم :



$$\overset{\Delta}{ADB} : AD = DB\ (\text{متساوی الساقین}) \xrightarrow{A\hat{D}B = ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

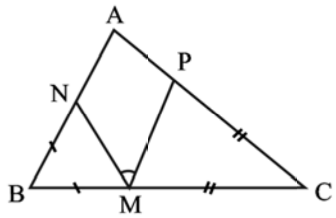
$$\overset{\Delta}{ADC} : D\hat{A}C = D\hat{C}A = \frac{۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ\ (\text{قائم الزاویه متساوی الساقین})$$

$$\begin{cases} \hat{B}_۲ = \hat{B} - \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ - ۱۵^\circ = ۴۵^\circ \\ \hat{A}_۲ = D\hat{A}C - \hat{A}_۱ = ۴۵^\circ - ۱۵^\circ = ۳۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\overset{\Delta}{ABC}} A\hat{C}B = ۱۸۰^\circ - \underbrace{\left(\hat{A}_۲ + \hat{B}_۲\right)}_{۷۵^\circ} = ۱۰۵^\circ$$

پس $A\hat{C}B = ۱۰۵^\circ$ بزرگترین و $\hat{A}_۲ = ۳۰^\circ$ کوچکترین زاویه‌ی مثلث ABC هستند و نسبت آنها برابر است با : $\frac{۱۰۵^\circ}{۳۰^\circ} = \frac{۷}{۲}$

گزینه (۲) صحیح است.

▼**مثال۴۰ : در مثلث ABC، مثلث‌های کناری متساوی الساقین‌اند؛ ثابت کنید زاویه‌ی $P\hat{M}N$ برابر است با** $۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$.

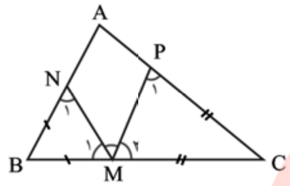


☑**پاسخ**:مطابق شکل داریم:

$$\overset{\Delta}{BMN}: \hat{M}_۱ = \hat{N}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{B}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} \quad \text{(متساوی الساقین)}$$

$$\overset{\Delta}{CMP}: \hat{M}_۲ = \hat{P}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲} \quad \text{(متساوی الساقین)}$$

نقطه‌ی M روی ضلع BC یک زاویه‌ی نیم صفحه پدید آورده است، پس :

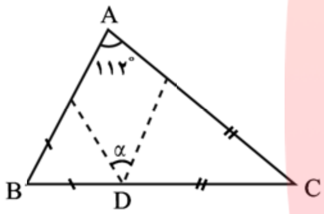


$$P\hat{M}N = ۱۸۰^\circ - (\hat{M}_۱ + \hat{M}_۲) = ۱۸۰^\circ - \left(۱۸۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} - \frac{\hat{C}}{۲}\right) = \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲}$$

اگر از رابطه‌ی $\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ$ کمک بگیریم، نتیجه می‌شود که: $P\hat{M}N = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$

▼**مثال۴۱: در شکل مقابل، $\hat{A}=۱۱۲^\circ$ و دو مثلث کناری متساوی الساقین‌اند.زاویه‌ی α چند درجه است؟**

(سراسری تجربی- ۸۵)



۱) ۳۲ ۲) ۳۴

۳) ۳۶ ۴) ۳۸

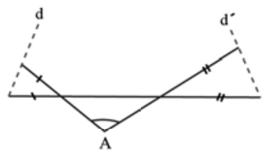
☑**پاسخ**: با توجه به مثال قبل نتیجه می‌شود که :

$$\alpha = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{۱۱۲^\circ}{۲} = ۹۰^\circ - ۵۶^\circ = ۳۴^\circ$$

گزینه (۲) صحیح است.

▼**مثال۴۲: در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی الساقین‌اند و زاویه‌ی $\hat{A}=۱۰۰^\circ$، دو خط d و ´d با زاویه‌ی چند درجه متقاطع‌اند؟**

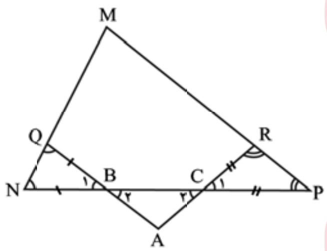
(سراسری ریاضی- ۸۸)



۱) ۳۰ ۲) ۴۰

۳) ۴۵ ۴) ۵۰

☑**پاسخ**:مطابق شکل، فرض می‌کنیم d و ´d در **M** متقاطع باشند. با توجه به نامگذاری‌های نقاط روی شکل داریم :



$$\overset{\Delta}{BQN}: \hat{N} = \hat{Q} \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲\hat{N} \quad \text{(متساوی الساقین)}$$

$$\overset{\Delta}{CRP}: \hat{P} = \hat{R} \Rightarrow \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲\hat{P} \quad \text{(متساوی الساقین)}$$

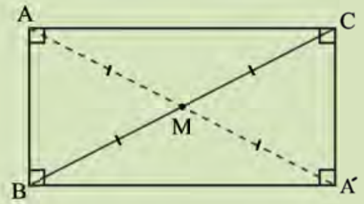
$$\overset{\Delta}{ABC}: \begin{cases} \hat{A} = ۱۰۰^\circ \\ \hat{B}_۲ = \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲\hat{N} \xrightarrow{\text{جمع زوایا}} ۱۰۰^\circ + ۱۸۰^\circ - ۲\hat{N} + ۱۸۰^\circ - ۲\hat{P} = ۱۸۰^\circ \\ \hat{C}_۲ = \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲\hat{P} \qquad \Rightarrow ۲(\hat{N} + \hat{P}) = ۲۸۰^\circ \Rightarrow \hat{N} + \hat{P} = ۱۴۰^\circ \end{cases}$$

در مثلث **MNP** زاویه‌ی **M** برابر است با :

$$\hat{M} = ۱۸۰^\circ - (\hat{N} + \hat{P}) = ۱۸۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۴۰^\circ$$

گزینه (۲) صحیح است.

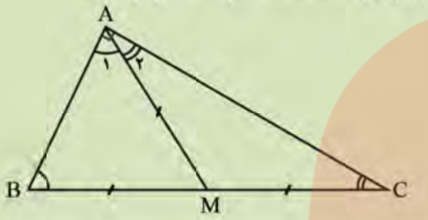
مثلث قائم الزاویه :



قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

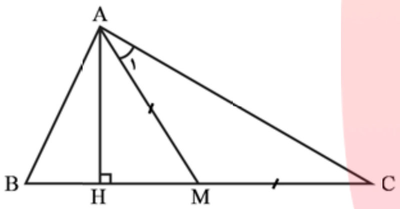
اثبات : مطابق شکل. با رسم یک قطر مستطیل، مستطیل به دو مثلث قائم الزاویه‌ی همنهشت تقسیم می‌شود.

از آنجا که قطرهای مستطیل با هم برابر بوده و همدیگر را نصف می‌کنند (به عنوان تمرین، این موضوع را ثابت کنید.)، نتیجه می‌شود که میانه‌ی AM، وتر BC را نصف کرده و با هر کدام از دو قسمت BM و MC برابر است.



نتیجه : مطابق شکل در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، با رسم میانه‌ی AM دو مثلث متساوی الساقین پدید می‌آید که در آنها $\hat{A}_1 = \hat{B}$ و $\hat{A}_2 = \hat{C}$ است؛ در نتیجه «زاویه‌های ایجاد شده بین میانه‌ی وارد بر وتر و اضلاع قائمه با زاویه‌های حاده‌ی نظیر ضلع دیگر برابر است.»

▼ **مثال ۴۳ : نشان دهید زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر در هر مثلث قائم الزاویه، برابر است با قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی حاده‌ی مثلث، یعنی : $H\hat{A}M = |\hat{B} - \hat{C}|$: (راس A قائم است)**



☑**پاسخ**:*مثلث AMC در رأس M متساوی الساقین است، پس $\hat{A}_1 = \hat{C}$ از طرفی در مثلث AMC داریم :*

پس :

$$H\hat{A}C = 90^\circ - \hat{C} \xrightarrow{\hat{B}+\hat{C}=90^\circ} H\hat{A}C = \hat{B}$$

$$H\hat{A}M = H\hat{A}C - \hat{A}_1 = \hat{B} - \hat{C}$$

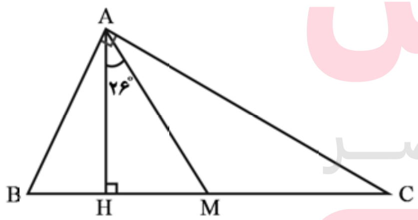
در حالت کلی، چون ممکن است $\hat{B} < \hat{C}$ باشد، عبارت به دست آمده را داخل قدر مطلق می‌گذاریم، یعنی $H\hat{A}M = |\hat{B} - \hat{C}|$.

▼ **مثال ۴۴ : در مثلث قائم الزاویه‌ای، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر برابر 26° است. کوچکترین زاویه‌ی مثلث چند درجه است؟**

(سراسری تجربی- ۸۱)

۱) ۲٤ ۲) ۲۸

۳) ۳۲ ٤) ۳٤



☑**پاسخ**:*با فرض $\hat{B} > \hat{C}$، طبق مثال قبل و شکل روبه‌رو داریم :*

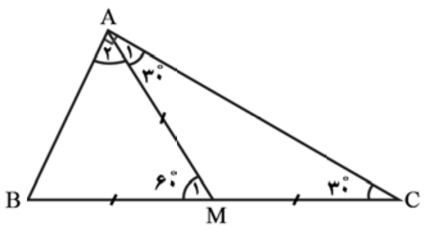
$$\begin{cases} H\hat{A}M = \hat{B} - \hat{C} = 26^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \end{cases}$$

گزینه (۳) صحیح است.

نکته: اگر در مثلثی، میانه‌ی وارد بر یکی از اضلاع، نصف طول آن ضلع باشد،آن مثلث حتماً قائم الزاویه است.

▼ **مثال ۴۵ : ثابت کنید در مثلث قائم الزاویه‌ای با زاویه‌ی حاده‌ی 30°، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 30° نصف وتر است.** (پرتکرار - ۳ بار تکرار)

☑**پاسخ**:*با رسم میانه‌ی AM، طبق شکل داریم :*



$$\overset{\Delta}{AMC} : \hat{A}_1 = \hat{C} = 30^\circ \ (\text{متساوی الساقین})$$

$(\overset{\Delta}{AMC}$ زاویه‌ی خارجی$): \widehat{M}_۱ = \widehat{A}_۱ + \widehat{C} = ۶۰^\circ$

مثلث ABM متساوی الساقین بوده و زاویه‌ی رأس آن برابر $۶۰^\circ = \widehat{M}_۱$ است، پس :

$\widehat{B} = \widehat{A}_۲ = ۶۰^\circ$

در نتیجه مثلث ABM متساوی الاضلاع است و طول ضلع AB (روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰°) برابر با طول میانه‌ی AM یعنی نصف طول وتر است.

از خم تا چند ضلعی

خم و انواع آن :

تا به حال در قسمت‌های قبل با مثلث و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شدیم. در واقع، مثلث ساده‌ترین چندضلعی در هندسه است. اما در این قسمت می‌خواهیم برای فهمیدن مفهوم «چندضلعی» شما را با مفاهیم ابتدایی‌تر از چندضلعی آشنا کنیم.

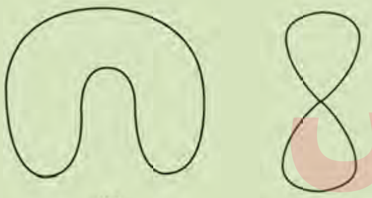
یکی از مفاهیم تعریف نشده‌ی هندسه‌ی اقلیدسی، «خم» است. لطفاً به تعاریف زیر دقت کنید :

الف) خم مسطح : خمی است که بتوان آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد. به عبارتی خم مسطح، یک مجموعه نقاط به هم پیوسته در صفحه است که می‌توان با یک بار حرکت قلم، آن را رسم کرد.

به عنوان مثال، شکل‌های روبه‌رو نمونه‌هایی از خم مسطح هستند :

ولی شکل روبه‌رو، خم مسطح نیست :

ب) خم ساده : به خم مسطحی که هیچ یک از نقاط خود را قطع نکند، مگر در حالتی که نقاط انتهایی به هم می‌رسند، یک خم ساده می‌گویند. به عنوان مثال، خم (۱) ساده است ولی خم (۲) ساده نیست.

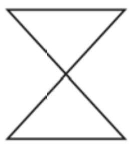


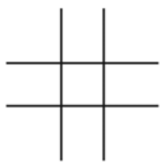
(۱) (۲)

ج) خم ساده‌ی بسته : اگر نقاط انتهایی خم ساده بر هم منطبق باشند، آن را خم ساده‌ی بسته می‌گویند. به عنوان مثال در شکل بالا، خم (۱) یک خم ساده‌ی بسته است.

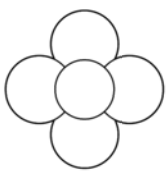
قضیه‌ی خم جردن : هر خم ساده‌ی بسته، صفحه را به سه زیر مجموعه‌ی جدا از هم «درون»، «بیرون» و «روی خم» تقسیم می‌کند.

▼ **مثال۴۶ : کدام یک از شکل‌های زیر، خم مسطح نیست؟**

۱) 

۲) 

۳) 

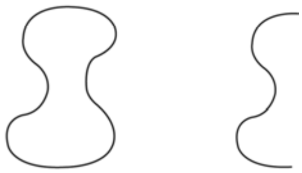
۴) 

☑**پاسخ**: *شکل (۳) را نمی‌توان با یک بار حرکت قلم (بدون برداشتن آن از روی کاغذ) رسم کرد!*

▼ **مثال۴۷ : با استفاده از چند پاره خط، خمی رسم کنید که : (پرتکرار – ۳ بار تکرار)**

الف) ساده و بسته باشد. **ب) ساده باشد ولی بسته نباشد.**

☑**پاسخ**: *خم‌های مورد نظر را به صورت روبه‌رو می‌توان رسم کرد :*

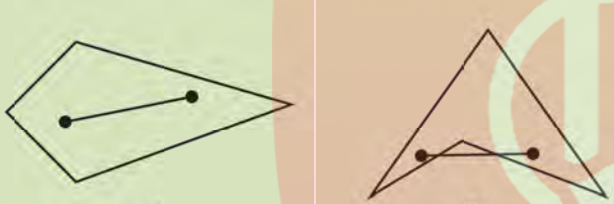


(ب) **(الف)**

د) ناحیه : با توجه به قضیه‌ی خم جردن، هر خم ساده‌ی بسته، صفحه را به مجموعه‌های مجزای درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند، که به اجتماع یک خم ساده‌ی بسته به همراه نقاط درون آن یک «ناحیه» می‌گوییم.

هـ) ناحیه‌ی محدب : اگر پاره خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه یک ناحیه را به هم وصل می‌کند، کاملاً درون آن ناحیه قرار گیرد، به آن ناحیه‌ی محدب می‌گوییم، در غیر این صورت آن را ناحیه‌ی مقعر می‌نامیم.

به عنوان مثال، ناحیه‌ی (۱) محدب است و ناحیه‌ی (۲) مقعر :

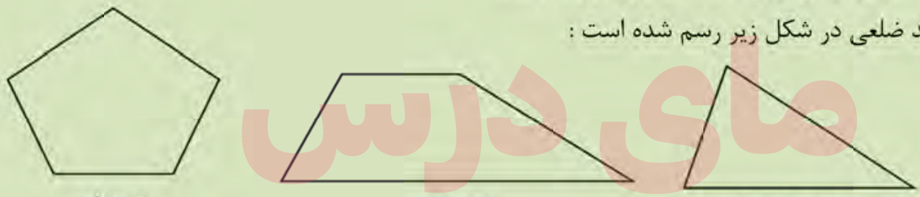


(۲) (۱)

اکنون که شرایط مهیا شده، چند ضلعی را تعریف می‌کنیم :

چندضلعی : یک خم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده، به طوری که نقاط انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آنها روی یک خط قرار نگرفته باشد.

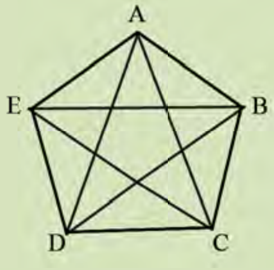
به عنوان مثال، چند نمونه چند ضلعی در شکل زیر رسم شده است :



سه ضلعی (مثلث) چهار ضلعی پنج ضلعی

تعریف : به نقاط تقاطع پاره‌خط‌ها، «رأس» و به هر پاره‌خط، «ضلع» گفته می‌شود.

قطر چند ضلعی : در یک چند ضلعی (با بیش از ۳ رأس)، به پاره‌خطی که دو رأس غیر مجاور را به هم وصل می‌کند «قطر» گفته می‌شود.



به عنوان مثال، یک پنج ضلعی دارای ۵ قطر است :

قطرها $\rightarrow AC, AD, BE, BD, CE$

تذکر : در نام‌گذاری رئوس یک چند ضلعی، سعی کنید (حتماً!) رئوس را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (یا خلاف آن) نام‌گذاری کنید. (همانند شکل بالا که در جهت عقربه‌های ساعت نام‌گذاری شده است.)

توجه : چند ضلعی‌ها هم به دلیل آن که یک خم ساده‌ی بسته هستند به دو دسته‌ی محدب و مقعر تقسیم می‌شوند. البته هرگاه چند ضلعی بدون نام محدب یا مقعر ذکر شد، منظور همان چند ضلعی محدب است.

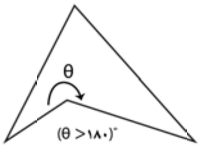
▼ مثال۴۸ : ناحیه‌ی محدود به یک چند ضلعی در کدام حالت ممکن است مجموعه‌ی محدب نباشد؟(سراسری ریاضی -۷۶)

۱) تمام نقاط پاره‌خطی که دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌کنند عضو آن مجموعه است.

۲) هر زاویه‌ی داخلی کمتر از نیم صفحه است.

۳) سایر رأس‌ها در یک طرف هر خطی قرار دارند که بر ضلع آن منطق است.

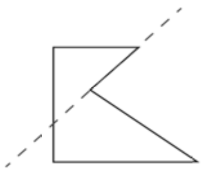
۴) یک قطر آن را به دو مجموعه‌ی محدب تقسیم می‌کند.



☑پاسخ: *گزینه‌ها را تک تک بررسی می‌کنیم.*

گزینه (۱) : دقیقاً تعریف ناحیه‌ی محدب آمده است، پس ممکن نیست که محدب نباشد.

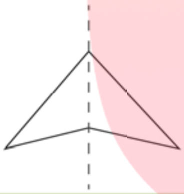
گزینه (۲) : این گزینه در واقع تعریف دیگری برای محدب بودن یک چند ضلعی است، یعنی اگر چند ضلعی دارای زاویه‌ی بیشتر از نیم صفحه باشد آنگاه حتماً مقعر است. درستی این مطلب را به وضوح در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید.



گزینه (۳) : این گزینه نیز حالت دیگری برای محدب بودن یک چند ضلعی است،

یعنی اگر رأس‌ها در دو طرف یکی از خطوطی که بر ضلع چند ضلعی منطبق است، قرار داشته باشد، آنگاه چند ضلعی حتماً مقعر است. درستی این مطلب

را در شکل روبه‌رو می‌بینید.

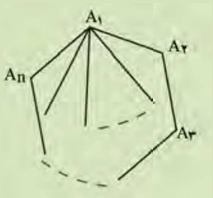


گزینه (۴) : شکل روبه‌رو در شرایط این گزینه صدق می‌کند ولی این چند ضلعی محدب نیست.

گزینه (۴) صحیح است.

قضیه : تعداد قطرهای یک nضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$.

اثبات : مطابق شکل، n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ را در نظر بگیرید. از رأس A_1 (و هر رأس دیگر آن)، $(n-1)$ پاره‌خط می‌توان به رئوس دیگر رسم کرد که دو تای آنها (A_1A_2 و A_1A_n) ضلع هستند، پس از هر رأس n ضلعی، $(n-3)$ قطر رسم می‌شود.



n رأس داریم که از هر کدام از آنها $(n-3)$ قطرمی‌گذرد، پس $n(n-3)$ قطر داریم ولی توجه داشته باشید که هر قطر را ۲ بار شمرده‌ایم، مثلاً قطر A_1A_3 هم برای رأس A_1شمرده شده و هم برای رأس A_3؛ پس در مجموع تعداد قطرها برابر خواهد شد با $\frac{n(n-3)}{2}$

نتیجه : از هر رأس n ضلعی، $(n-3)$ قطر می‌گذرد.

▼ مثال۴۹ : تعداد قطرهای یک n ضلعی دو برابر تعداد اضلاع آن است. n کدام است؟ (سراسری ریاضی -۷۵)

۱) ۶	۲) ۷	۳) ۸	۴) ۹

☑پاسخ *با توجه به فرض داریم :*

$$\frac{n(n-3)}{2}=2n \overset{n\neq 0}{\Longrightarrow} n-3=4 \Rightarrow n=7$$

گزینه (۲) صحیح است.

▼ **مثال۵۰ : اگر یک رأس جدید به یک n ضلعی اضافه کنیم، ۹ قطر جدید به قطرهای آن افزوده می‌شود. این n ضلعی چند قطر دارد؟**

☑**پاسخ**: تعداد قطرهای (n + ۱) ضلعی برابر است با :

$$\frac{(n+۱)\overbrace{(n+۱-۳)}^{n-۲}}{۲}=\frac{n^۲-n-۲}{۲}$$

پس طبق فرض داریم

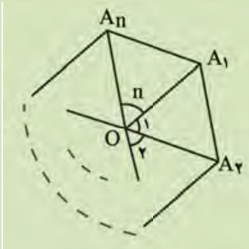
$$\frac{n^۲-n-۲}{۲}-\frac{\overbrace{n(n-۳)}^{n^۲-۳n}}{۲}=۹\Rightarrow n-۱=۹\Rightarrow n=۱۰$$

تعداد قطرهای یک ۱۰ ضلعی برابر است با :

$$\frac{۱۰\times(۱۰-۳)}{۲}=\frac{۱۰\times۷}{۲}=۳۵$$

قضیه : مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب برابر است با (n − ۲) °۱۸۰ .

اثبات : مطابق شکل، نقطه‌ی دلخواه O، درون n ضلعی $A_۱A_۲ \dots A_n$ را به تمام رأس‌های این n ضلعی وصل می‌کنیم. اگر تمام زوایای داخلی مثلث‌های به وجود آمده را با هم جمع کنیم، آنگاه :



$$\underbrace{\text{مجموع زوایای داخلی } n \text{ مثلث}}_{n\times۱۸۰^\circ}=\text{مجموع زوایای داخلی } n \text{ ضلعی}+\left(\underbrace{\hat{O}_۱+\hat{O}_۲+\dots+\hat{O}_n}_{۳۶۰^\circ}\right)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع زوایای داخلی n ضلعی}=۱۸۰^\circ n-۳۶۰^\circ=۱۸۰^\circ\ (n-۲)$$

▼ **مثال۵۱ : در کدام چندضلعی مجموع زوایای داخلی آن ٤ برابر مجموع زوایای داخلی یک ۵ ضلعی است. سپس تعداد قطرهای آن را حساب کنید.**

(پر تکرار – ۱۲ بار تکرار)

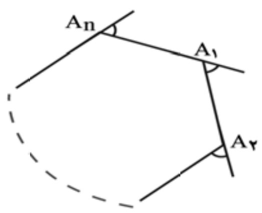
☑**پاسخ**: با توجه به فرض در این n ضلعی داریم :

$$۱۸۰^\circ\ (n-۲)=۴\ (۱۸۰^\circ\ (۵-۲))\Rightarrow n-۲=۴\times۳=۱۲\Rightarrow n=۱۴$$

در چهارده ضلعی، تعداد قطرها برابر است با :

$$\frac{۱۴\times\ (۱۴-۳)}{۲}=\frac{۱۴\times۱۱}{۲}=۷۷$$

▼ **مثال۵۲ : نشان دهید که مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر °۳۶۰ است.**



☑**پاسخ**: مطابق شکل، هر زاویه‌ی خارجی، مکمل زاویه‌ی داخلی متناظرش است، یعنی داریم :

$$\text{مجموع زوایای خارجی}=\hat{A}'_۱+\hat{A}'_۲+\dots+\hat{A}'_n=(۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱)+\dots+(۱۸۰^\circ-\hat{A}_n)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع زوایای خارجی}=۱۸۰^\circ n-(\underbrace{\hat{A}_۱+\dots+\hat{A}_n}_{۱۸۰^\circ(n-۲)})=۱۸۰^\circ n-(۱۸۰^\circ n-۳۶۰^\circ)=۳۶۰^\circ$$

▼ **مثال۵۳ : در یک n ضلعی، مجموع زوایای داخلی ۷ برابر مجموع زوایای خارجی است. تعداد قطرهای این n ضلعی را حساب کنید.**

(پر تکرار – ۲ بار تکرار)

☑**پاسخ**: از آنجا که مجموع زوایای خارجی این n ضلعی برابر °۳۶۰ است، پس طبق فرض داریم :

$$۱۸۰^\circ(n-۲)=۷\times۳۶۰^\circ\xrightarrow{\div۱۸۰^\circ}n-۲=۱۴\Rightarrow n=۱۶$$

تعداد قطرهای ۱۶ ضلعی برابر است با :

$$\frac{۱۶\,(۱۶-۳)}{۲}=\frac{۱۶\times ۱۳}{۲}=۱۰۴$$

نکته: در یک n ضلعی منتظم (که تمام اضلاعش با هم برابرند) :

اولاً) هر زاویه‌ی داخلی برابر است با $\frac{۱۸۰^\circ\,(n-۲)}{n}$.

ثانیاً) هر زاویه‌ی خارجی برابر است با $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$.

مثال۵٤ : هر زاویه‌ی یک ۱۸ ضلعی منتظم چند درجه است؟ (سراسری تجربی- ۷۵)

۱) ۱۵۰° ۲) ۱۵۵° ۳) ۱۶۰° ٤) ۱۶۵°

پاسخ: هر زاویه‌ی ۱۸ ضلعی منتظم برابر است با :

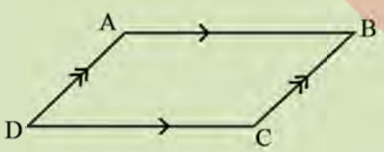
$$\frac{۱۸۰^\circ\,(۱۸-۲)}{۱۸}=\frac{۱۸۰^\circ\times ۱۶}{۱۸}=۱۶۰^\circ$$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

متوازی الاضلاع :

در میان چهارضلعی‌ها، متوازی الاضلاع دارای ویژگی‌های متعددی است که در حل بعضی از مسائل هندسی پر کاربرد هستند.
همانطور که از نام متوازِی الاضلاع پیداست، به چهار ضلعی‌ای که
اضلاع مقابلش موازی هستند، «متوازی الاضلاع» گفته می‌شود.

$$\begin{cases}AB\parallel CD\\AD\parallel BC\end{cases}$$



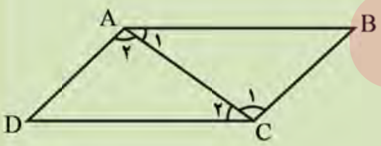
قضیه : در هر متوازی الاضلاع،

الف) اضلاع مقابل مساوی‌اند. ب) زاویه‌های مقابل مساوی‌اند.

ج) زاویه‌های مجاور، مکمل‌اند. د) قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

اثبات :

(الف) و (ب) : قطر AC از متوازی الاضلاع ABCD را رسم می‌کنیم، داریم :



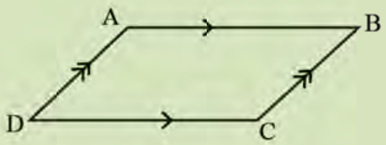
$$\begin{cases}AB\parallel CD,\ \text{مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۱=\hat{C}_۲\\[2ex] AD\parallel BC,\ \text{مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۲=\hat{C}_۱\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{C}_۲\\ \hat{C}_۱=\hat{A}_۲\\ AC\ (\text{ضلع مشترک})\end{cases}\xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{ADC}$$

در دو مثلث همنهشت ADC و ABC ، اولاً اضلاع متناظر با هم برابرند : AB=CD و AD=BC (الف)

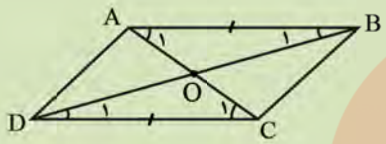
ثانیاً $\hat{B} = \hat{D}$ و همچنین از برابری‌های $\hat{A}_1 = \hat{C}_2$ و $\hat{A}_2 = \hat{C}_1$ نتیجه می‌شود که: $\hat{A} = \hat{C}$ (ب)

ج) چون AB||CD و خطوط BC و AD مورب هستند، پس از قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که :



$$\begin{cases}\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \\ \hat{A} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ\end{cases}$$

د) محل برخوردها قطرها را O می‌گیریم، با توجه به شکل داریم :



$$AB||CD, \begin{cases} \text{مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \text{مورب } BD \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABO} \cong \overset{\Delta}{CDO}$$

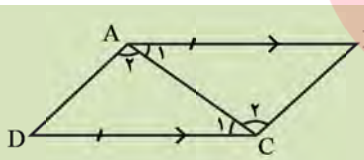
در دو مثلث همنهشت CDO و ABO داریم AO = OC و BO = OD، یعنی قطرها همدیگررا نصف می‌کنند.

تمرین : نشان دهید چهار ضلعی‌ای که هر یک از ویژگی‌های زیر را داشته باشد، قطعاً متوازی الاضلاع است.

الف) هر دو ضلع مقابل آن مساوی باشند. ب) هر دو زاویه‌ی مقابل آن مساوی باشند.

ج) هر دو زاویه‌ی مجاور آن مکمل باشند. د) قطرها منصف یکدیگر باشند.

قضیه : چهارضلعی‌ای که دارای دو ضلع مساوی و موازی باشد، متوازی الاضلاع است.



اثبات : مطابق شکل در چهارضلعی ABCD، دو ضلع AB و CD مساوی و موازی‌اند، داریم :

$$AB||CD \text{ , مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_1 = \hat{C}_1$$

$$\begin{cases} AB = CD \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AC \text{ (ضلع مشترک)} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ACD}$$

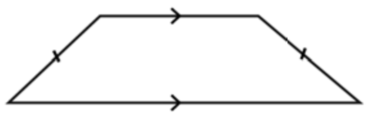
در دو مثلث همنهشت ABC و ACD داریم $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$ که طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب (با خط مورب AC) نتیجه می‌شود که AD||BC؛ پس در چهار ضلعی ABCD، اضلاع روبه‌رو با هم موازی‌اند، یعنی متوازی الاضلاع است.

▼ **مثال۵۵ : کدام یک از چهار ضلعی‌های زیر یک متوازی الاضلاع را مشخص نمی‌کند؟** (آزاد- ۶۸)

۱) چهار ضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد. ۲) چهار ضلعی که قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

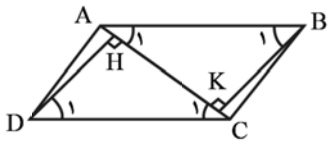
۳) چهار ضلعی که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد. ٤) چهار ضلعی که زوایای روبه‌رویش مساوی باشند.

☑ **پاسخ:** *گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ که خواص متوازی الاضلاع بودند. شکل زیر که دو ضلع مساوی و دو ضلع موازی دارد، متوازی الاضلاع نیست.*



گزینه (۱) صحیح است.

▼ **مثال۵۶ : ثابت کنید دو رأس B , D از متوازی الاضلاع ABCD از قطر AC به یک فاصله‌اند.** (پر تکرار – ۳ بار تکرار)



☑**پاسخ:** مطابق شکل ارتفاع‌های BK, DH را بر قطر AC رسم می‌کنیم.داریم:

$$AB||CD, \text{مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه‌ی خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_1 = \hat{C}_1$$

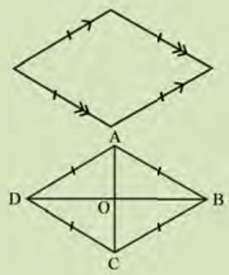
در دو مثلث قائم الزاویه‌ی ABK, DHC داریم ؛

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \text{ و } \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \xrightarrow{\text{جمع زوایا}} \hat{D}_1 = \hat{B}_1$$

$$\begin{cases} \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 = \hat{A}_1 \\ CD = AB \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{DHC} \cong \overset{\Delta}{ABK}$$

در دو مثلث همنهشت DHC و ABK داریم DH = BK.

چهار ضلعی‌های خاص :



در این بخش به معرفی لوزی، مستطیل، مربع و ذوزنقه می‌پردازیم.

لوزی : متوازی الاضلاعی است که تمام اضلاعش با هم برابرند.

توجه : (۱) به طور کلی، لوزی به چهار ضلعی‌ای گفته می‌شود که تمام اضلاعش با هم مساوی باشد.

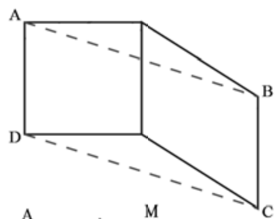
(۲) از آنجا که لوزی، متوازی الاضلاع است، پس تمام خواص متوازی الاضلاع در مورد آن برقرار است.

قضیه : در هر لوزی (اولاً) قطرها بر هم عمودند، (ثانیاً) قطرها نیمساز زاویه‌ها هستند.

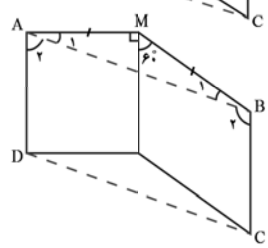
اثبات : الف) چون AB = AD، پس A از دو سر پاره خط BD به یک فاصله است، یعنی A روی عمود منصف BD قرار دارد و به طریق مشابه نیز، C روی عمود منصف BD قرار دارد، یعنی AC همان عمود منصف قطر BD است، پس قطرها بر هم عمودند. (و به طورکلی عمود منصف یکدیگر هستند.)

ب) با توجه به قسمت قبل، در مثلث متساوی الساقین ADB، AO هم میانه، هم ارتفاع و هم نیمساز است، یعنی قطر AC نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ و قطر BD نیمساز $\hat{B}$ و $\hat{D}$ است.

▼ **مثال۵۷ : در شکل زیر، یک مربع و یک لوزی با زاویه‌ی ۶۰ درجه در یک ضلع مشترکند. بزرگترین زاویه‌ی متوازی الاضلاع ABCD چند درجه است؟** (سراسری تجربی - ۸۸)(اشتباهات متداول)



۱) ۱۰۰
۲) ۱۰۵
۳) ۱۲۰
۴) ۱۳۵



☑**پاسخ:** با توجه به فرض و شکل روبه‌رو، طول اضلاع لوزی با مربع برابر است و داریم ؛

$$\overset{\Delta}{AMB} : A\hat{M}B = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ \quad (\text{متساوی الساقین})$$

$$\Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{B}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

پس در متوازی الاضلاع **ABCD** *داریم:*

$$\begin{cases} \widehat{A}_۲ = ۹۰^\circ - \widehat{A}_۱ = ۷۵^\circ \\ \widehat{B}_۲ = ۱۲۰^\circ - \widehat{B}_۱ = ۱۰۵^\circ \end{cases}$$

گزینه (۲) صحیح است.

توجه: بعضی از دانش‌آموزان به اشتباه گزینه‌ی (۳) را انتخاب می‌کنند، زیرا زاویه‌ی منفرجه‌ی متوازی الاضلاع را برابر زاویه‌ی منفرجه لوزی یعنی ۱۲۰° می‌گیرند. مطابق شکل واضح است که زاویه‌ی بزرگتر در متوازی الاضلاع، کوچکتر از زاویه‌ی بزرگتر لوزی (۱۲۰°) می‌باشد.

تمرین: نشان دهید در متوازی الاضلاعی که هر کدام از شرایط زیر برایش برقرار باشد، لوزی است.

الف) قطرها بر هم عمود باشند.　　ب) قطرها نیمساز زاویه‌ها باشند.

▼مثال ۵۸: کدام یک از تعریف‌های زیر، تعریف لوزی نیست؟ (سراسری ریاضی- ۶۲)

۱) متوازی الاضلاعی که اضلاعش با هم مساوی‌اند.　　۲) متوازی الاضلاعی که اقطارش بر هم عمودند.

۳) متوازی الاضلاعی که اقطارش منصف یکدیگرند.　　٤) متوازی الاضلاعی که قطرهایش نیمساز زوایا باشند.

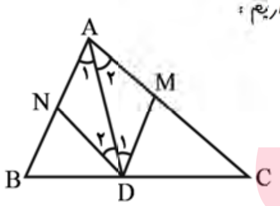
پاسخ: *با توجه به مطالب پیشین، تنها گزینه‌ی (۳) تعریف لوزی نیست. در واقع در گزینه‌ی (۳) تعریف متوازی الاضلاع بیان شده است.*

▼مثال ۵۹: در مثلث ABC، از نقطه‌ی D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه‌ی A با ضلع BC، خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن را در M و N قطع کنند، MN و AD نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (سراسری تجربی- ۷۸)

۱) فقط عمود بر هم　　۲) فقط منصف هم

۳) زاویه‌ی بین آنها مکمل $\widehat{A}$　　٤) عمود منصف هم

پاسخ: *ابتدا دقت کنید که نیمساز AD زاویه‌ی A را به دو زاویه‌ی برابر $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$ تقسیم می‌کند. مطابق شکل داریم:*



$$\begin{cases} DM || AB, \text{ مورب } AD \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \widehat{D}_۱ = \widehat{A}_۱ \\ DN || AC, \text{ مورب } AD \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \widehat{D}_۲ = \widehat{A}_۲ \end{cases} \Rightarrow \text{AMDN متوازی الاضلاع است}$$

پس در متوازی الاضلاع AMDN، قطر AD نیمساز زوایای $\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ است و این موضوع فقط موقعی می‌تواند برقرار باشد که AMDN لوزی باشد که در آن صورت قطرهایش یعنی MN و AD هم منصف و هم بر هم عمودند.

گزینه (۴) صحیح است.

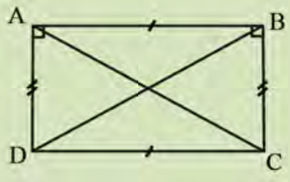
مستطیل: متوازی الاضلاعی است که یک زاویه‌ی قائمه دارد.

توجه: (۱) به طور کلی، مستطیل به چهارضلعی‌ای گفته می‌شود که چهار زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

(۲) از آنجا که مستطیل، متوازی الاضلاع است، پس تمام خواص متوازی الاضلاع در مورد آن برقرار است.

قضیه: در هر مستطیل، قطرها با هم برابرند.

اثبات : دو مثلث قائم الزاویه‌ی ABD و ABC همنهشت‌اند، زیرا :



$$\begin{cases} AB(\text{ضلع مشترک}) \\ \hat{A}=\hat{B}=۹۰^\circ \\ AD=BC \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ABC}$$

در دو مثلث همنهشت ABD و ABC داریم AC = BD، یعنی قطرهای مستطیل با هم برابرند.

تمرین : نشان دهید که متوازی الاضلاع با دو قطر برابر، مستطیل است.

مربع : مربع را هم به عنوان حالت خاص مستطیل می‌شود بیان کرد و هم به عنوان حالت خاص لوزی.

(**مربع به عنوان حالت خاص مستطیل**) مستطیلی است که دو ضلع مجاورش با هم برابر است.

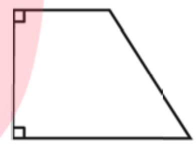
(**مربع به عنوان حالت خاص لوزی**) لوزی‌ای است که یک زاویه قائمه دارد.

نتیجه : مربع هم مستطیل است و هم لوزی (و به طور کلی حالت خاصی از متوازی الاضلاع)، پس تمام خواص آنها را دارد.

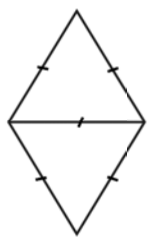
▼ **مثال۶۰ : کدام مورد، یک مربع را مشخص می‌کند؟** (آزاد -۷۵)

۱) لوزی که یک قطرش با ضلع آن برابر باشد.
۲) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشد.
۳) متوازی الاضلاعی که دو قطرش مساوی باشند.
٤) ذوزنقه‌ای که دو زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

☑ **پاسخ**: *برای گزینه‌های ۱، ۳ و ۴، می‌توان شکل‌های زیر را رسم کرد که هیچ کدام مربع نیست.*

گزینه ۴:


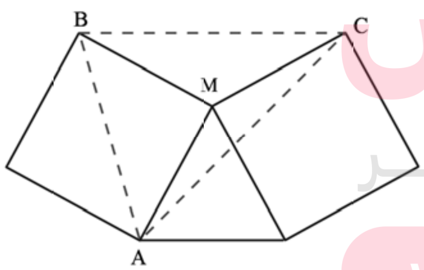
گزینه ۳:


گزینه ۱:


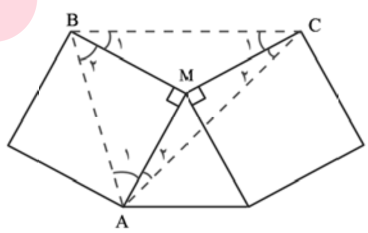
در گزینه (۲)، مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود است، منظور همان مستطیلی است که لوزی نیز باشد، یعنی مربع است.

▼ **مثال۶۱ : در شکل زیر روی اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع، دو مربع بنا کرده‌ایم. بزرگترین زاویه‌ی مثلث ABC چند برابر کوچکترین زاویه‌ی آن است؟**

۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۲}$



☑ **پاسخ**: *با توجه به فرض و شکل روبه‌رو، اضلاع مربع و مثلث با هم برابر هستند، پس :*



$$B\hat{M}C = ۳۶۰^\circ - (۹۰^\circ + ۶۰^\circ + ۹۰^\circ) = ۱۲۰^\circ$$

$$(\text{متساوی الساقین})\ \overset{\Delta}{BMC} : \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

$$(\text{قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین})\ \overset{\Delta}{BMA} : \hat{B}_۲ = \hat{A}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ$$

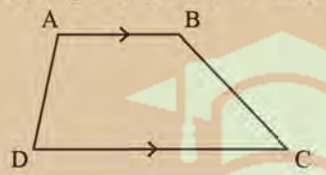
$\overset{\Delta}{AMC}: A\widehat{M}C = ۶۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲ = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$ (قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین)

پس زوایای مثلث ABC عبارتند از :

$$\begin{cases} \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۳۰^\circ + ۴۵^\circ = ۷۵^\circ \leftarrow \text{بیشترین} \\ \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۳۰^\circ + ۱۵^\circ = ۴۵^\circ \leftarrow \text{کمترین} \\ \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۴۵^\circ + ۱۵^\circ = ۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{۷۵^\circ}{۴۵^\circ} = \frac{۵}{۳}$$

گزینه (۱) صحیح است.

ذوزنقه : به چهارضلعی که **فقط** دو ضلع موازی دارد، ذوزنقه می‌گویند. به هر یک از دو ضلع موازی آن، «قاعده» و به دو ضلع غیر موازی آن، «ساق» گفته می‌شود.

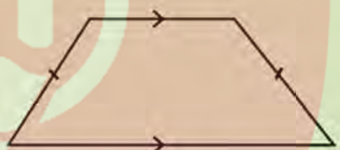


$$\begin{cases} \text{ساق ها} \rightarrow AD, BC \\ \text{قاعده ها} \rightarrow AB, CD \end{cases}$$

ذوزنقه‌ی متساوی الساقین : ذوزنقه‌ای است که دو ساق برابر است.

ذوزنقه‌ی قائم الزاویه : ذوزنقه‌ای است که یکی از ساق‌هایش بر دو قاعده‌ی آن عمود است.

ذوزنقه ی قائم الزاویه



ذوزنقه ی متساوی الساقین

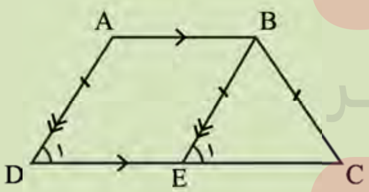
قضیه : در هر ذوزنقه‌ی متساوی الساقین،

(اولاً) دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده با هم برابرند،

(ثانیاً) قطرها با هم برابرند،

(ثالثاً) محل برخورد قطرها، رأس دو مثلث متساوی الساقین است.

اثبات : فقط قسمت اول را ثابت می‌کنیم و اثبات دو قسمت دیگر را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.



مطابق شکل، از B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده‌ی CD را در E قطع کند.

چهارضلعی ABED متوازی الاضلاع است، در نتیجه $\hat{E}_۱ = \hat{D}_۱$ و BE = AD.

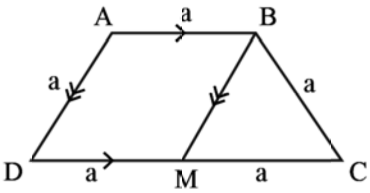
از طرفی AD = BC، پس BE = BC و در نتیجه مثلث BEC در رأس B متساوی الساقین است و داریم $\hat{C} = \hat{E}_۱ = \hat{D}_۱$.

به طریق مشابه ثابت می‌شود که $\hat{A} = \hat{B}$.

مثال۶۲ : در یک ذوزنقه‌ی متساوی الساقین، قاعده‌ی کوچک با هر ساق برابر و قاعده‌ی بزرگ دو برابر هر یک از آن‌هاست. اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی این ذوزنقه چند درجه است؟ (سراسری ریاضی- ۷٤)

۱) ۳۰ ۲) ٤۵

۳) ۶۰ ٤) ۷۵



☑**پاسخ:** *مطابق شکل، از رأس B خطی موازی ساق AD رسم تا متوازی الاضلاع ABMD پدید آید. با توجه به فرض، طول ساق‌ها و قاعده‌ی کوچک را برابر a و طول قاعده‌ی بزرگ را برابر*

$2a$ در نظر می‌گیریم.

در متوازی الاضلاع ABMD داریم $BM = AD = a$ و $DM=AB=a$ و در نتیجه $MC = DC - DM = a$.

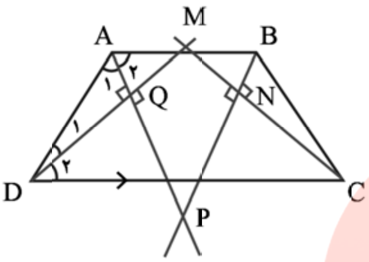
پس مثلث BMC متساوی الاضلاع است و در نتیجه $\hat{C} = 60^\circ$ ، یعنی زوایای حاده‌ی این ذوزنقه برابر 60° و زوایای منفرجه‌ی آن برابر 120° است.

گزینه (۳) صحیح است.

▼ **مثال۶۳ : در یک ذوزنقه‌ی متساوی الساقین، از برخورد نیمسازهای داخلی، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟**(سراسری ریاضی- ۸۸)

۱) مستطیل　　۲) چهار ضلعی با زوایای مکمل روبه‌رو

۳) متوازی الاضلاع　　٤) لوزی



پاسخ: مطابق شکل، چهارضلعی حاصل را MNPQ می‌نامیم. نیمسازهای دو زاویه‌ی مکمل $\hat{A}$ و $\hat{D}$ در نقطه‌ی Q متقاطع‌اند. پس :

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}, \hat{D}_1 = \frac{\hat{D}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \frac{\hat{A}+\hat{D}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

پس $\hat{Q} = 90^\circ$ ، به طریق مشابه نیز $\hat{N} = 90^\circ$ خواهد شد.

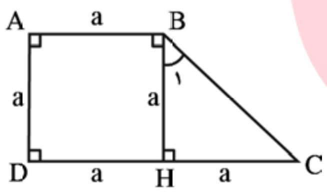
لذا در چهارضلعی MNPQ زوایای روبه‌روی $\hat{Q}$ و $\hat{N}$ مکمل هم هستند

و $\hat{P} + \hat{M} = 360 - (\hat{N} + \hat{Q}) = 180$ ، بنابراین $\hat{P}$، $\hat{M}$ نیز مکمل هستند.

گزینه (۲) صحیح است.

▼ **مثال٦٤ : در یک ذوزنقه‌ی قائم الزاویه، قاعده‌ی کوچکتر با ساق قائم برابر و هر دوی آنها نصف قاعده‌ی بزرگتر هستند. اندازه‌ی بزرگترین زاویه‌ی این ذوزنقه چند درجه است؟**

۱) ۱۰۵　　۲) ۱۲۰　　۳) ۱۳۵　　٤) ۱۵۰



پاسخ: طبق فرض و شکل روبه‌رو $AB = AD = a$ و $CD = 2a$ است.

از رأس B خطی عمود بر قاعده‌ی CD (در واقع موازی با ساق AD) رسم می‌کنیم.

چهارضلعی ABHD مربع بوده و تمامی اضلاع آن برابر a است. مثلث BHC از نوع قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین است و در نتیجه :

$$\hat{C} = \hat{B}_1 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

پس زوایای ذوزنقه عبارتند از : 90°، 90°، 45° و 135°.

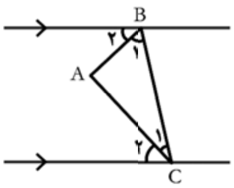
گزینه (۳) صحیح است.

آزمون

۱- **زاویه‌های A و B مکملند، اگر زاویه‌ی A دو برابر زاویه‌ی B باشد، حاصل $2\hat{A} - 3\hat{B}$ چقدر است؟** (آزاد- ۷۸)

۱) 90°　　۲) 30°　　۳) 120°　　۴) 60°

۲- **در شکل روبه‌رو، اگر $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$، آنگاه اندازه‌ی زاویه‌ی A کدام است؟**



۱) 60°

۲) 75°

۲) ۷۵°

۳) ۹۰°

۴) ۱۰۵°

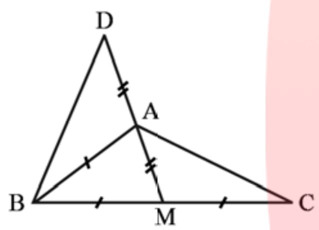
۳- در مثلث ABC، زاویه‌های خارجی B و C به ترتیب ۱۲۰° و α° و زاویه‌ی بین نیمسازهای این دو زاویه‌ی خارجی ۴۵° است، α چقدر است ؟ (آزاد – ۶۶)

۱) ۱۵۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۹۰° ۴) ۷۵°

۴- اگر $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زاویه‌های یک مثلث به ترتیب با اعداد ۱، ۲ و ۳ متناسب باشند و نیم‌سازهای داخلی در نقطه‌ی D متقاطع باشند، زاویه‌ی $A\hat{D}C$ کدام است؟ (آزاد – ۷۶)

۱) ۱۴۵° ۲) ۱۲۰° ۳) ۹۵° ۴) ۱۴۰°

۵ – در شکل مقابل $\hat{D}+\hat{C}=۶۱^\circ$، اندازه‌ی زاویه‌ی ABC چند درجه است؟ (سراسری تجربی – ۸۹)

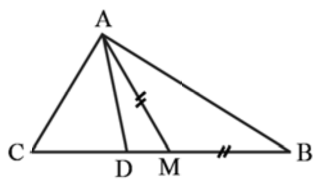


۱) ۳۹
۲) ۵۶
۳) ۵۸
۴) ۶۱

۶- در صفحه‌ی یک مثلث، چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آنها به یک فاصله باشند؟ (سراسری تجربی – ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷- در شکل زیر، AD نیمساز زاویه‌ی A و AM=MB است. اگر $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $D\hat{A}M=۲۰^\circ$، زاویه‌ی $\hat{C}$ چقدر است؟ (آزاد – ۸۲)

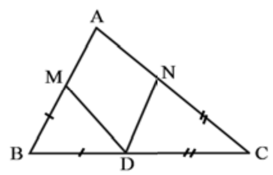


۱) ۳۰°
۲) ۴۰°
۳) ۵۰°
۴) ۲۰°

۸- در مثلث ABC داریم AB=AC و $\hat{A}=۸۰^\circ$ ، عمود منصف‌های دو ساق مثلث، قاعده‌ی BC را در M و N قطع می‌کنند. کوچکترین زاویه‌ی مثلث AMN چند درجه است؟ (سراسری تجربی – ۹۲)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۹- در شکل مقابل $\hat{A}=۵۸^\circ$، BM=BD و CN=CD ، زاویه‌ی MDN چند درجه است؟ (سراسری ریاضی – ۹۱)



۱) ۵۸
۲) ۵۹
۳) ۶۱
۴) ۶۲

۱۰ – کدام گزینه صحیح است؟ (آزاد – ۷۱)

۱) مربع، لوزی است که اقطارش مساوی است.

۲) هر چهارضلعی که اقطارش برهم عمود باشند، مربع است.

۳) هر متوازی الاضلاع که اقطارش بر هم عمود باشند، مربع است.

۴) هر ذوزنقه که یک زاویه قائمه داشته باشد، مربع است.

پاسخ‌نامه

۱- گزینه ۴ صحیح است.

طبق فرض، $\hat{A}$ و $\hat{B}$ مکملند ، پس : $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ$ (۱)

همچنین طبق فرض سؤال: $\hat{A}=2\hat{B}$ (۲)

$$(1),(2)\Rightarrow \begin{cases}\hat{A}+\hat{B}=180^\circ\\ \hat{A}=2\hat{B}\end{cases}\longrightarrow \begin{cases}\hat{B}=60^\circ\\ \hat{A}=120^\circ\end{cases}$$

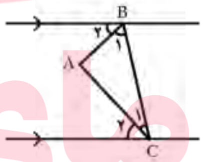
$$\Rightarrow 2\hat{A}-3\hat{B}=240^\circ-180^\circ=60^\circ$$

۲- گزینه ۳ صحیح است.

براساس قضیه خطوط موازی و مورب داریم:

$$\hat{B}_1+\hat{B}_2+\hat{C}_1+\hat{C}_2=180^\circ$$

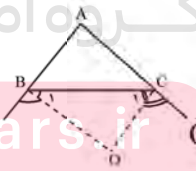
چون $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$، پس داریم:



$$2\hat{B}_1+2\hat{C}_1=180\Rightarrow \hat{B}_1+\hat{C}_1=90\Rightarrow \hat{A}=90^\circ$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به شکل و متن درسنامه داریم:



$$\hat{O}=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$$

طبق فرض : $\hat{O}=45^\circ=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}\Rightarrow\frac{\hat{A}}{2}=45^\circ\Rightarrow\hat{A}=90^\circ$

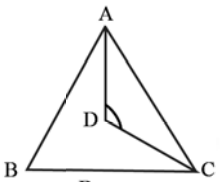
$$\begin{cases}\hat{B}\ \text{زاویه خارجی}=120^\circ\Rightarrow 180^\circ-\hat{B}=120^\circ\Rightarrow\hat{B}=60^\circ\\ \hat{C}\ \text{زاویه خارجی}=\alpha\Rightarrow 180^\circ-\hat{C}=\alpha\Rightarrow\hat{C}=180^\circ-\alpha\end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow 90^\circ+60^\circ+(180^\circ-\alpha)=180^\circ\Rightarrow\alpha=150^\circ$$

۴ – گزینه ۲ صحیح است.

طبق فرض زاویه‌های مثلث را به صورت $\hat{A}$ ، $\hat{B}=2\hat{A}$ و $\hat{C}=3\hat{A}$ در نظر می‌گیریم ، پس :

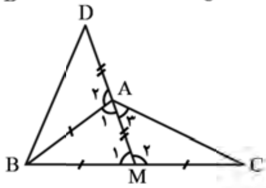
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow 6\hat{A}=180^\circ\Rightarrow\hat{A}=30^\circ,\hat{B}=60^\circ,\hat{C}=90^\circ$$



با توجه به شکل و متن درسنامه داریم:

$$A\hat{D}C=90^\circ+\frac{\hat{B}}{2}=90+\frac{60^\circ}{2}=120^\circ$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.



با توجه به شکل داریم:

$$AB=BM\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{M}_1\xrightarrow{\text{مکمل‌ها}}\hat{A}_2=\hat{M}_2$$

دو مثلث **ABD** و **AMC** به حالت (ض‌زض) با هم همنهشت هستند و در نتیجه $\hat{A}_3=\hat{D}$.

طبق فرض: $\hat{D}+\hat{C}=61^\circ\Rightarrow\hat{A}_3+\hat{C}=61^\circ$

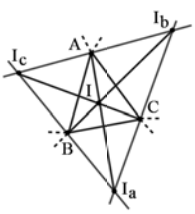
زاویه‌خارجی **AMC**: $\hat{M}_1=\hat{A}_3+\hat{C}=61^\circ\Rightarrow\hat{A}_1=61^\circ$

در مثلث **ABM** داریم:

$$\hat{A}_1+\hat{M}_1+A\hat{B}C=180^\circ\Rightarrow A\hat{B}C=180^\circ-2\times61^\circ=58^\circ$$

۶- گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به تعریف نیمساز یک زاویه ، ۴ نقطه در صفحه‌ی مثلث **ABC** وجود دارد که از اضلاع آن به یک فاصله است.



۱) نقطه‌ی **I**: بر خورد نیمسازهای داخلی $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$

۲) نقطه‌ی I_a : نیمسازهای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و داخلی $\hat{A}$

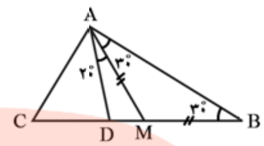
۳) نقطه‌ی I_b: نیمسازهای خارجی $\hat{A}$ و $\hat{C}$ و داخلی $\hat{B}$

۴) نقطه‌ی **I** : نیمسازهای خارجی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و داخلی $\hat{C}$

۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} AM = MB \Rightarrow M\hat{A}B = \hat{B} = ۳۰^\circ \\ \text{طبق فرض}: D\hat{A}M = ۲۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D\hat{A}B = D\hat{A}M + M\hat{A}B = ۲۰^\circ + ۳۰^\circ = ۵۰^\circ$$



چون AD نیمساز $\hat{A}$ است، پس $\hat{A} = ۱۰۰^\circ$ و داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۰۰^\circ + ۳۰^\circ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۵۰^\circ$$

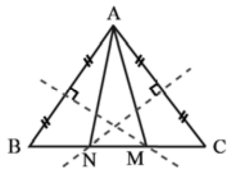
۸- گزینه ۲ صحیح است.

$$\hat{A} = ۸۰^\circ \;,\; AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$$

از آنجا که هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است، پس :

$$\begin{cases} MA = MB \Rightarrow A\hat{M}B = ۱۸۰^\circ - ۲(۵۰^\circ) = ۸۰^\circ \\ NA = NC \Rightarrow A\hat{N}C = ۱۸۰^\circ - ۲(۵۰^\circ) = ۸۰^\circ \end{cases}$$

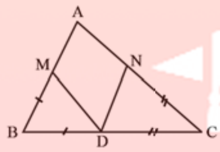
$$\xrightarrow{\overset{\Delta}{AMN}} M\hat{A}N = ۱۸۰^\circ - ۲(۸۰^\circ) = ۲۰^\circ$$



۹- گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به متن درسنامه داریم:

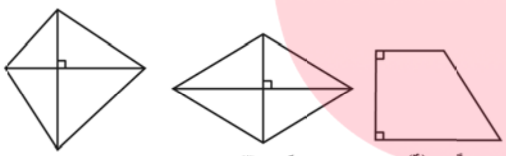
$$M\hat{D}N = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$



$$\Rightarrow M\hat{D}N = ۹۰^\circ - \frac{۵۸^\circ}{۲} = ۹۰^\circ - ۲۹^\circ = ۶۱^\circ$$

۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

شکل‌های زیر نشان می‌دهند که گزینه‌های ۲ ، ۳ و ۴ نادرست هستند.



گزینه (۲) گزینه (۳) گزینه (۴)