درسنامه آمارو احتمال یازدهم ریاضی

فصل اول آشنایی با مبانی ریاضیات(آزمون ۶ بهمن)

گزاره

گزاره جمله ای خبری است که در حال حاضر یا آینده، به طور ثابت دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ)می باشد .درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می گوییم.

نکته۱:ارزش گزاره درست را با حرف (د) یا (T) و ارزش گزاره نادرست را با حرف (ن) یا (F) نمایش می دهیم.

نکته۲: گزاره نمی تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است.

نکته۳: جمله های پرسشی، امری و عاطفی، گزاره محسوب نمی شوند، زیرا خبری را بیان نمی کنند.

مثال :از بین جمله های زیر، گزاره ها را مشخص کنید و ارزش آن ها را در صورت امکان تعیین کنید.

الف)تهران در جنوب ایران است.

ب)ای کاش همیشه بهار بود.

ج)تیم ملی سوریه به جام جهانی نمی رود.

پاسخ)

الف-یک گزاره نادرست است.

ب-گزاره نیست چون خبری را بیان نمی کند.

ج-یک گزاره است، ولی ممکن است درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد

علیرضا مصطفوی-دانشجوی مهندسی مکانیک دانشگاه تهران

جدول ارزش گزاره ها

گفتیم که هر گزاره یا درست است یا نادرست. بنابراین هر گزاره مانند P فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را، طبق جدول زیر می گیرد.

P
د
ن

ارزش های دو گزارهٔ p و q، طبق جدول روبه رو دارای ۴ حالت است.

p	q
د	ن
د	د
ن	د
ن	ن

نکته: ارزش های n گزاره، ۲^n حالت دارد.

گزاره نما

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود،گزاره نما نامیده می شود .گزاره نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می نامیم.

به طور مثال جمله«$xy = ۱۲$» یک گزاره نما است زیرا ارزش آن قابل تعیین نیست و یا با جای گذاری مقادیر مختلف به جای x و y این جمله به یک گزاره (درست یا نادرست) تبدیل می شود.

دامنهٔ متغیر گزاره نما

در هر گزاره نما به مجموعهٔ مقادیری که می توان آن ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این که گزاره نما تبدیل به گزاره شود، دامنهٔ متغیر گزاره نما می گویند و آن را با حرف D نمایش می دهند.

مجموعه جواب گزاره نما

در هر گزاره نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن ها، گزاره نما تبدیل به گزارهٔ با ارزش درست شود، مجموعهٔ جواب گزارهٔ نما می گویند و آن را با حرف S نمایش می دهند و همواره داریم $S \subseteq D$.

ترکیب گزاره ها

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط های گزاره ای (ادات ربط) گزاره های مرکب به دست می آیند. ارزش گزاره های مرکب فقط به ارزش گزاره های سادهٔ سازندهٔ آن ها و ادات ربط بین آن ها بستگی دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره P به صورت $\sim P$ نوشته می شود و آن را «چنین نیست که P» می خوانیم.

نکته۱: به علامت $\sim$ ناقض گفته می شود و اگر ارزش گزاره p درست باشد، در این صورت ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و برعکس.

نکته۲: نقیض نقیض یک گزاره با خود گزاره هم ارز است و اصطلاحا می گوییم که دو گزارهp و $\sim(\sim p)$ هم ارز منطقی هستند و آن را به صورت $p \equiv q$ نشان می دهیم و می خوانیم:p هم ارز است با q .

ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه دو گزاره را با حرف«یا» ترکیب کنیم، گزارهٔ مرکب تشکیل شده را ترکیب فصلی دو گزاره می نامیم.به طور مثال جمله«امروز باران می آید یا نمی آید» یک ترکیب فصلی است. در این جا به رابط منطقی $\vee$ فاصل گفته می شود.

نکته۱: هر گاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب«p یا q» را به صورت«$p \vee q$» می نویسند.

نکته۲: جدول ارزش ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q به صورت زیر است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نکته۳: ترکیب فصلی دو گزاره تنها در حالتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه دو گزاره را با حرف «و» ترکیب کنیم، گزارهٔ مرکب تشکیل شده را ترکیب عطفی دو گزاره می نامیم. در این جا به رابط منطقی« $\wedge$ »عاطف گفته می شود.

جدول ارزش ترکیب عطفی دو گزاره p و q به صورت زیر است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	**د**
د	ن	**ن**
ن	د	**ن**
ن	ن	**ن**

نکته: ترکیب عطفی دو گزاره تنها در حالتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

قانون دمرگان

گزاره های $\sim(p \vee q)$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ هم ارز منطقی هستند.

نکته:گزاره های $\sim(p \wedge q)$ و $(\sim p \vee \sim q)$ هم ارز منطقی هستند.

قوانین گزاره ها

قوانین جابه جایی	$\boldsymbol{p \vee q \equiv q \vee p}$ $\boldsymbol{p \wedge q \equiv q \wedge p}$
قوانین شرکت پذیری	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
قوانین توزیع پذیری	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
قوانین دمورگان	$\sim p \wedge \sim q \equiv \sim (p \vee q)$ $\sim p \vee \sim q \equiv \sim (p \wedge q)$
قوانین جذب	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «$p \Rightarrow q$» که خوانده می شود «اگر p آن گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می گوییم .در این ترکیب شرطی p را مقدم(فرض) و qرا تالی (حکم) می نامیم.

نکته۱: گزارهٔ مرکب«$p \Rightarrow q$» را به صورت های« p شرط کافی برای q است » و «pشرط لازم برای p است » می خوانیم.

نکته۲:جدول ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$» به صورت زیر است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

با توجه به جدول بالا ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ تنها زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

نکته۳: هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن گاه ارزش گزاره مرکب« $p \Rightarrow q$ » همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد.در این حالت می گویند : ارزش« $p \Rightarrow q$ » به‌انتفای مقدم درست است.

نکته مهم: گزاره های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی اند.

عکس نقیض ترکیب شرطی

گزارهٔ $p \Rightarrow q$ عکس ترکیب شرطی $q \Rightarrow p$ و گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

گزاره های همیشه درست و همیشه نادرست

گزاره هایی نظیر $p \Rightarrow p$ یا $p \vee \sim p$ را گزاره هایی همیشه درست و گزاره هایی نظیر $p \wedge \sim p$ را همیشه نادرست می نامیم.

ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ را به صورت $p \Leftrightarrow q$ می نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می نامیم .گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ را به صورت زیر می خوانیم:

«اگر p، آنگاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است» و «p اگر و تنها اگر q»

نکته۱: جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	**د**
د	ن	ن	د	**ن**
ن	د	د	ن	**ن**
ن	ن	د	د	**د**

نکته۲: با توجه به جدول بالا، ارزش ترکیب دو شرطی دو گزارهٔ p و q ، زمانی درست است که هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

سورها

در منطق ریاضی عبارت های«به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف اند. این عبارت ها می توانند قبل از گزاره نما ها قرار گیرند و به این وسیله گزاره هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

سور عمومی

برای بیان «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» در منطق ریاضی از نماد $\forall$ استفاده می کنیم که از حرف اول کلمه All به معنای «همه» گرفته شده است. به طور مثال عبارت زیر به صورت«به ازای هر عدد زوج» خوانده می شود.

$$\forall x \in E$$

نکته:گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند؛ به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.به طور مثال عبارت زیر یک گزاره درست است چرا که هر عضو از دامنه متغیر(R)، گزاره نما را به یک گزاره درست تبدیل می کند:

$$\forall x \in R; ۲x^۲ + x + ۱ > ۰$$

عبارت با زبان طبیعی:

برای هر عدد حقیقی x ، عبارت $۲x^۲ + x + ۱$ بزرگ تر از صفر است.

نکته: کتاب درسی مجموعه اعداد زوج را با E ، مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش داده است.

سور وجودی

برای بیان«وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» در منطق ریاضی از نماد $\exists$ استفاده می کنیم که از حرف اول کلمه Exist به معنای «وجود داشتن» گرفته شده است. به طور مثال عبارت زیر به صورت«وجود دارد عدد حقیقی x» خوانده می شود.

$$\exists x \in R$$

نکته: گزاره نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می شود، وقتی درست است که مجموعهٔ جواب آن تهی نباشد. برای مثال عبارت زیر یک گزاره درست است، زیرا حداقل یک عضو وجود دارد که به ازای آن، گزاره نما به گزاره ای با ارزش درست تبدیل شود.

$$\exists x \in O; x^{2} - 6x + 6 = 0$$

سور صفر

برای بیان «هیچ عضوی وجود ندارد» یا «به ازای هیچ مقدار» در منطق ریاضی از نماد $\nexists$

استفاده می کنیم. به طور مثال عبارت زیر به صورت« هیچ x اولی وجود ندارد» خوانده می شود.

$$\nexists x \in O$$

نکته: گزاره نمای شامل متغیر x که با سور صفر همراه می شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی باشد. برای مثال عبارت زیر یک گزاره درست است، زیرا هیچ عضوی وجود ندارد که به ازای آن، گزاره نما به گزاره ای با ارزش درست تبدیل شود.

$$\nexists x \in N; x^{2} + 1 = 0$$

نقیض گزاره های سوری

الف) نقیض گزاره « $\forall x; p(x)$ » به صورت « $\exists x; \sim p(x)$ » است.

ب) نقیض گزاره« $\exists x; p(x)$ » به صورت « $\forall x; \sim p(x)$ » یا « $\nexists x; p(x)$ » است.

ج) نقیض گزاره« $\nexists x; p(x)$ » به صورت « $\exists x; p(x)$ » است.

نکته:اگر یک گزاره دارای ارزش درست باشد، نقیض آن دارای ارزش نادرست است و بر عکس.

مثال: نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) همه دکتر ها، پول دار هستند.

ب) لامبورگینی ای وجود دارد که قرمز باشد.

پاسخ)

الف) بعضی از دکتر ها، پول دار نیستند.

ب) همه لامبورگینی ها قرمز نیستند یا هیچ لامبورگینی ای وجود ندارد که قرمز باشد.

مجموعه و زیر مجموعه

مجموعه

مجموعه دسته ای از اشیای مشخص و متمایز است که هر یک از این اشیا عضو مجموعه نامیده می شود.

اگر x عضو مجموعه A باشد می نویسیم: $x \in A$

اگر x عضو مجموعه A نباشد می نویسیم: $x \notin A$

نکته۱: تعداد اعضای مجموعه A را با n(A) نمایش می دهیم.

به طور مثال برای مجموعه $A = \{۲,۶,۸\}$ داریم n(A)=۳

نکته۲: مجموعه ای را که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه تهی گویند و آن را با نماد ϕ یا {} نشان می دهند.

نکته۳: مجموعه ای که تعداد اعضای آن قابل شمارش باشند را مجموعه متناهی و مجموعه ای که تعداد اعضای آن غیر قابل شمارش باشند را مجموعه نامتناهی گویند.

نمایش چند مجموعه مهم به صورت گذاره نما:

$A = \{x \in N |\, x = k, k^۲ \in N\}$ $A = \{۱,۲,۳, \dots\}$

$B = \{x \in N | x = ۲k, k \in N\}$ $B = \{۲,۴,۶,۸, \dots\}$

نکته۴: جابه جایی اعضا یا تکرار آن ها در مجموعه، عضو جدیدی به حساب نمی آید.

مثلا مجموعه $A = \{۲,۵,۳,۲, m, c, z, m, ۳\}$ دارای ۶ عضو می باشد.

چند مجموعه مهم

- مجموعه اعداد طبیعی

$$N = \{۱,۲,۳, \dots\}$$

- مجموعه اعداد حسابی

$$W = \{۰,۱,۲,۳, \dots\}$$

- مجموعه اعداد صحیح

$$Z = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\}$$

- مجموعه اعداد گویا: مجموعه ای از اعداد که بتوان آن ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نوشت.

$$Q = \{\frac{m}{n} | m, n \in Z, n \neq ۰\}$$

- مجموعه اعداد گنگ(اصم): مجموعه اعدادی که گویا نباشند مثل $\sqrt{۲}$
- مجموعه اعداد حقیقی: مجموعه اعدادی که شامل همه اعداد گویا و گنگ می شود. این مجموعه را با نماد R نشان می دهند.

زیر مجموعه

اگر هر عضو مجموعه A ،عضوی از B نیز باشد آنگاه می گوییم A یک زیرمجموعه B است و می نویسیم $A \subseteq B$

با استفاده از نماد ریاضی داریم:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

نکته۱: مجموعه همه زیر مجموعه های A ،مجموعه توانی A نامیده می شود و آن را با P(A) نمایش می دهیم.

نکته۲: تهی زیر مجموعه همه مجموعه هاست.

$$\emptyset \subseteq A$$

نکته۳: هر مجموعه ای زیر مجوعه ای از خودش است.

$$A \subseteq A$$

نکته۴: هر مجموعه ای زیر مجموعه مجموعه مرجع است.

در هر بحثی از مجموعه ها ، مجموعه ای وجود دارد که همه مجموعه های دیگر زیر مجموعه آن هستند. به این مجموعه، مجموعه مرجع یا جهانی می گویند.

مجموعه مرجع را با حرف U یا M نمایش می دهند.

نکته۵: برای سه مجموعه A ، B و C اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آنگاه داریم:

$$A \subseteq C$$

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه

اگر A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه های A برابر با ۲^n است. یعنی داریم

$$n(P(A)) = ۲^n$$

نکته۱: تعداد زیرمجموعه های k عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

نکته۲:تعداد زیرمجموعه هایی که K عضوی بوده و شامل iعضو خاص و فاقد j عضو خاص دیگر باشد برابر است با:

$$\binom{n-i-j}{k-i}$$

مثال:تعداد زیرمجموعه های ۴ عضوی از مجموعه $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ که شامل ۲ و فاقد ۳و۴ باشد برابر است با:

$$\binom{۸-۱-۲}{۴-۱}=\binom{۵}{۳}$$

دو مجموعه مساوی

دو مجموعه A وB از مجموعه مرجع U با هم برابرند، هرگاه هر عضوی از A ، عضوی از B و هر عضوی از B عضوی از A باشد. به عبارتی دیگر:

$$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$$

افراز یک مجموعه

همه زیر مجموعه های ناتهی مجموعه A که اشتراکی با هم نداشته باشند و اجتماع آن ها برابر مجموعه A شود را ، افرازی از مجموعه A گویند یا به عبارتی مجموعه A به n زیرمجموعه $A_۱$ و $A_۲$ و...و A_n ا فراز شده است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱. $\forall i, ۱<i<n, A_i \neq \emptyset$
۲. $\forall i,j\ (i\neq j; A_i\cap A_j=\emptyset$
۳. $A_۱\cup A_۲\cup \ldots \cup A_n = A$

چند نکته مهم

A و B و C وD چهار مجموعه با مرجع U هستند بنابراین داریم:

۱) $A \subseteq A \cup B \quad , \quad B \subseteq A \cup B \quad , \quad A \cap B \subseteq A \quad , \quad A \cap B \subseteq B$

۲)اگر $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$ آنگاه $A \cup B \subseteq C$

۳)اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه $A - B = \emptyset$

۴)اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه

$$A \cap C \subseteq B \cap C \quad , \quad A \cup B \subseteq B \cup C$$

۵)اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ باشد آنگاه

$$A \cap C \subseteq B \cap D \quad , \quad A \cup C \subseteq B \cup D$$

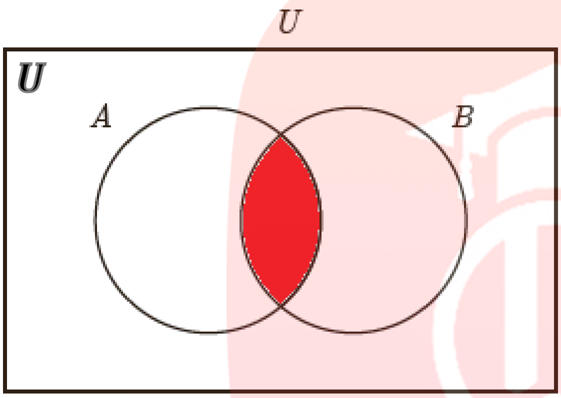
۶)اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد آنگاه

$$B - A = A \quad , \quad A - B = A$$

اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه ای است که عضو هایش هم در A و هم در B باشد.

این مجموعه را با نماد $A \cap B$ نمایش می دهند.



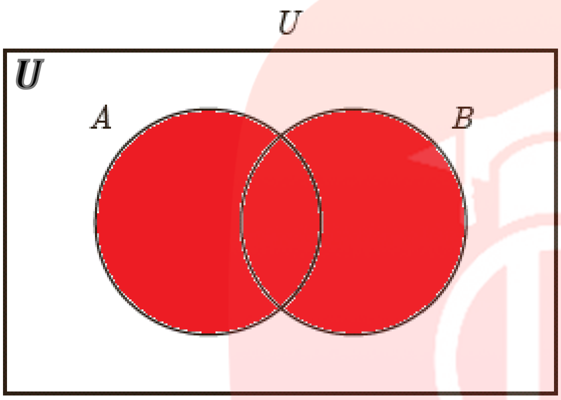
$A \cap B$

تعریف ریاضی

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} | x \in A \wedge x \in B\}$$

اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه ای است که شامل تمام عضو های دو مجموعه A وB باشد. این مجموعه را با نماد $A \cup B$ نشان می دهند.



$A \cup B$

تعریف ریاضی

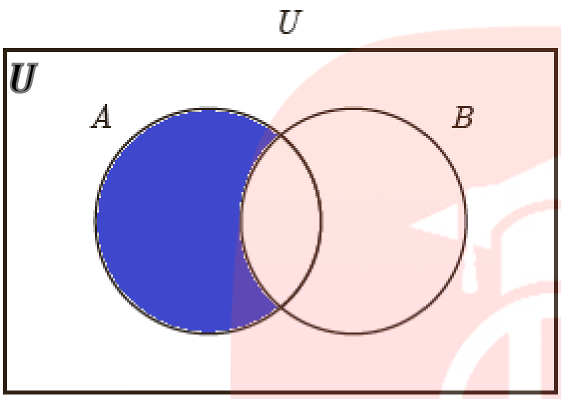
$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} | x \in A \vee x \in B\}$$

تعداد اعضا

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

تفاضل دو مجموعه

مجموعه A-B مجموعه ای است شامل تمام عضو های A که عضو B نیستند.



$A-B$

تعریف ریاضی

$$\boldsymbol{A-B=\{x\in U}|x\in A\wedge x\notin B\}$$

یا

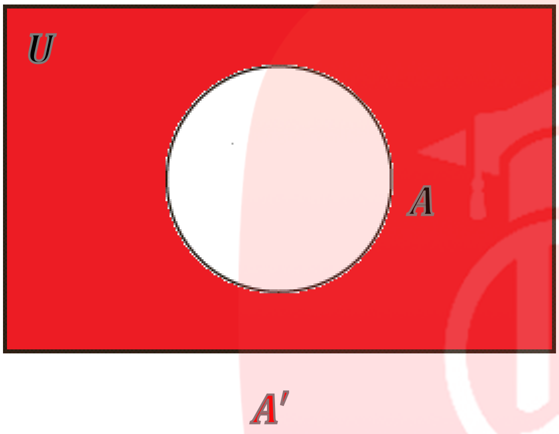
$$A-B=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B'\}=A\cap B'$$

تعداد اعضا

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

متمم مجموعه

متمم مجموعه ی A، مجموعه ای است که اعضایش متعلق به مرجع باشند ولی در A نباشند.



تعریف ریاضی

$$A' = \{x \in U | x \notin A\}$$

تعداد اعضا

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

دو مجموعه جدا از هم

دو مجموعه ای که اشتراکشان تهی باشد(اشتراکی نداشته باشند) را دو مجموعه جدا از هم یا ناسازگار گویند.

قوانین جبر مجموعه ها

جابه جایی	$\boldsymbol{A \cup B = B \cup A}$ $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$
شرکت پذیری	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
توزیع پذیری	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
دمورگان	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
جذب	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
شبه جذب	$A \cap (A' \cup B) = A \cap B$ $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

چند تساوی کاربردی

$A' \cup A = M$ $\quad$ $A' \cap A = \emptyset$

$M' = \emptyset$ $\quad$ $(A')' = A$

$A \cup M = M$ $\quad$ $A \cap M = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad$ $A \cup \emptyset = A$

$\emptyset' = M$

نکته۱ :در عمل اجتماع عضو خنثی مجموعه $\emptyset$ و در عمل اشتراک عضو خنثی مجموعه M می باشد.

نکته۲: اگر $A \subseteq B$ باشد، داریم:

$$A \cup B = B$$

و

$$A \cap B = A$$

و

$$A - B = \emptyset$$

نکته۳: اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، داریم:

$$A - B = A$$

و

$$B - A = B$$

و

$$A \subset B'$$

و

$$B \subset A'$$

نکته:اگر $A \subset B$ باشد، آنگاه $B' \subset A'$

تمرین

به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید:

- $A = B \quad \Rightarrow \quad A - B = B - A$
- $A \cap C = \emptyset \quad \Rightarrow \quad A - (B - C) = (A - B) - C$
- $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

ضرب دکارتی دو مجموعه

زوج مرتب

دوتایی (x,y) را زوج مرتب می گوییم که x مولفه اول(مختص اول) و y مولفه دوم(مختص دوم) نام دارد.

نکته: اگر دو زوج مرتب با هم برابر باشند، مولفه های اول با هم و مولفه های دومشان با هم برابر است.

حاصل ضرب دکارتی مجموعه ها

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه A و B را به صورت $A \times B$ نمایش می دهیم که برابر است با مجموعه ی شامل تمام زوج مرتب هایی که مولفه اولشان از A و مولفه دومشان از B تشکیل شده باشد.

$$A \times B = \{(x,y) | x \epsilon A, y \epsilon B\}$$

مثال: اگر $A = \{۲,۴,۶\}$ و $B = \{۳,۵\}$ باشد حاصل $A \times B$ و $B \times A$ را به دست آورید؟

$$A \times B = \{(۲,۳),(۲,۵),(۴,۳),(۴,۵),(۶,۳),(۶,۵)\}$$

$$B \times A = \{(۳,۲),(۳,۴),(۳,۶),(۵,۲),(۵,۴),(۵,۶)\}$$

همانطور که مشاهده می کنید $B \times A \neq A \times B$

نکته۱: اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد آنگاه داریم:

$$n(A \times B) = n(B \times A) = mn$$

نکته۲: گاهی ممکن است مجموعه های A یا B به صورت بازه هایی از اعداد حقیقی باشند در این هنگام معمولا حاصل ضرب دکارتی را به صورت هندسی و در صفحه مختصات دکارتی نمایش می دهیم.

نکته۳:اگر A یک مجموعه دلخواه باشند آنگاه داریم:

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

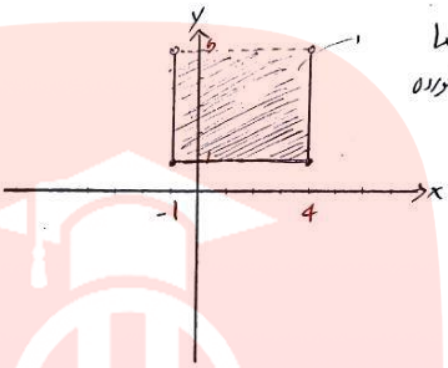
نکته۴: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند و داشته باشیم $B \times A = A \times B$ آنگاه یا $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ یا $A = B$ می باشد.

مثال: اگر $A=[-1,4]$ و $B=[1,5)$ و $C=[0,2]$ و $D=\{2,3\}$ و $E=[2,+\infty)$ باشد، مطلوب است نمایش هندسی مجموعه های زیر:

الف) $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\,,\ y\in B\}$

پاسخ:

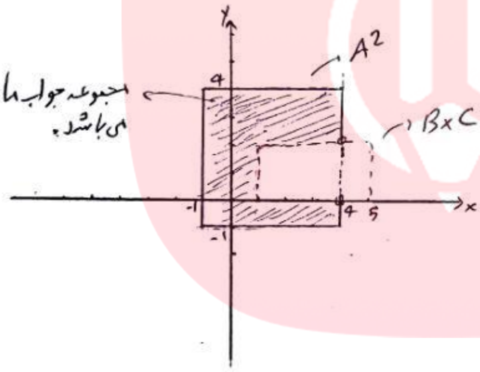
$A\times B=\{(x,y)\mid -1\le x\le 4\,,\ 1\le y<5\}$



مجموعه جواب ما ناحیه هاشور خورده می باشد.

نکته: خط $y=5$ به صورت خط چین نمایش داده شده است چون $y=5$ عضو مجموعه B نیست. یعنی $y=5$ جزء جواب های ما نیست.

ب) $A^2-B\times C$

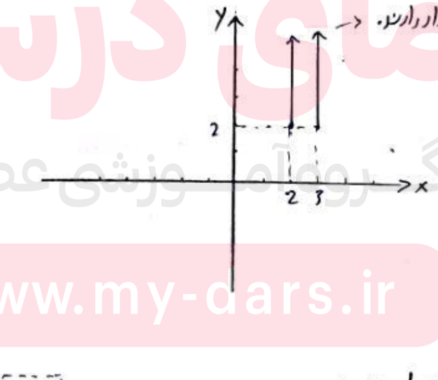


مجموعه جواب ما ناحیه هاشور خورده می باشد.

نکته: از خط $x=4$ قسمت هایی که در بازه $0\le y\le 2$ قرار می گیرند حذف شده است چرا که مجموعه جواب ما عضوهایی است که در مجموعه A^2 باشد ولی در $B\times C$ نباشد.

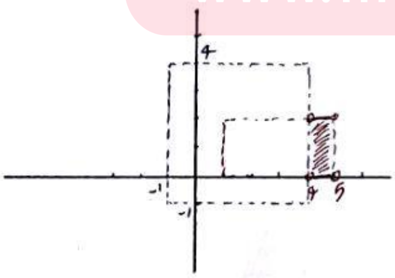
ج) $D\times E$

$D\times E=\{(x,y)\mid x=\{2,3\}\,,\ y\ge 2\}$



این خطوط تا بی نهایت امتداد دارند.

د) $B\times C-A^2$



خط $x=4$ به صورت خط چین است چون متعلق به مجموعه A^2 می باشد.

خط $x=5$ به صورت خط چین است چون متعلق به مجموعه B نیست.

احتمال و پدیده های تصادفی

تفاوت علم آمار و علم احتمال:

در علم آمار، با استفاده از نمونه های جمع آوری شده مناسب یک جامعه می توانیم درباره ویژگی ها آن جامعه آگاه شویم. در علم احتمال می توانیم در مورد چگونگی جامعه پیش بینی کنیم.

مثلا سوال ۱ مربوط به علم آمار است ولی سوال ۲ مربوط به علم احتمال می شود.

۱_درآمد کارکنان شهرداری چقدر است

۲_۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند .اگر ۲۰ نفر

از این دانش آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر

از آنها به شنا علاقه مند باشند؟

ترجمه زبان گزاره ها به زبان مجموعه ها

آزمایش یا پدیده تصادفی

آزمایش یا مشاهده ای که نتوان نتیجه آن را به طور قطع قبل از رخداد آن پیش بینی کرد، اما مجموعه نتایج ممکن است مشخص باشد مثلا پرتاب سکه یا تاس و...

فضای نمونه

مجموعه تمام نتایج یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می گویند و آن را با S نمایش می دهند.

برآمد

به هر عضو فضای نمونه یک برآمد می گویند.

پیشامد

هر زیرمجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد می گویند.

نکته: در صورتی که آزمایش ما متشکل از چند آزمایش با فضای نمونه ای $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ و... باشد، فضای نمونه ای آن $S_۱ \times S_۲ \times S_۳ \times \ldots$ است.

چون هر پیشامد یک مجموعه است پس اعمالی که در جبر مجموعه ها داشتیم، برای پیشامد ها نیز برقرار است که در ادامه بر هر یک از آن ها خواهیم پرداخت.

نکته: برای هر پیشامد مثل A احتمال رخ دادن آن را با P(A) نمایش می دهند که یک عدد حقیقی در بازه [۰,۱] است.

نکته: احتمال وقوع پیشامد فضای نمونه ای برابر یک می باشد. P(S)=۱

نکته: چون هر پیشامد زیرمجموعه ای از فضای نمونه ای می باشد و اینکه تهی زیرمجموعه همه مجموعه هاست پس تهی هم یک پیشامد است که احتمال رخ دادن آن صفر می باشد. $P(\emptyset) = ۰$

اجتماع پیشامد ها ($A \cup B$):

زمانی رخ می دهد که حداقل یکی از پیشامد های A یا B رخ دهد.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اشتراک پیشامد ها $(A \cap B)$:

زمانی رخ می دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهد.

تفاضل پیشامدها $(A - B)$:

زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد.

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

متمم یک پیشامد (A') : زمانی رخ می دهد که A رخ ندهد.

$$P(A') = ۱ - P(A)$$

دو پیشامد ناسازگار

پیشامد های A و B از یک فضای نمونه ای را ناسازگار می گویند هرگاه نتوان همزمان رخ دهند. یعنی $(A \cap B) = \emptyset$

نکته: برای دو پیشامد ناسازگار A و B داریم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A-B)$$

نکته:اگر $B \subseteq A$ باشد داریم:

$$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

و

$$P(B) \leq P(A)$$

نکته: فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی یکتا نیست و بستگی به مدلی دارد که ما از آن پدیده می سازیم

به طور مثال فضای نمونه ای پرتاب یک تاس را می توان به صورت های مختلف زیر بیان کرد:

$S = \{\text{فرد, زوج}\}$ $\qquad$ $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ $\qquad$ $S = \{\text{غیراول, اول}\}$

احتمال هم شانس

در یک فضای نمونه ای هم شانس S، احتمال وقوع پیشامد A برابر است با:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد فضای نمونه ای}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

برای بیان احتمال به صورت درصد کافی است عبارت بالا را در ۱۰۰ ضرب کنید.

احتمال غیر هم شانس

تعریف: هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه ای S احتمال نابرابری داشته باشند، S را فضای نمونه ای با احتمال غیر هم شانس می گوییم.

در قسمت قبل فرض کردیم احتمال وقوع پیشامد های مورد بررسی در فضای نمونه ای یکسان است مثلا در پرتاب یک سکه احتمال آمدن (رو) یا (پشت) را برابر $\frac{۱}{۲}$ قرار دادیم ولی همیشه این فرض درست نیست. در این صورت دیگر نمی توانیم احتمال وقوع پیشامد A را از رابطه $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ حساب کنیم.

پیشامد ساده:

هر مجموعه تک عضوی از فضای نمونه ای را یک پیشامد ساده می گوییم. در پیشامد های ساده به جای $P(\{a\})$ می نویسیم $P(a)$

در فضای نمونه ای متناهی با احتمال غیرهم شانس، اگر $S=\{S_1,S_2,\dots,S_n\}$ فضای نمونه ای و $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد همواره داریم:

$$0 \le P(A) \le 1$$

$$P(S)=1$$

$$P(A)=P(a_1)+P(a_2)+\cdots+P(a_n)$$

احتمال دو جمله ای

اگر آزمایش را n بار تکرار کنیم و بخواهیم x بار پیشامد معینی مثل A رخ دهد، احتمال x بار رخ دادن پیشامد A به طوری که احتمال رخ دادن پیشامد A در یک بار آزمایش برابر P باشد،برابر است با:

$$P\left(\text{احتمال } x \text{ بار رخ دادن } A\right)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x}$$

به طور مثال در پرتاب یک سکه اگر احتمال (رو) آمدن برابر $\frac{1}{2}$ باشد و سکه را ۵ مرتبه پرتاب کنیم داریم:

$$P\left(\text{احتمال ۲ بار رو آمدن}\right)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-2}=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

احتمال شرطی

احتمال وقوع پیشامد A را به شرطی که بدانیم پیشامد B رخ داده است، احتمال A به شرط رخ دادن B می گویند که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

در این نوع از مسائل، فضای نمونه ای ما B می باشد زیرا احتمال وقوع پیشامد A را زمانی می خواهیم که B رخ داده باشد. به این نوع از فضای نمونه ای، فضای نمونه ای کاهش یافته می گوییم.

نکته۱: برای هر پیشامد A داریم:

$$P(A'|B)=۱-P(A|B)$$

نکته۲: گفتیم که برای دو پیشامد A و Bداریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

حال اگر C پیشامدی با احتمال مثبت باشد، بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(A|B)-P((A\cap B)|C)$$

و اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، داریم:

$$P((A\cup B)|C)=P(A|C)+P(A|B)$$

مثال: تاسی را پرتاب می کنیم:

الف)احتمال آنکه عدد ظاهر شده مضرب ۳ باشد

ب)اگر بدانیم عدد ظاهر شده فرد است، احتمال آنکه اول باشد.

پاسخ

الف)

$$P(C) = P(\{۳,۶\}) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

ب) این احتمال شرطی است و شرط سوال فرد بودن است.

$$A = \{۱,۳,۵\}$$

$$B = \{۲,۳,۵\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۲}{۳}$$

قانون ضرب احتمال

تعریف احتمال شرطی، با یک محاسبه ساده به عبارتی تبدیل می شود که به آن قانون ضرب احتمال گفته می شود:

اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A) > ۰$ ، آنگاه

$$P(A \cap B) = P(A)P(A|B)$$

از این قانون زمانی استفاده می کنیم که بخواهیم $P(A \cap B)$ را حساب کنیم.

نکته: قانون ضرب احتمال را می توان برای سه پیشامد نیز نوشت.

اگر $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ پیشامد هایی با احتمال نا صفر باشند، آنگاه:

$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|(A_۱ \cap A_۲)$$