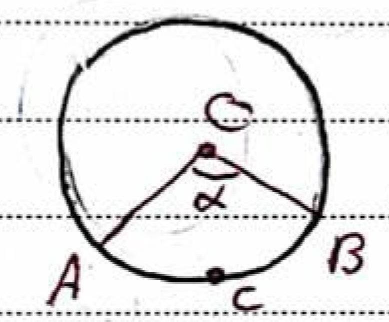
۱) دایره: مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که فاصله‌اش از نقطه‌ی ثابت واقع در آن صفحه مقدار ثابتی باشد، دایره است که به نقطه‌ی ثابت مرکز دایره و به مقدار ثابت شعاع دایره گفته می‌شود.

۲) وتر: پاره خطی که دو نقطه‌ی متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند وتر آن دایره گفته می‌شود.

۳) قطر: وتری که از مرکز دایره می‌گذرد قطر آن دایره نامیده می‌شود.

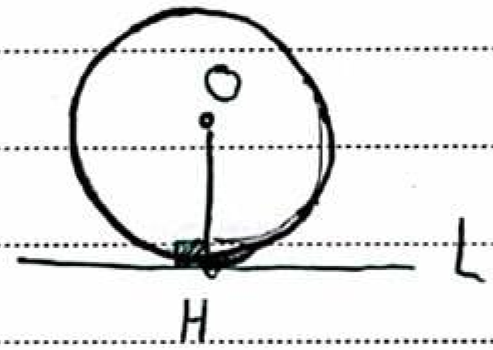
۴) زاویه مرکزی: زاویه‌ای که راس آن مرکز دایره باشد، زاویه مرکزی گفته می‌شود. بنا به تعریف اندازه‌ی کمان نظیر هر زاویه مرکزی در دایره به حسب درجه همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبروی کمان است.

$\overset{\frown}{ACB} = \hat{O} = \alpha$



خط قاطع:
۵) خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند، قاطع نسبت به دایره گفته می‌شود.

۶) نقطه‌ی H روی دایره C به مرکز O را در نظر می‌گیریم خط L که از نقطه‌ی H می‌گذرد بر شعاع OH عمود است. خط مماس بر دایره در نقطه H نامیده می‌شود.



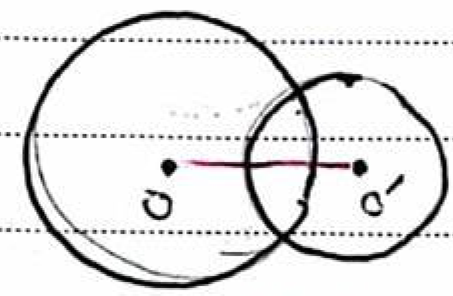
Subject
Date

وضعیت دو دایره نسبت به هم ← خط المرکزی = $d = OO'$

r

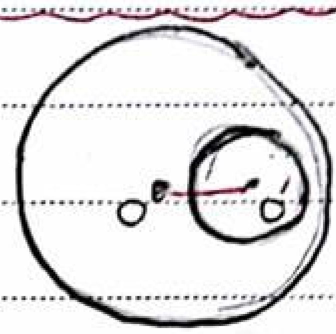
r'

۱- متقاطع



$r - r' < d < r + r'$

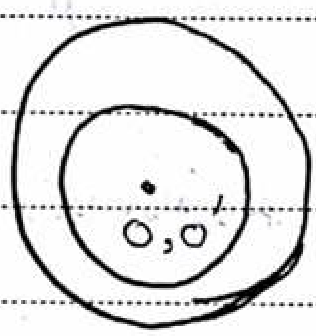
۲- درون هم



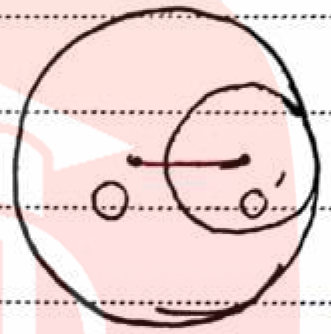
$d < r - r'$

۳- هم مرکز

$d = 0$



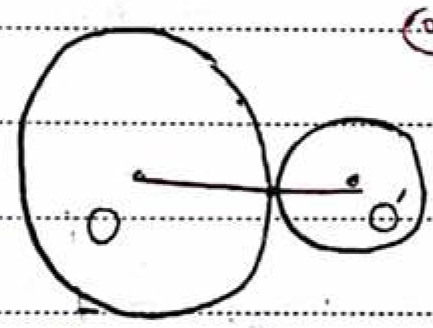
۴- مماس درون



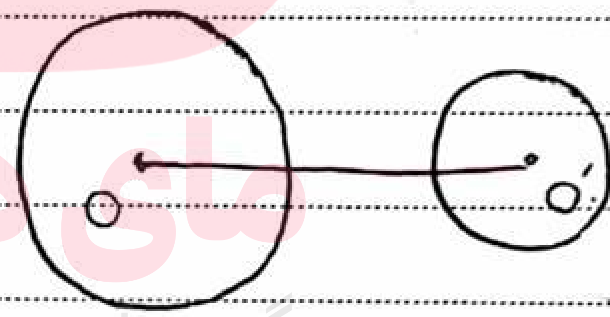
$d = r - r'$

۵- مماس بیرون

$d = r + r'$



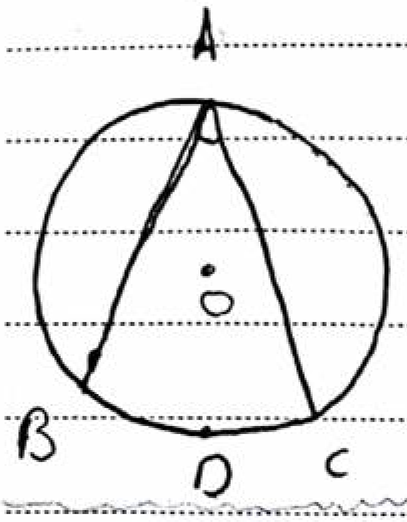
۶- بیرون از هم



$d > r + r'$

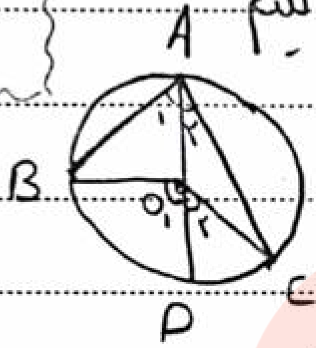
زاویه محاطی: زاویه‌ای که راس آن روی دایره و ضلع‌هایش دو وتر از دایره باشند زاویه محاطی نامیده می‌شود.

قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبرو آن است؟



حکم: $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BDC}}{2}$

① برهان: ابتدا قطر AD را رسم می‌کنیم و از B و C به O وصل می‌کنیم



$$O_1 \xrightarrow[ABO]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 = A_1 + B \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ABO]{\text{شعاع دایره } OA=OB} \hat{A}_1 = \hat{B} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A}_1$$

$$O_1 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} O_1 = \overset{\frown}{BD}$$

$$\Rightarrow 2\hat{A}_1 = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \boxed{\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}}$$

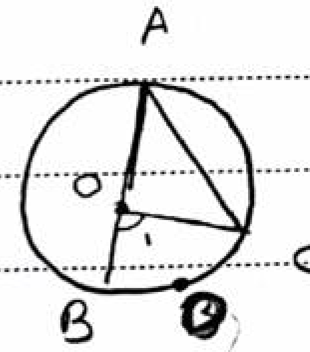
$$O_2 \xrightarrow[ACO]{\text{زاویه خارجی}} O_2 = A_2 + \hat{C} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ACO]{\text{شعاع } OA=OC} \hat{A}_2 = \hat{C} \Rightarrow \hat{O}_2 = 2\hat{A}_2$$

$$O_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} O_2 = \overset{\frown}{CD}$$

$$\Rightarrow 2A_2 = CD \Rightarrow A_2 = \frac{CD}{2}$$

$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BDC}}{2}$$

② برهان: ابتدا از C به O وصل می‌کنیم



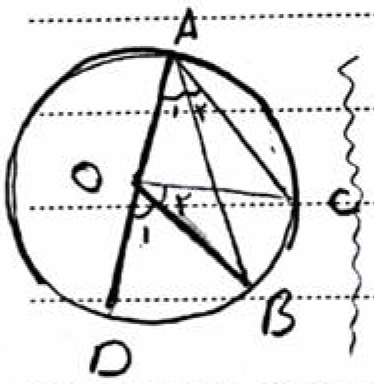
$$\hat{O}_1 \xrightarrow[ACO]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{C} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ACO]{\text{شعاع دایره } OA=OC} \hat{A} = \hat{C} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A}$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 = \overset{\frown}{BOC}$$

$$\Rightarrow 2A = BDC$$

$$A = \frac{\overset{\frown}{BDC}}{2}$$

③ برهان: ابتدا قطر AD را رسم می‌کنیم و سپس از B و C به O وصل می‌کنیم



$$O_1 \xrightarrow[ABD]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ABD]{\text{شعاع } OA=OB} \hat{A}_1 = \hat{B} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A}_1$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 = \overset{\frown}{BD}$$

$$\Rightarrow 2\hat{A}_1 = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}}$$

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 \xrightarrow[ACO]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{C} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین}]{OA=OC} A_1 + A_2 = C \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$$

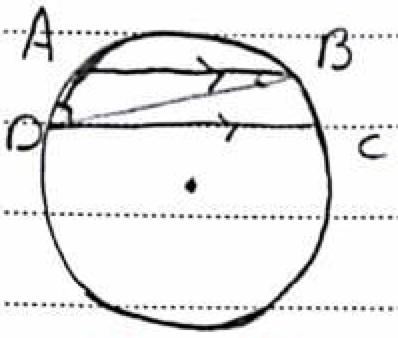
$$\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \overset{\frown}{CBD}$$

$$\Rightarrow 2(A_1 + A_2) = \overset{\frown}{CBD} \Rightarrow A_1 + A_2 = \frac{\overset{\frown}{CBD}}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{\overset{\frown}{CBD}}{2} - \hat{A}$$

$$A_2 = \frac{\overset{\frown}{CBD}}{2} - \hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{CBD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

Subject
Date

ثابت کنید در هر دایره کمان های محصور بین دو وتر موازی باهم برابرند.



فرض: $AB \parallel CD$
حکم: $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$

جواب: ابتدا از B به D وصل می کنیم

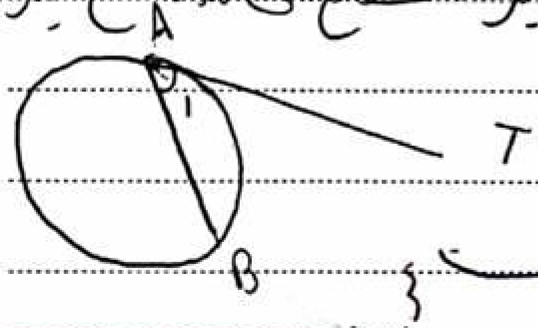
$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$ زاویه محاطی (۱)

$\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ زاویه محاطی (۲)

$$\left.\begin{matrix} AB \parallel CD \\ BD \text{ مورب} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} \quad \text{(س)}$$

$$\xrightarrow{\text{(۱)(۲)(س)}} \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

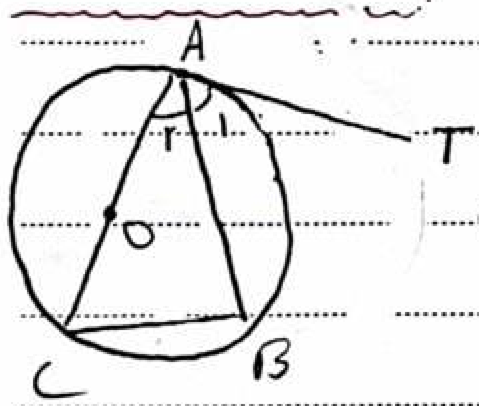
زاویه ی ظلی: زاویه ای که راسش روی دایره است، یک ضلعش دایره را قطع می کند و ضلع دیگرش بر دایره مماس است زاویه ظلی نامیده می شود.



$\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

قضیه: اندازه ی هر زاویه ی ظلی برابر با نصف کمان روبروی آن است.

برهان: ابتدا قطر AC را رسم می کنیم و در ادامه از B به C وصل می کنیم.



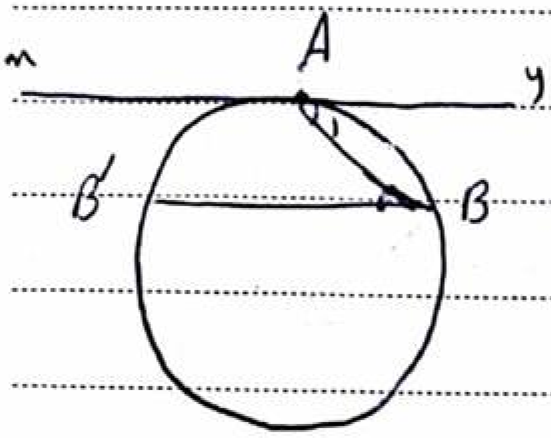
$\overset{\frown}{AC} = 180^\circ$

$\hat{B}$ زاویه محاطی: $\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \xrightarrow{ABC} \hat{A}_2 + \hat{C} = 90^\circ$ (۱)

شعاع $OA \Rightarrow OA \perp \underset{\text{خط مماس}}{AT} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$ (۲)

$$\xrightarrow{(1),(2)} \hat{A}_1 = \underset{\text{زاویه محاطی}}{\hat{C}} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

مثال: خط xy در نقطه‌ی A بر دایره‌ی C مماس است. وتر BB' از دایره را موازی xy رسم کرده‌ایم. ثابت کنید $\widehat{AB}=\widehat{AB'}$



جواب: ابتدا A به B وصل می‌کنیم

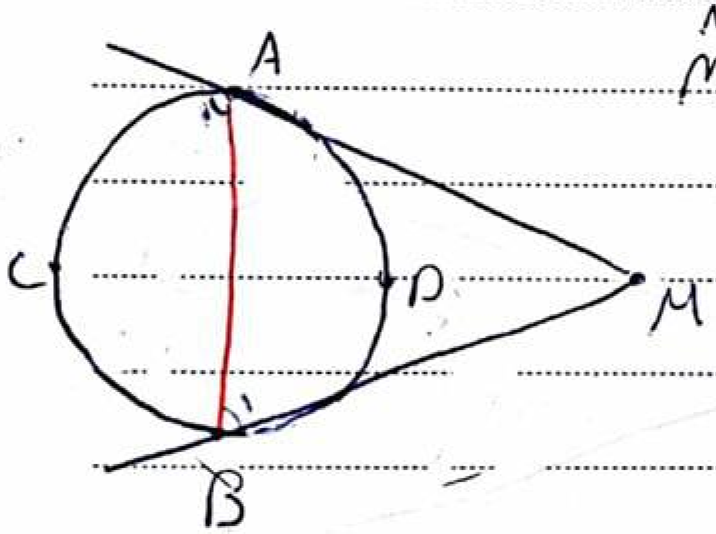
$$\left.\begin{array}{l} xy \parallel BB' \\ AB \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B'} \quad (1)$$

زاویه ظلی $\hat{A}_1 = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$ (۲)

زاویه محاطی $\hat{B'} = \dfrac{\widehat{AB'}}{2}$ (۳)

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{AB'}}{2} \Rightarrow \widehat{AB}=\widehat{AB'}$$

مثال: با توجه به شکل ثابت کنید $\hat{M} = \dfrac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{2}$



ابتدا A به B وصل می‌کنیم

زاویه ظلی $\hat{A}_1 = \dfrac{\widehat{ACB}}{2}$

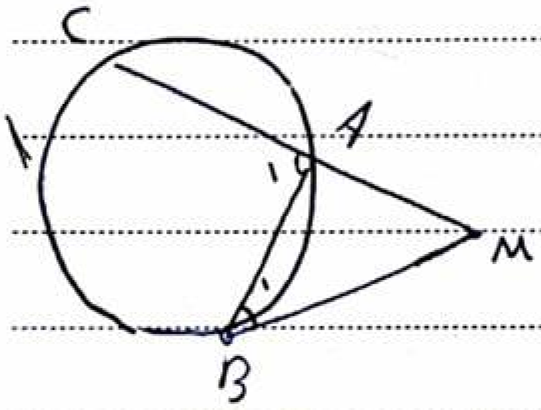
زاویه ظلی $\hat{B}_1 = \dfrac{\widehat{ADB}}{2}$

$\triangle ABM$ زاویه خارجی $\hat{A}_1 = \hat{M} + \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{M} = \hat{A}_1 - \hat{B}_1 \xrightarrow[(2)]{(1)} \dfrac{\widehat{ACB}}{2} - \dfrac{\widehat{ADB}}{2}$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{2}$$

مثال: با توجه به شکل ثابت کنید $\hat{M} = \dfrac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{2}$

جواب: ابتدا A به B وصل می‌کنیم



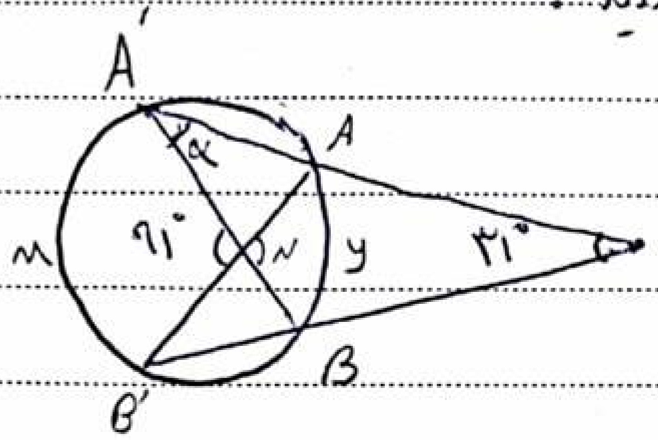
زاویه محاطی $\hat{A}_1 = \dfrac{\widehat{BC}}{2}$ (۱)

زاویه ظلی $\hat{B}_1 = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$ (۲)

$\triangle ABM$ زاویه خارجی $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \hat{A}_1 - \hat{B}_1 \xrightarrow[(2)]{(1)} \dfrac{\widehat{BC}}{2} - \dfrac{\widehat{AB}}{2}$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{2}$$

در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه α را بدست آورید.



در قضیه‌ی قبل اثبات کردیم

$$\hat{M} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 31^\circ = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 62^\circ$$

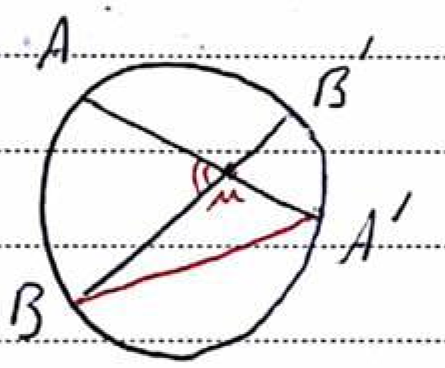
$$\hat{N} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 91^\circ = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 182^\circ$$

$$\begin{cases} x-y = 62 \\ x+y = 182 \end{cases} \Rightarrow 2x = 244,\ x = 122^\circ \Rightarrow x+y = 162,\ 122+y = 162,\ y = 60^\circ$$

$$\alpha = \hat{A'} = \frac{y}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

زاویه‌ی محاطی

با توجه به شکل ثابت کنید $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2}$



زاویه‌ی خارجی $MA'B$: $\hat{M} = \hat{A'} + \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2}$

برهان: ابتدا از A' به B وصل می‌کنیم.

در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس اند. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟

$$\hat{B} = \frac{y+z+w-x}{2} \Rightarrow 80 = \frac{y+z+w-x}{2} \Rightarrow y+z+w-x = 160$$

$$\Rightarrow y+w = 160 - z + x \quad (1)$$

$$\hat{C} = \frac{x+y+w-z}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x+y+w-z}{2} \Rightarrow x+y+w-z = 140^\circ$$

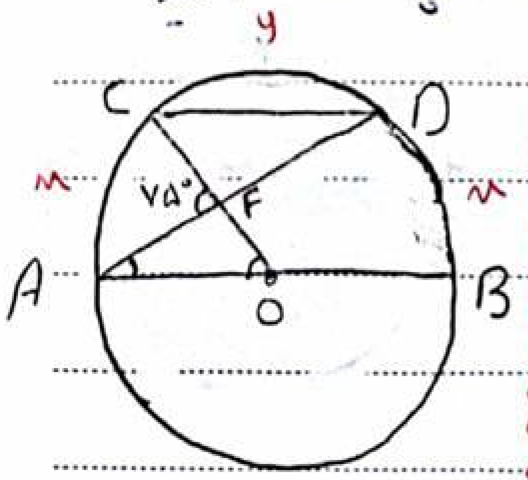
$$\Rightarrow y+w = 140 - x + z \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 160 - z + x = 140 - x + z \Rightarrow 2x - 2z = -20 \Rightarrow x - z = -10^\circ \quad (3)$$

$$y+w = 160 + x - z \xrightarrow{(3)} y+w = 160 + (-10) \Rightarrow y+w = 150 \quad (4)$$

$$\hat{A} = \frac{y+w}{2} \overset{(4)}{=} \frac{150}{2} = 75^\circ$$

در دایره رسم شده‌ی شکل مقابل $CD \parallel AB$ است اندازه‌ی کمان CD را به دست آورید.



مطابق قضیه $CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}=x$

قطر دایره AB $\Rightarrow \widehat{AB}=180^\circ \Rightarrow 2x+y=180$

(۳) $\Rightarrow 100+y=180 \Rightarrow y=80 \Rightarrow \widehat{CD}=80^\circ$

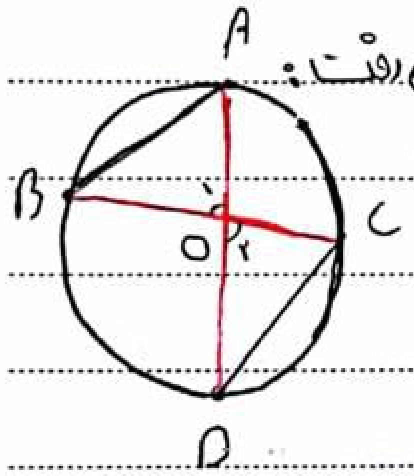
$A\hat{O}F$ زاویه خارجی $\hat{F}=75^\circ=\hat{O}+\hat{A} \xRightarrow{(1),(2)} 75^\circ = x+\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2}=75^\circ$

زاویه مرکزی $\hat{O}$: $\widehat{AC}=x$ (۱) $\qquad \Rightarrow x = 75\times\frac{2}{3}$

زاویه محاطی $\hat{A}=\frac{\widehat{BD}}{2}=\frac{x}{2}$ (۲) $\qquad \Rightarrow x=50^\circ$ (۳)

ثابت کنید کمان‌های دو وتر مساوی برابرند و برعکس.

برهان رفت:



ابتدا O را به A و B و C و D وصل می‌کنیم:

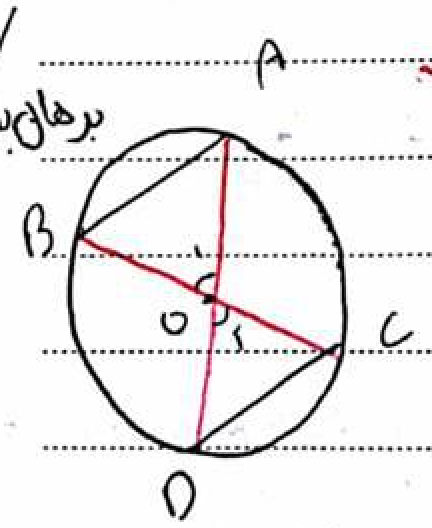
فرض: $AB=CD$

حکم: $\widehat{AB}=\widehat{CD}$

$$\begin{cases} OA=OC & \text{شعاع} \\ OB=OD & \text{شعاع} \\ AB=CD & \text{فرض} \end{cases} \xRightarrow{(\text{ض ض ض})} O\hat{A}B \cong O\hat{C}D$$

اجزاء متناظر $\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2 \xRightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AB}=\widehat{CD}$

برهان برگشت:



فرض: $\widehat{AB}=\widehat{CD}$

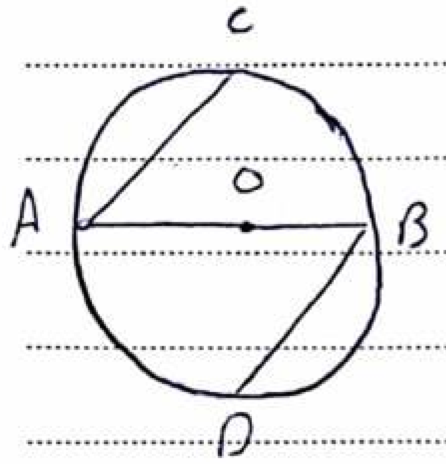
حکم: $AB=CD$

ابتدا O را به A و B و C و D وصل می‌کنیم:

$$\begin{cases} OA=OC \\ OB=OD \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \ (\widehat{AB}=\widehat{CD}) & \text{زاویه مرکزی} \end{cases} \xRightarrow{(\text{ض ز ض})} O\hat{A}B \cong O\hat{C}D$$

اجزاء متناظر $\Rightarrow AB=CD$

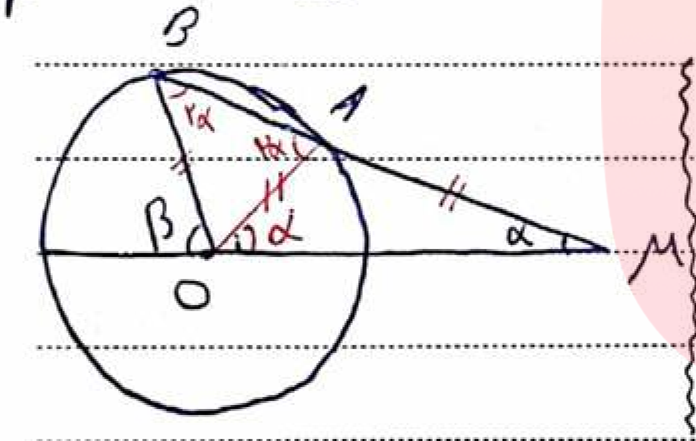
در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند
ثابت کنید $AC=BD$



$$AC \parallel BD \text{ وتر} \Longrightarrow \widehat{AD}=\widehat{BC} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AC}+\widehat{BC}=180^\circ \\ \widehat{BD}+\widehat{AD}=180^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{AC}+\widehat{BC}=\widehat{BD}+\widehat{AD} \xrightarrow{(1)} \widehat{AC}=\widehat{BD} \xrightarrow[\text{قطعه}]{\text{ملزمه}} AC=BD$$

دایره‌ی $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه‌ی M خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است و $MA=R$؛ نشان دهید $\beta=3\alpha$



$$AM=OA=R \Longrightarrow O\hat{M}A \Longrightarrow \hat{M}=\hat{O}_1=\alpha \quad (1)$$
(متساوی الساقین)

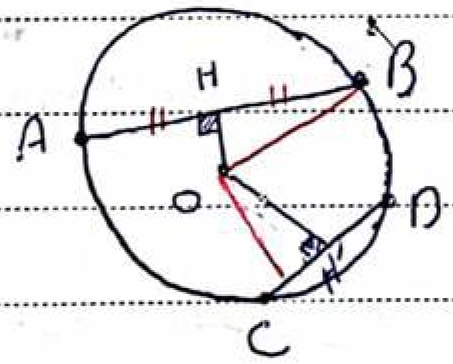
$$\text{زاویه خارجی } \hat{A}_1=\hat{M}+\hat{O}_1 \xrightarrow{(1)} \hat{A}_1=2\alpha$$
$O\hat{M}A$

$$OA=OB=R \Longrightarrow O\hat{A}B \Longrightarrow \hat{A}_1=\hat{B}=2\alpha \quad (2)$$

$$O\hat{M}B \text{ زاویه خارجی } \beta=\hat{B}+\hat{M} \xrightarrow{(1),(2)} \beta=2\alpha+\alpha \Longrightarrow \beta=3\alpha$$

در دایره $C(O,R)$ نشان دهید اگر وترها $AB>CD$ آنگاه $OH<OH'$

فرض: $AB>CD$ ، برهان خلف



حکم: $OH<OH' \xrightarrow{\div 2} BH>CH'$

(ابتدا O را به B و C وصل می‌کنیم.)

$$\left.\begin{array}{l}\text{قائم الزاویه } O\hat{B}H \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OB^2=OH^2+BH^2 \\ \text{قائم الزاویه } O\hat{C}H \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OC^2=OH'^2+CH'^2\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{شعاع}]{OB=OC} OH^2+BH^2=OH'^2+CH'^2$$

$$\xrightarrow{BH>CH'} OH^2<OH'^2 \Longrightarrow OH<OH'$$

۵

Subject

Date

$O\hat{B}H \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OB^2 = OH^2 + BH^2$

قائم الزاویه

$O\hat{C}H \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OC^2 = OH'^2 + CH'^2$

قائم الزاویه

$\xrightarrow[\text{شعاع}]{OB=OC} OH^2 + BH^2 = OH'^2 + CH'^2 \xrightarrow{OH<OH'} BH^2 > CH'^2$

$\Rightarrow BH > CH'$

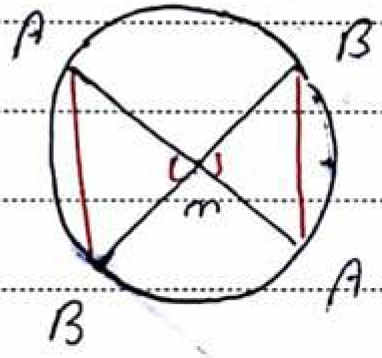
$\xrightarrow[\text{طبق قضیه}]{\times 2} AB > CD$

درس دوم

@Riazi_mahmoodi

(رابطه‌ی طولی در دایره)

هرگاه دو وتر در داخل دایره همدیگر را قطع کنند آنگاه داریم: $mA.mA' = mB.mB'$



برهان: ابتدا از A به B و از A' به B' وصل می‌کنیم

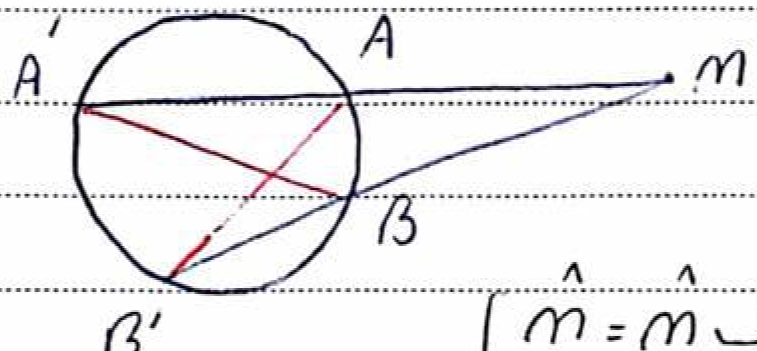
$$\begin{cases} \hat{m}_1 = \hat{m}_2 & \text{متقابل به راس} \\ \hat{A} = \hat{B}' = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} & \text{محاطی} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} m\hat{A}B \sim mB'A'$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \frac{mA}{mB'} = \frac{mB}{mA'}$$

$$\Rightarrow mA.mA' = mB.mB'$$

Subject
Date

اگر دو وتر دایره در بیرون از دایره همدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع کنند آنگاه داریم: $MA.MA' = MB.MB'$

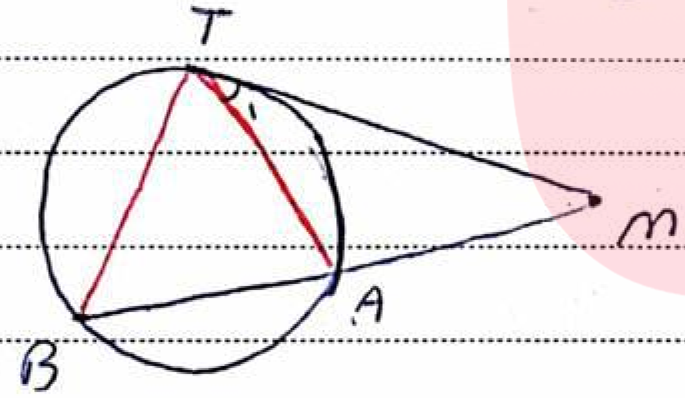


برهان: ابتدا A' به B و A به B' وصل می‌کنیم

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{M} \text{ مشترک} \\ \hat{A'} = \hat{B'} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} M\overset{\triangle}{B}A \sim M\overset{\triangle}{A'}B' \Longrightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MA'}{MB'}$$

$$\Longrightarrow MA.MA' = MB.MB'$$

اگر خط مماس و وتر دایره در نقطه‌ای مانند M همدیگر را قطع کنند آنگاه: $MT^2 = MA.MB$



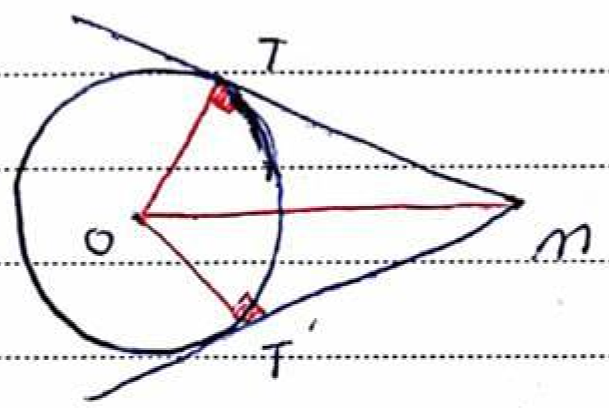
برهان: ابتدا T به A و B وصل می‌کنیم

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{M} \text{ مشترک} \\ \hat{T_1} = \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} M\overset{\triangle}{A}T \sim M\overset{\triangle}{T}B \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

$$\Longrightarrow MT^2 = MA.MB$$

نکته ← از هر نقطه‌ی خارج دایره دو مماس برابر می‌توان رسم کرد

اثبات: دو مماس برابر رسم شده از یک نقطه برابر است: $MT = MT'$



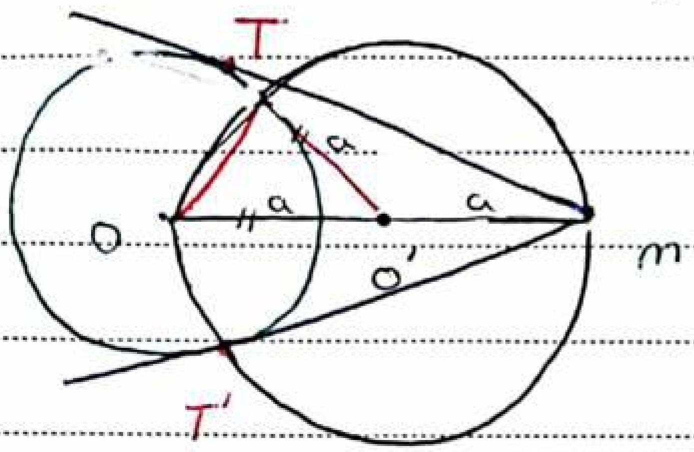
ابتدا O به T و T' و M وصل می‌کنیم و چون MT و MT' مماس بر دایره‌اند پس بر شعاع عمودند

$$\begin{cases} OT = OT' \text{ شعاع} \\ OM = OM \text{ مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر یک ضلع}} O\overset{\triangle}{T}M \cong O\overset{\triangle}{T'}M \Longrightarrow MT = MT'$$

Subject
Date

@ Riazi_mahmoodi

مراحل رسم مماس بر دایره از نقطه‌ی خارج دایره:



مراحل زیر را انجام می دهیم

(۱) از O به m وصل می کنیم

(۲) وسط Om را O' می نامیم

(۳) دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $O'm = OO'$ رسم می کنیم

(۴) محل برخورد دایره با دایره اصلی را T و T' می نامیم

(۵) از m به T و T' وصل می کنیم

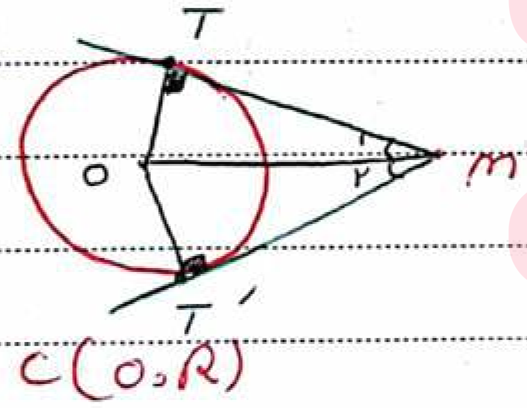
(۶) mT و mT' همان خط‌های مماس بر دایره هستند

علت: $O'T = OO' = O'm = a$ شعاع دایره

$$\left.\begin{array}{l} O'T = a \\ Om = 2a \end{array}\right\} \Longrightarrow O'T = \frac{1}{2} Om$$

مثلثی که اندازه میانه با ضلع روبرو برابر باشد یعنی آن مثلث قائم الزاویه است پس: $OT \perp mT$

هرگاه از نقطه‌ی m خارج دایره $C(O, r)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم. T و T' نقاط تماس باشند ثابت کنید خط Om نیمساز زاویه $T\hat{m}T'$ است.



حکم: $\hat{m}_1 = \hat{m}_2$

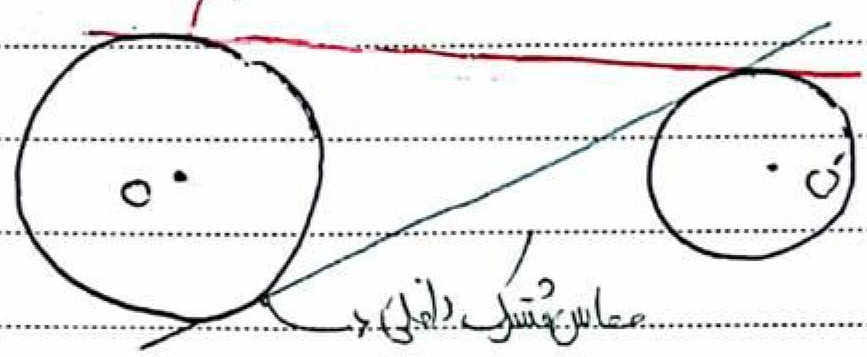
برهان: ابتدا از O به T و T' وصل می کنیم

$$\left\{\begin{array}{l} OT = OT' \quad \text{شعاع} \\ Om = Om \quad \text{مشترک} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OTm \cong \triangle OT'm \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزاء}} \hat{m}_1 = \hat{m}_2$$

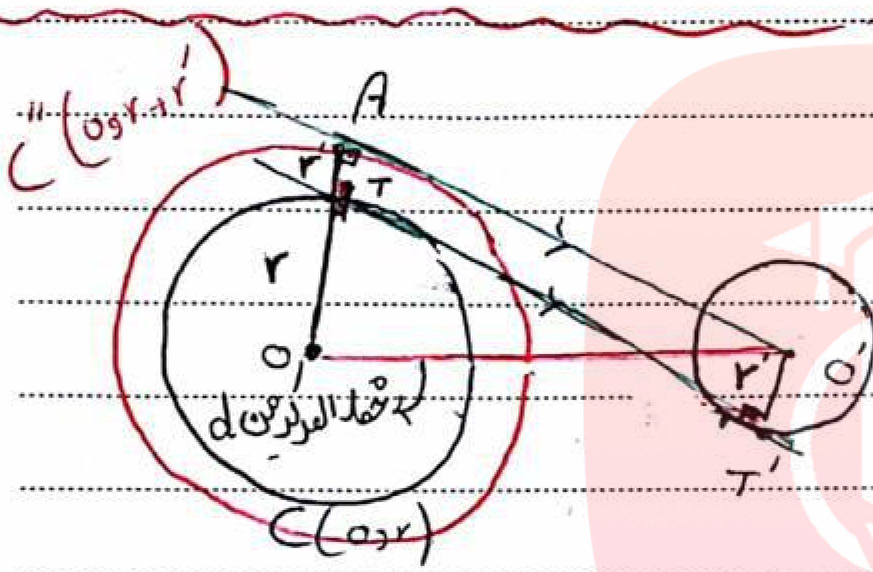
Nevis

Subject
Date

مماس مشترک : هر خطی یا پاره خطی را که بر هر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک ۲ دایره می‌نامند



مراحل رسم مماس مشترک داخلی و اندازه‌ی آن :



۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع r+r' رسم می‌کنیم

۲) از نقطه‌ی O' مماسی بر دایره C'' رسم می‌کنیم و O' و A (محل تماس خط مماس) را وصل می‌کنیم

۳) شعاع OA دایره C را در T قطع می‌کند

۴) از نقطه‌ی T خط موازی O'A رسم می‌کنیم که چهارضلعی ATT'O' یک مستطیل می‌شود

۵) خط TT' همان مماس مشترک داخلی است

$$\overset{\triangle}{OO'A} \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\text{قائم الزاویه } \hat{A}=90} O'A^2 + OA^2 = OO'^2 \xrightarrow[\text{اضلاع مستطیل}]{O'A = TT'} TT'^2 + (r+r')^2 = d^2$$

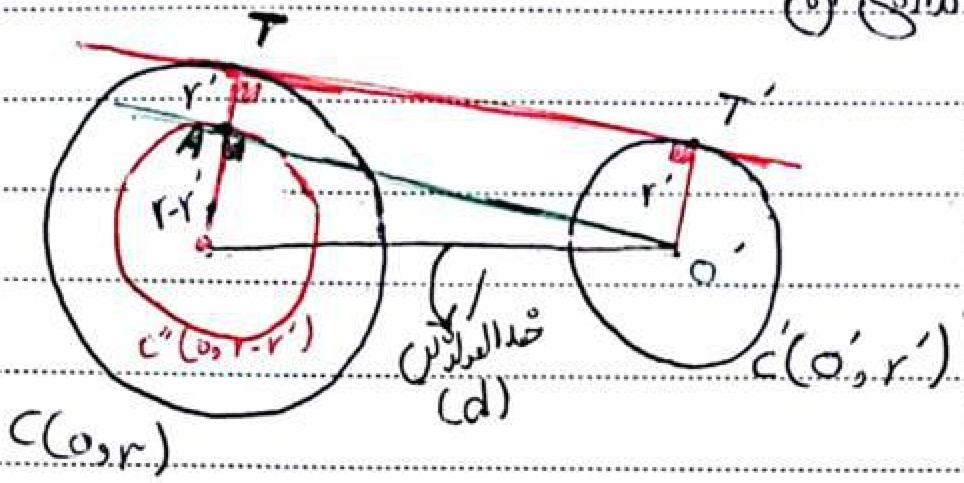
$$\Rightarrow TT'^2 = d^2 - (r+r')^2$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (r+r')^2}$$

Subject
Date

@Riazi_mahmoodi

مراحل رسم مماس مشترک خارجی دوایری که



1) دایره‌ای به مرکز O و شعاع r−r' رسم می‌کنیم

2) از نقطه‌ی O' مماس بر دایره‌ی C'' رسم می‌کنیم

3) از O به نقطه‌ی تماس با دایره‌ی C'' (A) وصل و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی C را در نقطه‌ی T قطع کند

4) از نقطه‌ی T موازی خط O'A رسم می‌کنیم که چهارضلعی ATTO' یک مستطیل است

5) خط TT' همان خط مماس مشترک خارجی دو دایره است

$$OAO' \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\text{قائم الزاویه } \hat{A}=90^\circ} O'A^2 + OA^2 = OO'^2$$

$$\xrightarrow[\text{طول مستطیل}]{O'A = TT'} TT'^2 + (r-r')^2 = d^2$$

$$\Longrightarrow TT'^2 = d^2 - (r-r')^2$$

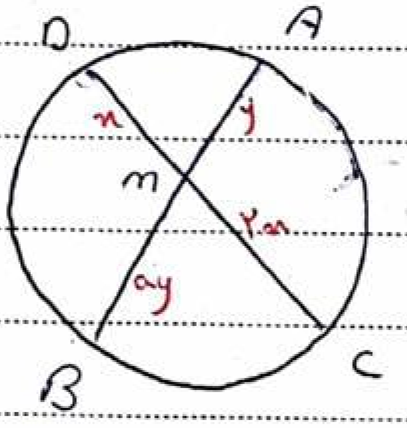
$$\Longrightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (r-r')^2}$$

Subject

Date

تمرین ص ۲۳

در دایره‌ی $C(O, R)$ وتر AB، وتر CD به طول $9cm$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11cm$ آنگاه وتر CD، وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند.



$CD = x + 2x = 3x = 9 \Longrightarrow x = 3cm$

طبق قضیه: $MA \times MB = MD \times MC$

$\Longrightarrow MA \times MB = 3 \times 6$

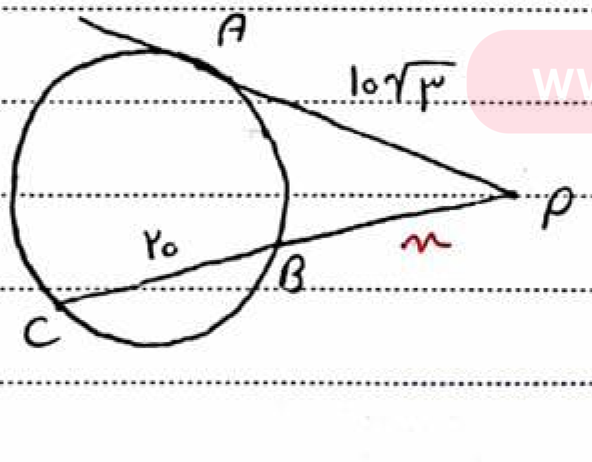
$\Longrightarrow MA \times MB = 18 \Longrightarrow \overset{\alpha}{y} \times \overset{\beta}{ay} = 18 \Longrightarrow \alpha . \beta = 18 = P$

$AB = \underbrace{y}_{\alpha} + \underbrace{ay}_{\beta} = 11 \Longrightarrow \alpha + \beta = 11 = S$

$x^2 - Sx + P = 0 \Longrightarrow x^2 - 11x + 18 \Longrightarrow (x-2)(x-9) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 = y \\ x = 9 = ay \end{cases}$

$\frac{MB}{MA} = \frac{ay}{y} = \frac{9}{2}$

از نقطه‌ی P خارج دایره‌ی مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم. همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی B و C قطع کرده است. $BC = 20$ طول‌های PB و PC را به دست آورید.



طبق قضیه: $PA^2 = PB \times PC$

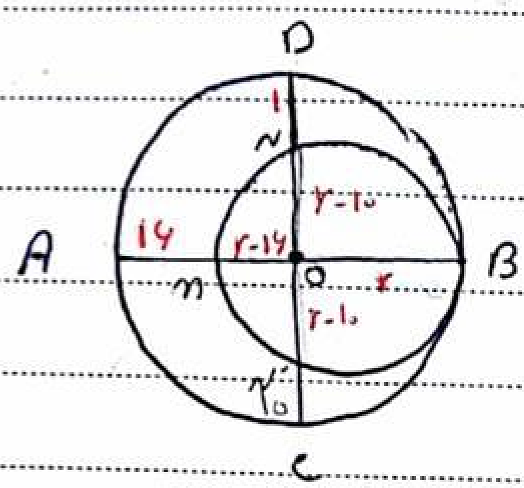
$\Longrightarrow (10\sqrt{3})^2 = x \times (20 + x)$

$\Longrightarrow 300 = 20x + x^2$

$\Longrightarrow x^2 + 20x - 300 \Longrightarrow (x+30)(x-10)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = -30 \; ✗ \\ x = 10 \; ✓ \Longrightarrow \begin{cases} PB = 10 \\ PC = 30 \end{cases} \end{cases}$

در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $Am=16$ و $ND=10$، شعاع های دو دایره را بیابید.



① دایره کوچک: $ON \times ON' = Om \times OB$

$\Longrightarrow (r-10)(r-10) = (r-16)(r)$

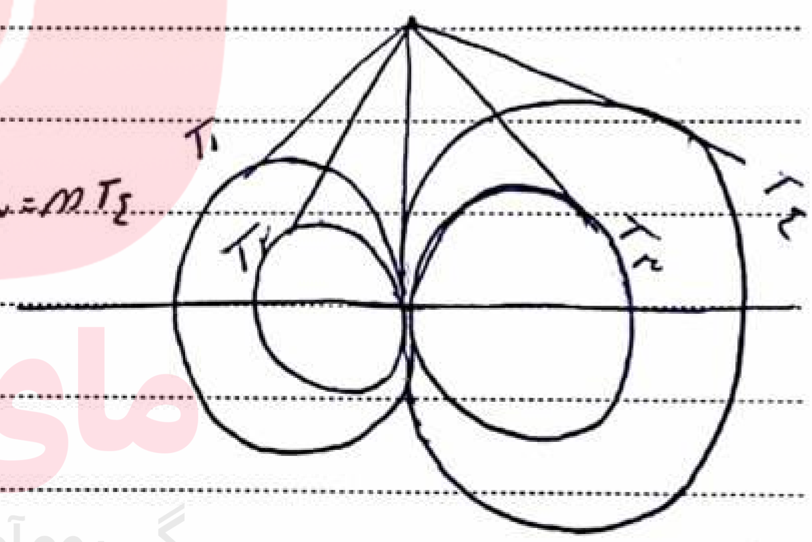
$\Longrightarrow r^2 + 100 - 20r = r^2 - 16r$

$\Longrightarrow 100 = 4r \Longrightarrow r = 25$ شعاع دایره بزرگ

قطر دایره کوچک $Bm = r + r - 16 = 2r - 16 = 50 - 16 = 34$

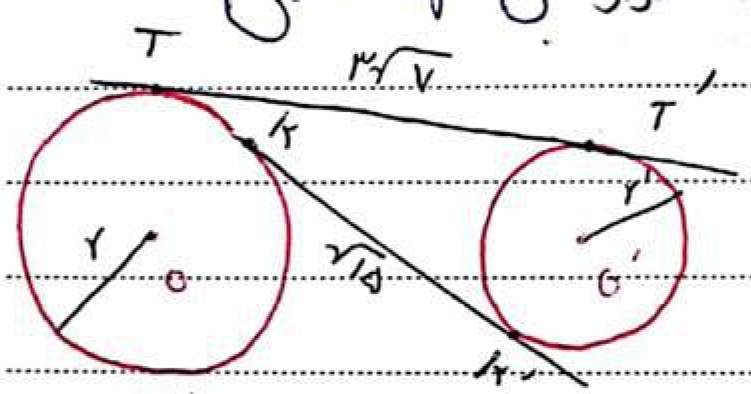
شعاع دایره کوچک $= r' = \frac{34}{2} = 17$

مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T بر هم مماس اند و از نقطه m روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم. ثابت کنید: $mT_1 = mT_2 = mT_3 = mT_4$



طبق قضیه
$$\begin{cases} mT = mT_1 \\ mT = mT_2 \\ mT = mT_3 \\ mT = mT_4 \end{cases} \Longrightarrow mT_1 = mT_2 = mT_3 = mT_4$$

طول شعاع های دو دایره متخارج را بیابید اگر بدانیم طول مماس مشترک خارجی آنها $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی 8 واحد است.



$r > r'$

$TT' = \sqrt{d^2 - (r-r')^2}$

$\Longrightarrow 3\sqrt{7} = \sqrt{8^2 - (r-r')^2}$

$\Longrightarrow 63 = 64 - (r-r')^2$

$\Longrightarrow (r-r')^2 = 1$

$\Longrightarrow \begin{cases} r-r' = 1 \ ✓ \\ r-r' = -1 \ \times \end{cases}$ ①

$KK' = \sqrt{d^2 - (r+r')^2}$

$\Longrightarrow \sqrt{15} = \sqrt{8^2 - (r+r')^2}$

$\Longrightarrow 15 = 64 - (r+r')^2$

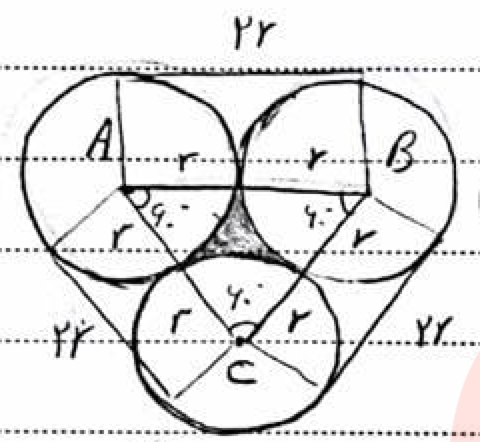
$\Longrightarrow (r+r')^2 = 49$

$\Longrightarrow \begin{cases} r+r' = 7 \ ✓ \\ r+r' = -7 \ \times \end{cases}$ ②

$\overset{①,②}{\Longrightarrow} \begin{cases} r-r' = 1 \\ r+r' = 7 \end{cases} \Longrightarrow 2r = 8 \Longrightarrow r = 4 \Longrightarrow r - r' = 1$

$\Longrightarrow 4 - r' = 1 \Longrightarrow r' = 3$

سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو بر هم مماس اند مطابق شکل مقابل. این سه دایره به وسیله نخی بسته شده است. نشان دهید طول این نخ برابر $6r+2\pi r$ است. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$ محدود است



مساحت سه قطاع $=\frac{1}{2}S_{\text{دایره}} \Rightarrow \frac{1}{2}\pi r^2$

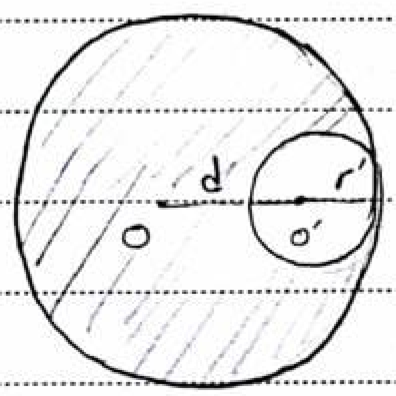
سه قطاع به زاویه ۱۲۰ یک دایره کامل تشکیل می دهند

طول نخ $= 2r+2r+2r+$ محیط دایره
$= 6r+2\pi r$

$\hat{ABC} \Rightarrow$ متساوی الاضلاع $\Rightarrow S_{\text{مثلث}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}4r^2 = \sqrt{3}r^2$

$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\text{مثلث}} - S_{\text{نیم دایره}} = \sqrt{3}r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$

طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی $2cm$، مساحت ناحیه محدود بین آنها $16\pi\, cm^2$ است. طول شعاع های دو دایره را بدست آورید



$d = OO' = 2$

$S_{\text{هاشورخورده}} = 16\pi$

$r = d + r' = 2 + r'$

$S_{\text{دایره بزرگ}} = \pi r^2 = \pi(2+r')^2 = \pi(4 + r'^2 + 4r') = 4\pi + \pi r'^2 + 4\pi r'$

$S_{\text{دایره کوچک}} = \pi r'^2$

$S_{\text{هاشورخورده}} = S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایره کوچک}}$

$= 4\pi + \pi r'^2 + 4\pi r' - \pi r'^2 = 4\pi + 4\pi r' = 4\pi(1+r') = 16\pi$

$\Rightarrow 1 + r' = 4$

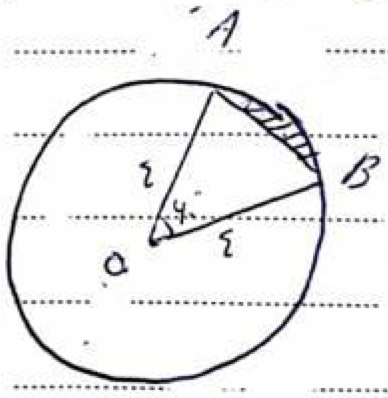
$\Rightarrow r' = 3$

$r = 2 + r' = 2 + 3 = 5$

Subject

Date

مطابق شکل دایره به شعاع ٤، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام ببرید



$S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = \pi (4)^2 = 16\pi$

$6S = 6 \times \frac{1}{2} \times r^2 \times \sin 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} \times (4)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

مثلثِ متساوی الاضلاع

$S_{\text{هاشورخورده}} = \frac{S_{\text{دایره}} - 6S}{6} = \frac{16\pi - 24\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{2}(8\pi - 12\sqrt{3})}{\cancel{6}_{3}}$

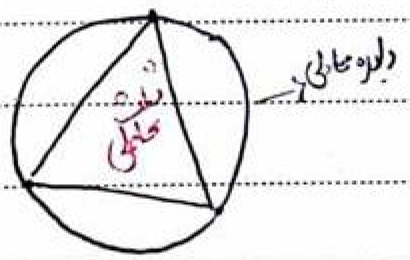
$= \frac{8\pi - 12\sqrt{3}}{3}$

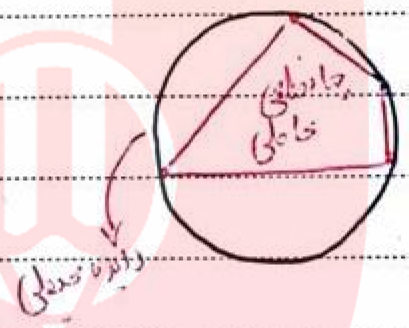
@ Riazi_mahmoodi

درس سوم

چندضلعی های محاطی و محیطی

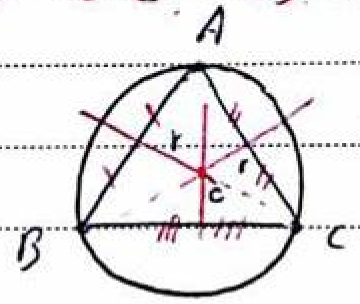
چندضلعی محاطی: چندضلعی را محاطی می گوییم اگر و فقط اگر دایره ای باشد که از همه ی راس های آن بگذرد در این صورت دایره را، دایره ی محیطی آن چندضلعی می نامیم



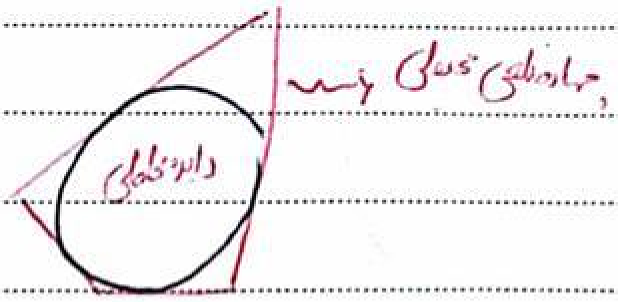


نکته: یک چندضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف های همه ی ضلع های آن از یک نقطه هم رس باشند

نکته ← هر مثلث یک مثلث محاطی است که مرکز دایره ی محیطی آن محل هم رسی عمودمنصف های اضلاع مثلث است

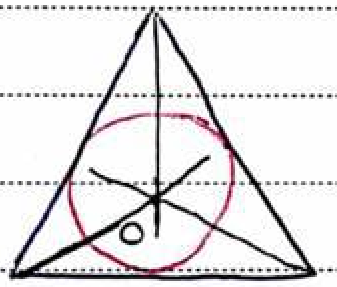


چندضلعی محیطی: چندضلعی را محیطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه‌ی ضلع‌های آن مماس باشد. در این صورت دایره را دایره محاطی این چندضلعی می‌نامیم.



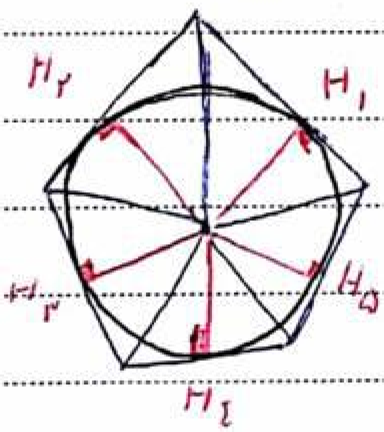
نکته: یک چندضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همه‌ی نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره‌ی محاطی چندضلعی است.

نکته: هر مثلث یک مثلث محیطی است که مرکز دایره محاطی آن محل همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث است.



اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2p$ شعاع دایره‌ی محاطی برابر r باشد نشان دهید $S=rp$

برای ۵ ضلعی ثابت می‌کنیم و به همین طریق برای n ضلعی ثابت می‌شود:



$$OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4 = OH_5 = r$$

$$S_1 = \frac{1}{2} OH_1 \times AE$$

$$S_2 = \frac{1}{2} OH_2 \times AB$$

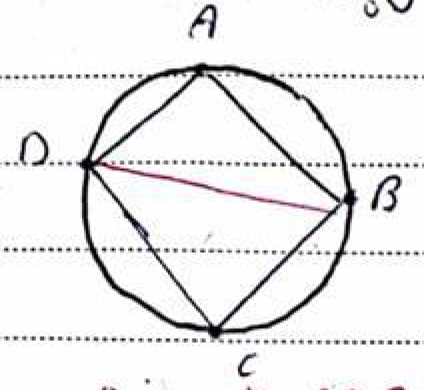
$$S_3 = \frac{1}{2} OH_3 \times BC$$

$$S_4 = \frac{1}{2} OH_4 \times CD$$

$$S_5 = \frac{1}{2} OH_5 \times DE$$

$$S_{\text{۵ضلعی}} = \frac{1}{2} \overbrace{OH_1}^{r} (\overbrace{AE+AB+BC+CD+DE}^{2p}) = rp$$

یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.



فرض: چهارضلعی ABCD محاطی است

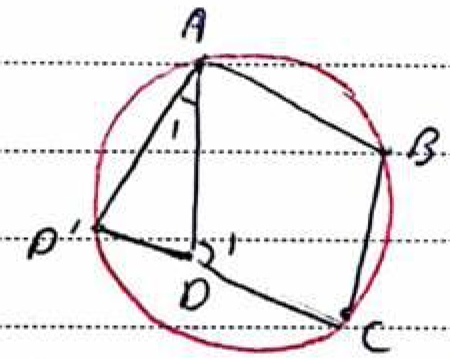
حکم: $\begin{cases} \hat{A}+\hat{C}=180^\circ \\ \hat{B}+\hat{D}=180^\circ \end{cases}$

برهان رفت:

ابتدا از B به D وصل می‌کنیم و $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$ محاطی و $\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$ محاطی

$$\hat{A}+\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}+\frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}}{2}=\frac{360}{2}=180^\circ$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود که $B+D=180^\circ$



فرض: $\begin{cases} A+C=180^\circ \\ B+D_1=180^\circ \end{cases}$

حکم: چهارضلعی ABCD محاطی است

برهان برگشت:

اگر ABCD محاطی باشد که قضیه ثابت است

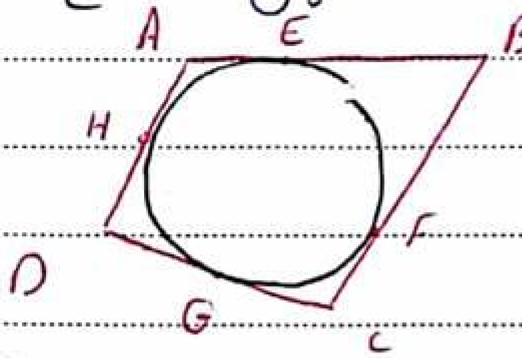
و اگر محاطی نباشد و از سه راس A و B و C حتما یک دایره می‌گذرد (هر مثلث یک دایره محیطی دارد) حال ضلع CD را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D' قطع کند پس $ABCD'$ محاطی است

$$\begin{cases} \hat{B}+\hat{D}'=180^\circ \\ \hat{B}+\hat{D}_1=180^\circ \end{cases} \Longrightarrow \hat{D}_1=\hat{D}' \quad (1)$$

(2) $\hat{D}_1=\hat{A}_1+\hat{D}' \Longrightarrow \hat{D}_1>\hat{D}'$ زاویه خارجی $A\hat{D}D'$

از (1) و (2) به تناقض می‌رسیم و فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی ABCD محاطی است

یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشد



فرض: $ABCD$ محیطی است

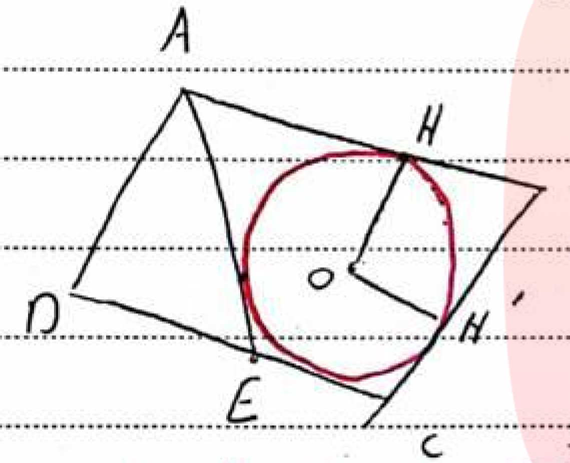
حکم: $AB+CD=AD+BC$

طبق قضیه
$$\begin{cases} AE=AH & (1) \\ BE=BF & (2) \\ CG=CF & (3) \\ DG=DH & (4) \end{cases}$$

$$AB+CD$$
$$=AE+BE+CG+DG$$
$$=\underbrace{AH+BF+CF+DH}_{AD+BC}$$

برهان برعکس: فرض: $AB+CD=AD+BC$

حکم: چهارضلعی $ABCD$ محیطی است



نیمسازهای زاویه‌های B و C را رسم می‌کنیم دایره‌ای به مرکز محل برخورد این نیمسازها رسم می‌کنیم که حتماً بر سه ضلع AB ، BC ، CD مماس است

فرض خلف: می‌کنیم که AD به دایره مماس نباشد پس از A خطی مماس بر دایره رسم می‌کنیم و AE می‌نامیم چون چهارضلعی $ABCE$ محیطی است پس داریم:

$AB+CE=AE+BC$

فرض: $AB+CD=AD+BC$

$\Rightarrow CE-CD=AE-AD$

$\Rightarrow AD=AE-CE+CD$

$\Rightarrow AD=AE+DE$

از طرفی می‌دانیم (نامساوی مثلث) $AD<AE+DE$ پس به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی $ABCD$ محیطی است

چندضلعی منتظم:

کثیرالاضلاعی محدب منتظم می‌نامند هرگاه ضلع‌های آن هم اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم اندازه باشند.

(تمارین صفحه ۲۹_۳۰_۳۱)

تمرین

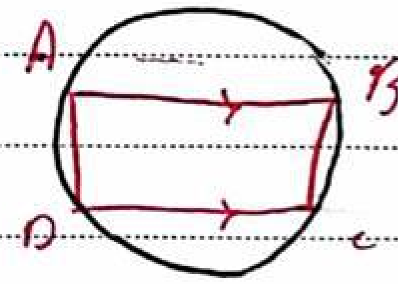
اثبات کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشند.

برهان رفت:

فرض: ذوزنقه محاطی است.

حکم: متساوی الساقین

$$\begin{cases} AD = BC & AB \parallel CD \\ \hat{A} = \hat{B} & \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \\ \hat{C} = \hat{D} & \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} AD = CB \end{cases}$$



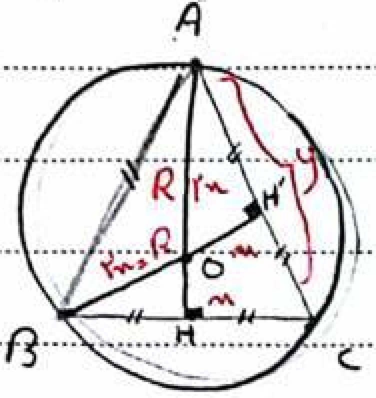
برهان برگشت:

فرض: ذوزنقه متساوی الساقین $\Longrightarrow$

حکم: ذوزنقه محاطی است

$$\begin{cases} AD = BC \\ \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{D} \end{cases} \quad \left.\begin{array}{l} A + D = 180 \xrightarrow{C = D} A + C = 180 \\ A + D = 180 \xrightarrow{A = B} B + D = 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ذوزنقه محاطی است}$$

۲- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را بدست آورید که دایره ای به شعاع R محاط شده باشد



می دانیم در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع، میانه، نیمساز و عمود منصف یکسان هستند همچنین می دانیم که میانه ها یکدیگر را به نسبت ۲ و ۱ قطع می کنند

$2x = R \Rightarrow x = \frac{R}{2}$

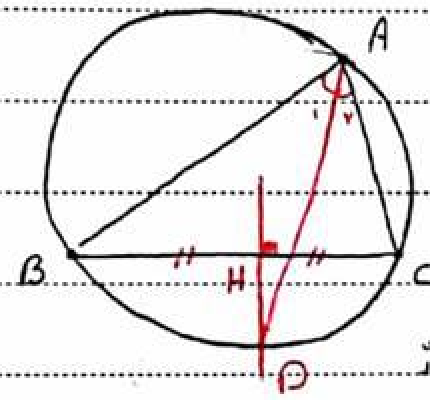
ارتفاع مثلث $AH = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$

$$y^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}R\right)^2 \Rightarrow y^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{9R^2}{4}$$

$$\Rightarrow y^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{9R^2}{4} \Rightarrow \frac{3y^2}{4} = \frac{9R^2}{4} \Rightarrow y^2 = 3R^2 \Rightarrow y = \sqrt{3}R$$

$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}R \times \sqrt{3}R = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

۳- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند



نیمساز زاویه A را رسم می کنیم که محل برخورد نیمساز و دایره محیطی را D می نامیم (نشان می دهیم) که عمود منصف ضلع BC نیز از نقطه D می گذرد

نیمساز $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \xrightarrow{\text{زاویه محاطی}} \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD} \xrightarrow[\text{قضیه}]{\text{طبق}} BD = CD$

چون فاصله D تا دوسر پاره خط BC به یک اندازه است پس D روی عمود منصف پاره خط BC قرار دارد

۴- یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده ضرب در میانگین هندسی آنها

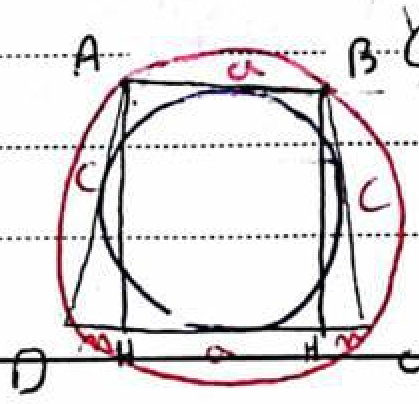
$AB = a$

$CD = b$

$AD = BC = c$

طبق قضیه $AB + CD = AD + BC \Rightarrow a + b = 2c \Rightarrow a + b = 2c \Rightarrow \frac{a+b}{2} = c$

$$b = a + 2x \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$$



فیثاغورس $\overset{\triangle}{ADH}: AH^2 + DH^2 = AD^2 \Rightarrow AH^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow AH^2 + \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{4} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow AH = \sqrt{ab}$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2} = \frac{(a+b)AH}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)}{2} \times \sqrt{ab}$$

ت - اگر r_a ، r_b ، r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد نشان دهید $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$

و به همین ترتیب اگر h_a ، h_b ، h_c اندازه سه ارتفاع باشند نشان دهید $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$

شکل صفحه ۲۶ کتاب

الف)

$S=S_{A\hat{B}C}$ مساحت مثلث

$p=\frac{1}{2}P_{A\hat{B}C}$ نصف محیط مثلث

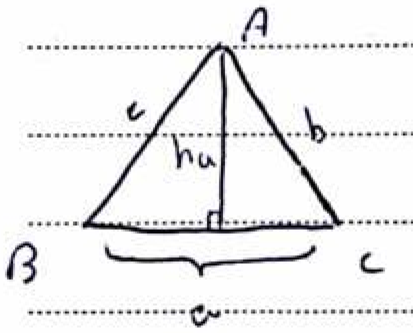
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S}$$

$$=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r} \quad (1)$$

$$S=rp \Longrightarrow r=\frac{S}{p} \Longrightarrow \frac{1}{r}=\frac{p}{S} \Longrightarrow S=r_a(p-a)$$

$$r_a=\frac{S}{p-a} \Longrightarrow \frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S}$$

ب)



$$S=\frac{1}{2}h_a\cdot a \Longrightarrow h_a=\frac{2S}{a} \Longrightarrow \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}$$

$$h_b=\frac{2S}{b} \Longrightarrow \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}$$

$$h_c=\frac{2S}{c} \Longrightarrow \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$$

Subject

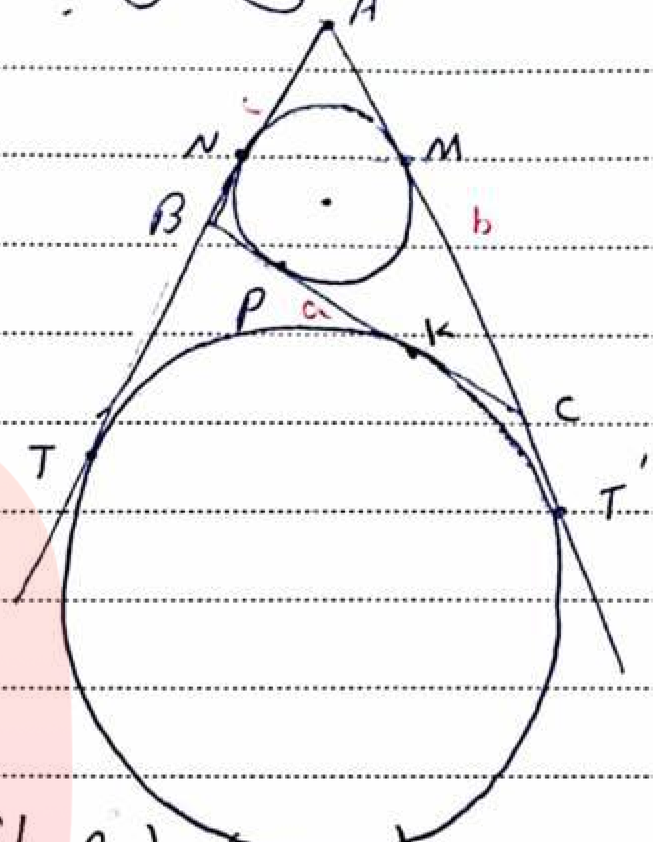
Date

۶- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N، P باشند و T، T' نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند نشان دهید

$AM = AN = p - a$

$BN = BP = p - b \ , \ CM = CP = p - c$

$AT = AT' = p$



$AM = AN = p - a$

$2p = a + b + c$

$\Rightarrow 2p = AM + CM + BP + CP + AN + BN$

$\Rightarrow 2p = 2AM + 2CM + 2BN$

$\Rightarrow 2p = 2(AM + CM + BN)$

$\Rightarrow p = (AM + CM + BN)$

$\Rightarrow AM = p - CM - BN \quad \Rightarrow AM = p - (b - AM) - (c - AN)$

$\Rightarrow \cancel{AM} = p - b + \cancel{AM} - c + AM$

$\Rightarrow AM = b + c - p$

$\Rightarrow AM = 2p - a - p \Rightarrow AM = p - a$

$BN = BP = p - a$

$BN + BP = c - AN + a - CP \xrightarrow{BN = BP} 2BN = c + a - (AN + CP)$

$\xrightarrow[CP = CM]{AN = AM} 2BN = c + a - (AM + CM)$

$\Rightarrow 2BN = c + a - b + b - b$

$\Rightarrow 2BN = 2p - 2b$

$\Rightarrow 2BN = 2(p - b) \Rightarrow BN = p - b$

$AT = AT' = p$

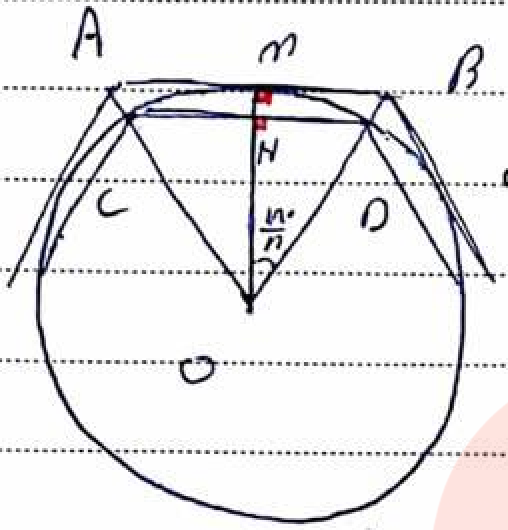
$AT + AT' = c + BT + b + CT' \xrightarrow{AT = AT'} 2AT = b + c + (BT + CT')$

$\Rightarrow 2AT = b + c + (BK + CK)$

$\Rightarrow 2AT = b + c + a$

$\Rightarrow 2AT = 2p \Rightarrow AT = p$

۷. یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در آن رسم کرده ایم. نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلعی های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند آنگاه $CD=2r\sin\frac{180}{n}$ و $AB=2r\tan\frac{180}{n}$



شعاع $OD=r$ ، شعاع $OM=r$

$O\hat{M}B:\ \hat{M}=90^\circ \Rightarrow \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)=\frac{BM}{OM}$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)=\frac{\frac{AB}{2}}{r} \Rightarrow AB=2r\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

$O\hat{H}D:\ \hat{H}=90^\circ \Rightarrow \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)=\frac{DH}{OH}$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)=\frac{\frac{CD}{2}}{r}$

$\Rightarrow CD=2r\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

۸. شش ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی مطابق شکل مثلث MNP را ساخته ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی دو سوم مساحت مثلث MNP است.

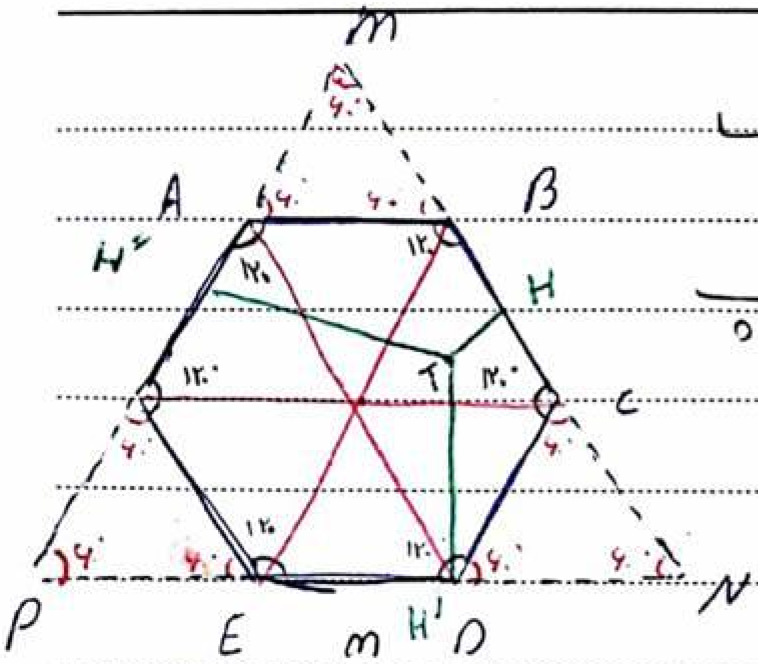
پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH و TH' و TH'' را بر اضلاع BC و ED و AF رسم کرده. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱۰ می دانید مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت های مثلث های TBC و TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$

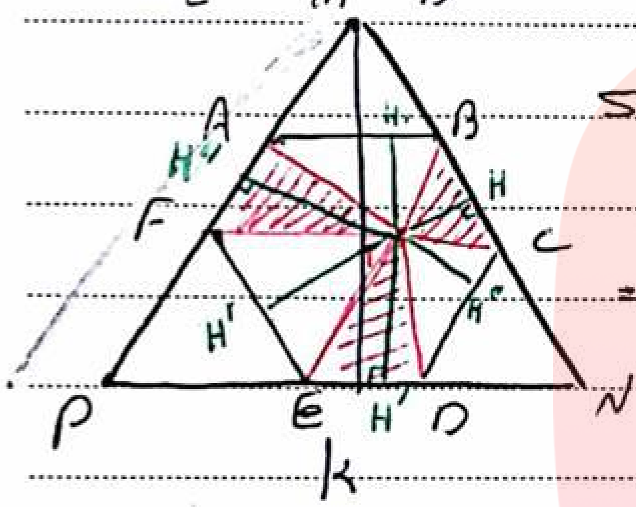
الف) مجموع زوایای داخلی ۶ ضلعی = $4\times180=720$

هر زاویه ۶ ضلعی منتظم = $\frac{720}{6}=120^\circ$



ب) $\frac{S_{\text{۶ضلعی}}}{S_{\text{مثلث}}} = \frac{\text{۶}S_{\text{مثلث کوچک}}}{\text{۹}S_{\text{مثلث}}} = \frac{2}{3}$

پ) $TH + TH' + TH'' = mk$



ت) $S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$

$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF}$

$= \frac{1}{2} TH \times BC + \frac{1}{2} TH' \times \underbrace{DE}_{BC} + \frac{1}{2} TH'' \times \underbrace{AF}_{BC}$

$= \frac{1}{2} BC (TH + TH' + TH'') = \frac{1}{2} BC \times mk$

$$\frac{S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF}}{S_{mNP}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times mk}{\frac{1}{2} PN \times mk} = \frac{BC}{PN} = \frac{BC}{3BC} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{PN = PE + ED + DN \Rightarrow PN = BC + BC + BC \Rightarrow PN = 3BC}$

۹) دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم کنید. چهار ضلعی $ABCD$ مربع است چرا؟ عمود منصف های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.

شکل صفحه ۳۱

Subject

Date

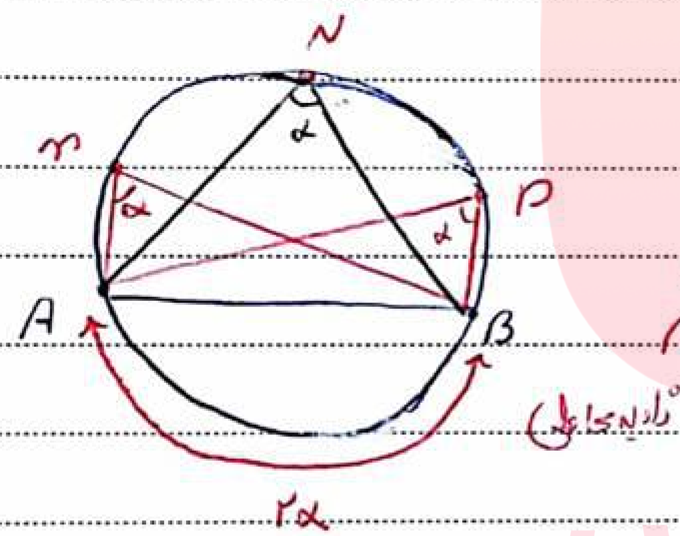
$OM = OD = ۳$, $OA = OC = ۳$ $\Rightarrow$ قطرها با هم برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند $\Rightarrow$ ABCD مستطیل است

همچنین قطرها علاوه بر نصف شدن عمود هم هستند پس ABCD لوزی هم هستند

یعنی ABCD مربع است

طبق قضیه $\Rightarrow \overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{PD} = \overset{\frown}{PC} = \overset{\frown}{CQ} = \overset{\frown}{BQ}$

طبق قضیه $\Rightarrow BM = AM = AN = DN = PD = PC = CQ = PC \Rightarrow$ هشت ضلعی



زاویه‌ی دیدگان شامل (حالی)

کمان [illegible]

$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \dots = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \alpha$

@Riazi_mahmoodi