حسابان

فصل ۴

گروه آموزشی عصر

ASR_Group @ outlook.com

@ASRschool2

همسایگی یک نقطه

❖ **اگر a عددی حقیقی و δ یک عدد مثبت باشد، بازه‌ی $(a-\delta,a+\delta)$ را یک همسایگی a می‌نامند (a مرکز و δ شعاع همسایگی نام دارند). اگر a را از این همسایگی حذف کنیم، آن را یک همسایگی محذوف a می‌نامند.**

مثال: هر یک از بازه‌های $(۱,۳)$، $(۰,۴)$ و $(۱/۹,۲/۱)$ یک همسایگی ۲ هستند.

مثال: هر یک از مجموعه‌های $(۱,۳)-\{۲\}$، $(۰,۲)\cup(۲,۴)$ و $\{x \mid ۱/۹ < x < ۲/۱,\ x \neq ۲\}$ یک همسایگی محذوف ۲ هستند.

مثال: اگر $(۳k-۲,k+۴)$ یک همسایگی ۳ باشد، a و δ را به دست آورید.

حل:

عدد ۳ نقطه‌ی وسط بازه است، پس

$$۳=\frac{(۳k-۲)+(k+۴)}{۲}\Rightarrow ۴k+۲=۶\Rightarrow k=۱$$

بنابراین همسایگی به صورت $(۱,۵)$ در می‌آید و $a=\frac{۱+۵}{۲}=۳$ و $\delta=۳-۱=۲$.

مثال: اگر مجموعه‌ی $(-۳,y)\cup(۲,x^۲+۱)$ نمایشگر یک همسایگی محذوف باشد، حاصل $۳x^۲+y$ را به دست آورید؟

حل:

ابتدا طوری دو بازه را می‌نویسیم که اعداد از کوچک به بزرگ مرتب شوند و داریم $y=۲$. چون همسایگی محذوف ۲ است، باید:

$$۲=\frac{-۳+x^۲+۱}{۲}\ \Rightarrow\ x^۲-۲=۴\ \Rightarrow\ x=\pm\sqrt{۶}$$

بنابراین داریم:

$$۳x^۲+y=۳(\pm\sqrt{۶})^۲+۲=۲۰$$

مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی محذوف a را نمایش می‌دهند؟

الف) $\{x\in\Re \mid ۰<|x-a|<\delta\}$ ب) $\{x\in\Re \mid |x-a|<\delta\}$

حل: الف)

$$۰<|x-a|<\delta\ \Rightarrow\begin{cases}|x-a|<\delta\\ |x-a|\neq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\delta<x-a<\delta\\ x-a\neq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-\delta<x<a+\delta\\ x\neq a\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$$

بنابراین یک همسایگی محذوف a را نمایش می‌دهد.

ب)

$$|x-a|<\delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$$

بنابراین یک همسایگی a هست ولی همسایگی محذوف a نیست.

تمرین:

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی را نمایش می‌دهند. مرکز، شعاع و نوع آن را مشخص کنید؟

الف) $\{x : |x-۲| < ۳\}$ ب) $\{x : |x-۲| \le ۳\}$

ج) $\{x : \ |x-۱| > ۴\}$ د) $\left\{x : \dfrac{۱}{|x|} < ۲\right\}$

هـ) $\left\{x : \dfrac{۱}{|x|} > ۲\right\}$ و) $\left\{x : \dfrac{۳-x}{x-۲} > ۰\right\}$

ز) $\{x : \sin^{-۱} x \in \Re\}$

همسایگی چپ و راست یک نقطه

❖ **اگر a عددی حقیقی و δ یک عدد مثبت باشد، بازه به صورت $(a-\delta, a)$ را یک همسایگی چپ a و بازه به صورت $(a, a+\delta)$ را یک همسایگی راست a می‌نامیم.**

مثال: هر یک از بازه‌های $(۳,۳/۱)$ و $(۳,۴)$ و $(۳,۵)$ یک همسایگی راست ۳ و هر یک از بازه‌های $(۲/۹,۳)$ و $(۲,۳)$ و $(-۱,۳)$ یک همسایگی چپ ۳ هستند.

مثال: همسایگی $(۲,۳)\cup(۳,۴)$ در واقع از اجتماع یک همسایگی چپ ۳ یعنی $(۲,۳)$ و یک همسایگی راست ۳ یعنی $(۳,۴)$ تشکیل شده است.

تمرین:

۱- آیا مجموعه‌های زیر یک همسایگی راست ۲ هستند؟

الف) $(۲,\sqrt{۵})$ ب) $(۲,\pi)$

ج) $(\sqrt{۵},\sqrt{۷})$

۲- آیا مجموعه‌های زیر یک همسایگی چپ ۱- هستند؟

الف) $(-\frac{\pi}{۳},-۱)$ ب) $[-۲,-۱)$

ج) $(-۳,-۱]$

❖ **اگر I یک همسایگی نقطه‌ی a باشد، گوییم تابع f در همسایگی I تعریف شده است، هرگاه $I \subseteq D_f$.**

مثال: تابع $y=\sqrt{x}$ در کدام‌یک از همسایگی‌های زیر تعریف شده است.

الف) $(۲,۳)$ ب) $(۰,۴)$

ج) $(-۲,۱)$ د) $(-۱,-۳)$

حل:

می‌دانیم $D_f=[۰,+\infty)$ پس داریم:

الف) $(۲,۳)\subseteq D_f$، پس تابع در همسایگی $(۲,۳)$ تعریف شده است.

ب) $(۰,۴)\subseteq D_f$، پس تابع در همسایگی $(۰,۴)$ تعریف شده است.

ج) $(-۲,۱)\not\subseteq D_f$، پس تابع در همسایگی $(-۲,۱)$ تعریف نشده است.

د) $(-۱,-۳)\not\subseteq D_f$ پس تابع در همسایگی $(-۱,-۳)$ تعریف نشده است.

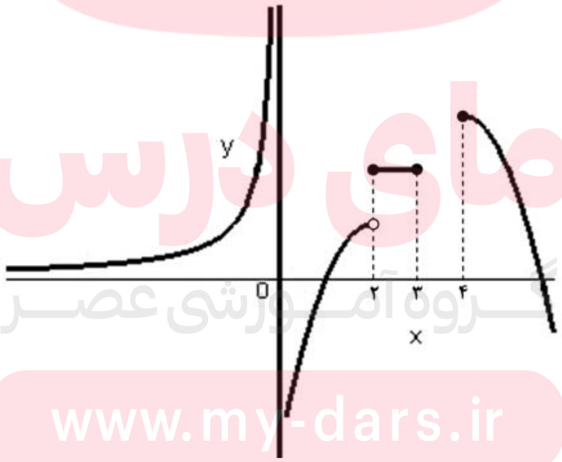
مثال: تابع $y=\sqrt{x-۱}$ در کدام‌یک از همسایگی‌های عدد یک تعریف شده است.

الف) $(۱,۱+\delta)$ ب) $(۱-\delta,۱+\delta)$ ج) $(۱-\delta,۱)$

حل:

می‌دانیم $D_f=[۱,+\infty)$ پس δ هر عدد مثبتی که باشد تابع در همسایگی $(۱,۱+\delta)$ تعریف شده است. ولی به ازای هیچ مقدار مثبتی از δ در همسایگی‌های $(۱-\delta,۱+\delta)$ و $(۱-\delta,۱)$ تعریف نشده است.

مثال: نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار مشخص کنید تابع f در کدام‌یک از همسایگی‌های زیر تعریف شده است.



الف) $(-۳,-۱)$ ب) $(-۲,۲)$

ج) $(۱,۲)$ د) $(۰,۳)$

هـ) $(۰,۷)$ و) $(۳,۴)$

ز) $(۲,۳)$

حل:

با توجه به شکل داریم:

$$D_f=(-\infty,۰)\cup(۰,۳]\cup[۴,+\infty)$$

بنابراین تابع در همسایگی‌های $(-۳,-۱)$، $(۱,۲)$، $(۰,۳)$ و $(۲,۳)$ تعریف شده ولی در همسایگی‌های $(-۲,۲)$، $(۰,۷)$ و $(۳,۴)$ تعریف نشده است.

تمرین:

بررسی کنید آیا تابع f در همسایگی داده شده تعریف شده است؟

الف) $f(x)=\sin^{-1}x \quad ,(-۱,۱)$

ب) $f(x)=\sqrt{۹-x^۲} \quad ,(-۳,۳)$

ج) $f(x)=\tan^{-1}x \quad ,(-\pi,\pi)$

د) $f(x)=\cos^{-1}x \quad ,(-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳})$

هـ) $f(x)=\frac{۲}{[x]-۱} \quad ,(۰,۲)$

و) $f(x)=\log_{۰/۱}^{x} \quad ,(۰,۲)$

ز) $f(x)=\log_{x}^{۳} \quad ,(۰,۳)$

❖ **وقتی می‌گوییم متغیر مستقل x به عدد ثابت a نزدیک می‌شود. یعنی هر اندازه که بخواهیم متغیر x به a نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه مساوی a نمی‌شود. به بیان دیگر به ازای هر عدد دلخواه و مثبت مانند ε داریم:**

$$۰<|x-a|<\varepsilon$$

مثال: با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد ۲ نمایش دهید.

حل:

... ۱/۹ ... ۱/۹۹ ... ۱/۹۹۹ ...	۲	... ۲/۰۰۱ ... ۲/۰۱ ... ۲/۱ ...

مثال: با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد ثابت ۲- نمایش دهید.

... $-۲/۱$ ... $-۲/۰۱$ ... $-۲/۰۰۱$ ...	-۲	... $-۱/۹۹۹$ ... $-۱/۹۹$ ... $-۱/۹$ ...

تمرین:

۱- اگر به ازای هر $\varepsilon>۰$، متغیر x در نامساوی $۰<|x-۲|<\varepsilon$ صدق کند متغیر x به چه عددی نزدیک شده است.

۲- با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن، مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد $-\frac{۱}{۳}$ نمایش دهید.

۳- با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن، مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد $\sqrt{۲}$ نمایش دهید.

❖ **برای یک تابع f اگر مقادیر متغیر مستقل x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقادیر $f(x)$ به عددی مانند l نزدیک می‌شوند (ممکن است مساوی l هم بشوند)، گوییم تابع f در نقطه‌ی a حد دارد و حد آن برابر l است و می‌نویسیم:**

$$\lim_{x\to a} f(x)=l$$

مثال: با رسم یک جدول، حاصل حد تابع $f(x)=۲x+۳$ را در $x=۵$ محاسبه کنید.

حل:

x	... ۴/۹ ... ۴/۹۹ ... ۴/۹۹۹ ...	۵	... ۵/۰۰۱ ... ۵/۰۱ ... ۵/۱ ...
$f(x)$	... ۱۲/۸ ... ۱۲/۹۸ ... ۱۲/۹۹۸ ...	۱۳	... ۱۳/۰۰۲ ... ۱۳/۰۲ ... ۱۳/۲ ...

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود با نزدیک شدن مقادیر متغیر x به عدد ۵، مقادیر تابع f به عدد ۱۳ نزدیک می‌شوند و داریم:

$$\lim_{x\to ۵}(۲x+۳)=۱۳$$

توجه: تابع f در $x=۵$ تعریف شده است و $f(۵)=۱۳$ می‌باشد.

مثال: با رسم یک جدول، حاصل حد تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}$ را در $x=۲$ محاسبه کنید.

حل:

x	... ۱/۹ ... ۱/۹۹ ... ۱/۹۹۹ ...	۲	... ۲/۰۰۱ ... ۲/۰۱ ... ۲/۱ ...
$f(x)$	... ۳/۹ ... ۳/۹۹ ... ۳/۹۹۹ ...	؟	... ۴/۰۰۱ ... ۴/۰۱ ... ۴/۱ ...

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود، با نزدیک شدن مقادیر متغیر x به عدد ۲، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند و داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}=۴$$

توجه: تابع f در $x=۲$ تعریف نشده است ولی حد دارد.

مثال: با رسم یک جدول، رفتار تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ را وقتی متغیر x به عدد یک نزدیک می‌شود، بررسی کنید.

حل:

x	... ۰/۹ ... ۰/۹۹ ... ۰/۹۹۹ ...	۱	... ۱/۰۰۱ ... ۱/۰۱ ... ۱/۱ ...
$f(x)$	... ۱۰− ... ۱۰۰− ... ۱۰۰۰− ...	؟	... ۱۰۰۰ ... ۱۰۰ ... ۱۰ ...

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود، وقتی متغیر x به عدد یک نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به هیچ عددی نزدیک نمی‌شوند و از نظر قدر مطلق مرتباً افزایش می‌یابند. بنابراین می‌گوییم تابع f در $x=۱$ حد ندارد.

توجه: تابع f در $x=۱$ نه تعریف شده و نه حد دارد.

تمرین:

با رسم جدول حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}(۲x-۱)$

ب) $\lim\limits_{x\to -۳}\frac{۲}{x+۳}$

ج) $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x$

د) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۱-x}{x^{۲}-۳x+۲}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۱۰}\log x$

❖ **شرط لازم برای آن که بتوان در مورد حد تابع f در $x=a$ صحبت کرد، آن است که تابع f دست کم در یک همسایگی a تعریف شده باشد.**

مثال: در کدام‌یک از توابع زیر، می‌توان از حد تابع f در نقطه‌ی داده شده، صحبت کرد.

الف) $f(x)=\frac{۱}{[x]}, \quad x=\frac{۱}{۲}$

ب) $f(x)=x-[x], \quad x=۲$

ج) $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x<۱ \\ ۱-x & x>۱ \end{cases}, x=۱$

حل: الف)

با توجه به این که $D_f=(-\infty,۰)\cup[۱,+\infty)$، پس تابع f در هیچ همسایگی $\frac{۱}{۲}$ تعریف نشده است. یعنی نمی‌توان از حد تابع f در $x=\frac{۱}{۲}$ صحبت کرد.

ب)

با توجه به این که $D_f = \Re$، پس می‌توان در مورد حد تابع در $x = ۲$ صحبت کرد.

ج)

با توجه به این که $D_f = \Re - \{۱\}$، پس می‌توان وجود حد تابع در $x = ۲$ را بررسی کرد:

x	... ۰/۹ ... ۰/۹۹ ... ۰/۹۹۹ ...	۱	... ۱/۰۰۱ ... ۱/۰۱ ... ۱/۱ ...
$f(x)$	... −۰/۱ ... −۰/۰۱ ... −۰/۰۰۱ ...	؟	... −۰/۰۰۱ ... −۰/۰۱ ... −۰/۱ ...

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود داریم:

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = ۰$$

توجه: تابع f در $x = ۱$ تعریف نشده است ولی حد دارد.

تمرین:

در کدام‌یک از توابع زیر، می‌توان در مورد وجود یا عدم وجود حد تابع در نقطه‌ی داده شده، صحبت کرد؟

الف) $x = ۲$, $f(x) = \dfrac{x+۱}{x-۲}$

ب) $x = -۱$, $f(x) = \sqrt[۳]{x+۱}$

ج) $x = -۱$, $f(x) = \sqrt{x}$

د) $x = ۲$, $f(x) = \dfrac{۱}{|x-۱| + |x-۳|}$

هـ) $x = ۳$, $f(x) = \dfrac{۴}{[x] + [-x]}$

❖ **در تابع f اگر متغیر x با مقدارهای بزرگ‌تر از عدد a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند l نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول a حد راست دارد و می‌نویسیم:**

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

مثال: با رسم جدول، اگر $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ حاصل $\lim_{x \to ۰^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

حل:

x		۰	... −۰/۰۰۱ ... −۰/۰۱ ... −۰/۱ ...
$f(x)$		؟	... ۱ ... ۱ ... ۱ ...

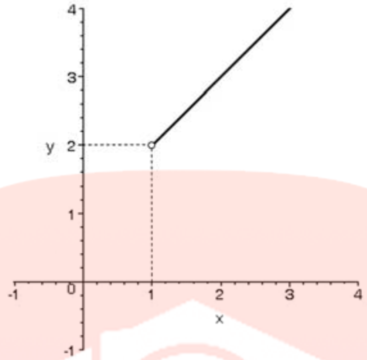
بنابراین داریم:

$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{|x|}{x} = ۱$$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}3-x & x<1\\ 3 & x=1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ ، مقدار $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ را با استفاده از رسم نمودار تابع محاسبه کنید.

حل:

نمودار تابع f در فاصله‌ی $(1,+\infty)$ به صورت زیر است.



همان‌گونه که از نمودار مشاهده می‌شود با نزدیک شدن مقادیر x از طرف راست (مقادیر بزرگ‌تر از یک) به یک، مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$$

تمرین:

با استفاده از جدول یا نمودار، حد راست هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی خواسته شده محاسبه کنید.

الف) $x=-\frac{\pi}{2}\ ,\quad f(x)=\cos x$

ب) $x=\pi\ ,\quad f(x)=\begin{cases}x-1 & x<\pi\\ 4 & x=\pi\\ 2x & x>\pi\end{cases}$

ج) $x=1\ ,\quad f(x)=\frac{x^2+2}{x+1}$

د) $x=4\ ,\quad f(x)=\log_2^x$

هـ) $x=2\ ,\quad f(x)=\sqrt[3]{x+7}$

و) $x=-1\ ,\quad f(x)=\sin^{-1}x$

ز) $x=-1\ ,\quad f(x)=\cos^{-1}x$

❖ **در تابع f اگر متغیر x با مقدارهای کوچک‌تر از عدد a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند k نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول a حد چپ دارد و می‌نویسیم:**

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=k$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ، با رسم جدول حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

حل:

x	$\dots -۰/۱ \dots -۰/۰۱ \dots -۰/۰۰۱ \dots$	۰	
$f(x)$	$\dots -۱ \dots -۱ \dots -۱ \dots$	؟	

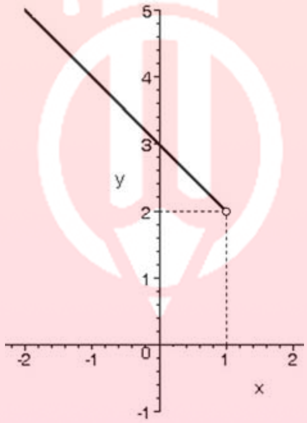
بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}=۱$$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} ۳-x & x<۱ \\ ۳ & x=۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ را با استفاده از رسم نمودار تابع محاسبه کنید.

حل:

نمودار تابع f در فاصله‌ی $(-\infty,۱)$ به صورت زیر است.



همان‌گونه که از نمودار مشاهده می‌شود با نزدیک شدن مقادیر x از طرف چپ (مقادیر کوچک‌تر از یک) به یک، مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۲$$

تمرین:

با استفاده از جدول یا نمودار، حد چپ هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی خواسته شده در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $f(x)=x^۲-۴x \quad , x=۲$

ب) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<-۱ \\ ۳ & x=-۱ \\ x-۱ & x>-۱ \end{cases} \quad , x=-۱$

ج) $f(x)=\frac{۱}{[x]} \quad , x=۰$

د) $f(x)=\log x \quad , x=۱۰$

هـ) $f(x)=\cos^{-۱} x \quad , x=۱$

و) $f(x)=\sin^{-۱} x \quad , x=۱$

ز) $, x=3 \qquad f(x)=\frac{9-x^2}{x-3}$ ‌ ‌ ‌ ‌ ح) $, x=\frac{\pi}{2} \qquad f(x)=\sin x$

❖ **اگر حدهای چپ و راست تابع در نقطه‌ای مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار حد چپ و راست در آن نقطه است.**

مثال: ابتدا نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس با استفاده از نمودار، حدهای چپ و راست و حد تابع را در صورت وجود در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

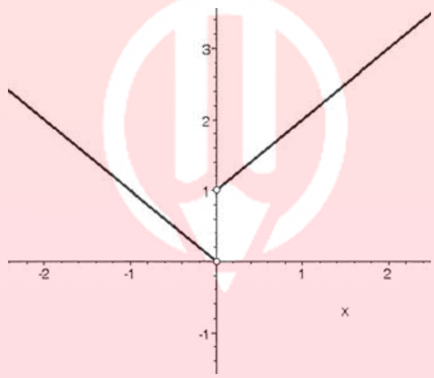
الف) $, x=0 \qquad f(x)=\begin{cases} -x & x<0 \\ 3 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$

ب) $, x=1 \qquad f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

ج) $, x=2 \qquad f(x)=[x]$

حل: الف)

نمودار تابع به صورت زیر است.

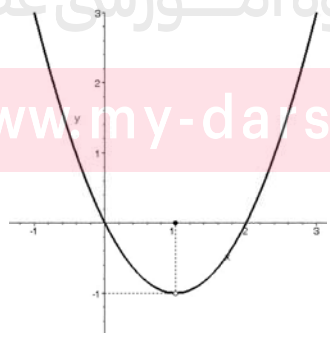


با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

ب)

نمودار تابع به صورت زیر است.

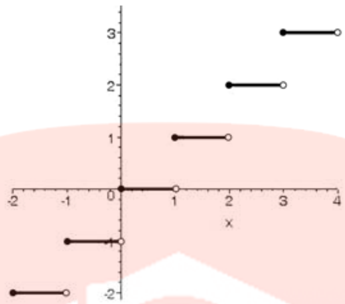


با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = -۱ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x) = -۱$$

ج)

نمودار تابع به صورت زیر است.

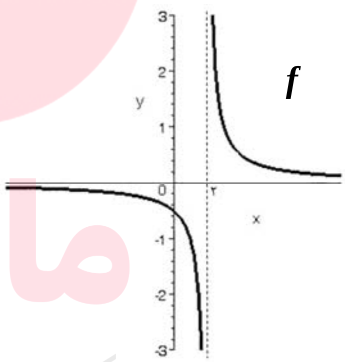


با توجه به نمودار داریم:

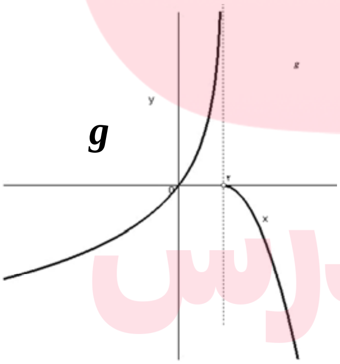
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۲ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

مثال: نمودار توابع f ، g و h به صورت زیر رسم شده است. با استفاده از نمودار، حد توابع f ، g و h را در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ محاسبه کنید.

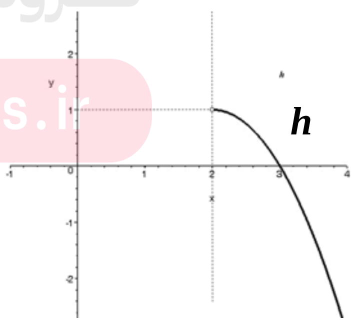
الف)



ب)



ج)



حل: الف)

با توجه به نمودار تابع در $x = ۲$ از چپ حد ندارد و از راست نیز حد ندارد. بنابراین تابع در $x = ۲$ حد ندارد.

ب)

تابع g در $x = ۲$ از چپ حد ندارد ولی $\lim\limits_{x \to ۲^+} g(x) = ۰$. بنابراین g در $x = ۲$ حد ندارد.

ج)

به دلیل عدم تعریف تابع h در یک همسایگی چپ ۲، بحث از وجود حد چپ در این نقطه معنادار نیست.
در واقع منظور از حد تابع h در $x = ۲$ همان حد راست تابع h در $x = ۲$ است. یعنی:

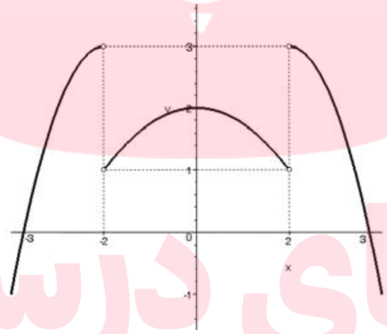
$$\lim_{x \to ۲} h(x) = ۱$$

مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + x & x > ۲ \\ ax + b & x < ۲ \end{cases}$ در $x = ۲$ دارای حد باشد، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است.

حل:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to ۲^+} f(x) &= \lim_{x \to ۲^+} (x^۲ + x) = ۶ \\ \lim_{x \to ۲^-} f(x) &= \lim_{x \to ۲^-} (ax + b) = ۲a + b \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۲a + b = ۶ \Rightarrow b = ۶ - ۲a$$

مثال: نمودار تابع زوج f به صورت زیر رسم شده است.



با توجه به نمودار، حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to -۲^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x \to -۳} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x \to -۲^+} f(x)$

حل:

با توجه به این که f تابعی زوج است، نمودار آن نسبت به محور yها متقارن است. بنابراین داریم:

الف) $\lim\limits_{x \to -۲^-} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲^+} f(x) = ۳$

ب) $\lim\limits_{x \to -۳} f(x) = \lim\limits_{x \to ۳} f(x) = ۰$

ج) $\lim\limits_{x \to -۲^+} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = ۱$

تمرین:

۱- اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲a & x\geq ۱ \\ ax-۱ & x<۱ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)-\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=-۱$ ، مقدار a را به دست آورید.

(سراسری ریاضی ۸۶)

۲- در تابع $f(x)=\begin{cases} -۱ & x\in Z \\ ۰ & x\in \Re - Z \end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)+\lim\limits_{x\to (\frac{۱}{۲})^{-}} f(x)$ چقدر است؟

(آزاد پزشکی ۸۱)

۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} (x+a)^{۲} & x\geq -۱ \\ ۲x+۱ & x<-۱ \end{cases}$ در $x=-۱$ حد دارد.

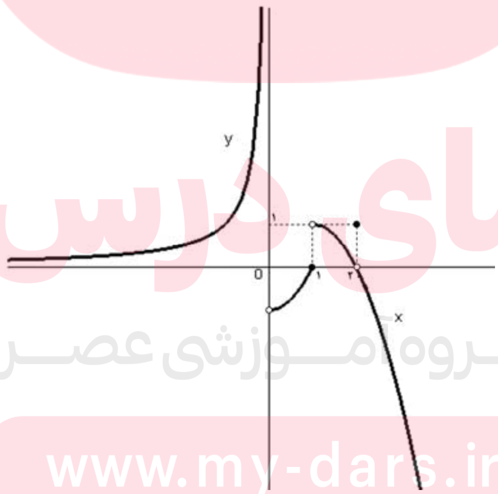
(سراسری تجربی ۸۰)

۴- در هر یک از قسمت‌های زیر با استفاده از نمودار یا جدول، حدود چپ و راست و حد تابع را در نقاط مشخص شده در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲x & x<۰ \\ x+۱ & x\geq ۰ \end{cases}$ $\quad x=۰,\ x=۱$

ب) $f(x)=\begin{cases} x-۲ & x\leq ۱ \\ ۳ & ۱<x<۴ \\ x+۱ & x\geq ۴ \end{cases}$ $\quad x=۱,\ x=۴,\ x=\frac{\pi}{۲},\ x=\pi,\ x=۲\pi$

۵- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را در صورت امکان مشخص کنید.



$f(۰)=$ $\quad f(۱)=$ $\quad f(۲)=$

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=$ $\quad \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=$ $\quad \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=$ $\quad \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=$ $\quad \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$

۶- اگر f تابعی فرد با دامنه‌ی $[-۳,۳]$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۲$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

۷- اگر f تابعی فرد با دامنه‌ی $(-۲,۲)$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۵$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

۸- اگر f تابعی زوج با دامنه‌ی $\Re$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۳$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

۹- اگر f تابعی زوج با دامنه‌ی $\Re$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=-۱$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۰- نمودار تابعی رسم کنید که دارای همه‌ی شرایط زیر باشد.

$D_f=[-۳,۲) \quad , \quad f(۰)=۴ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=۲ \quad , \quad \lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=۳ \quad , \quad f(-۱)=۲$

❖ تابع ثابت $f(x)=c$ در همه‌ی نقاط حد دارد و حد آن در همه‌ی نقاط c است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} c = c$$

❖ تابع $f(x)=x$ در همه‌ی نقاط حد دارد و حد آن در هر نقطه به طول a برابر a است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال:

الف) $\lim_{x\to ۳} ۲ = ۲$ ب) $\lim_{x\to \pi} ۲ = ۲$ ج) $\lim_{x\to \sqrt{۳}} ۲ = ۲$

د) $\lim_{x\to ۱} x = ۱$ هـ) $\lim_{x\to ۲} x = ۲$ و) $\lim_{x\to \sqrt{۲}} x = \sqrt{۲}$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} x$ ب) $\lim_{x\to (۱-\sqrt{۳})} x$ ج) $\lim_{x\to \frac{۱}{۵}} x$

د) $\lim_{x\to ۱} \pi$ هـ) $\lim_{x\to \sqrt{۵}} \pi\sqrt{۲}$ و) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{۳}-۱}$

❖ اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim_{x\to a} g(x)=k$، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=l+k$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=l-k$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\times \lim_{x\to a} g(x)=l\times k$$

❖ این قضایا را برای تعداد متناهی تابع نیز می‌توان تعمیم داد.

مثال:

الف) $\lim_{x\to ۳} ۲x = \lim_{x\to ۳}(x+x) = \lim_{x\to ۳} x + \lim_{x\to ۳} x = ۳+۳=۶$

ب) $\lim_{x\to ۵}(۲x+۳) = \lim_{x\to ۵} ۲x + \lim_{x\to ۵} ۳ = \lim_{x\to ۵} ۲ \times \lim_{x\to ۵} x + \lim_{x\to ۵} ۳ = ۲\times ۵+۳=۱۳$

ج) $\lim_{x\to ۲} x^{۳} = \lim_{x\to ۲}(x\times x\times x) = \lim_{x\to ۲} x\times \lim_{x\to ۲} x\times \lim_{x\to ۲} x = ۲\times ۲\times ۲ = ۸$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(x^{۲}-۳x+۴)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۴}(۱-۵x)(۲+۳x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}(\frac{۲x-۳}{۵})(\frac{x-۱}{۲})$

د) $\lim\limits_{x\to -۱}(\frac{x-۱}{۳})(x^{۲}-۳x+۷)$

❖ **اگر $p(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد، آن‌گاه:**

$$\lim_{x\to a} p(x)=p(a)$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۴}(۲x+۳)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}(x^{۲}-۳x+۵)$

ج) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}}(x^{۳}+۲x^{۲}+x)$

د) $\lim\limits_{x\to ۷}\frac{۱-۵x}{۳}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۴}(۲x+۳)=۲\times ۴+۳=۱۱$$

ب)

$$\lim_{x\to ۱}(x^{۲}-۳x+۵)=۱^{۲}-۳(۱)+۵=۳$$

ج)

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}}(x^{۳}+۲x^{۲}+x)=(\sqrt{۲})^{۳}+۲(\sqrt{۲})^{۲}+\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}+۴$$

د)

$$\lim_{x\to ۷}\frac{۱-۵x}{۳}=\lim_{x\to ۷}(-\frac{۵}{۳}x+\frac{۱}{۳})=-\frac{۵}{۳}(۷)+\frac{۱}{۳}=-\frac{۳۴}{۳}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(x^{۳}+۴x^{۲}-۵x+۶)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{(x+۱)^{۲}}{۳}$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲}(x^{۴}+\frac{۱}{۲}x^{۳}-۵x^{۲}+۶)$

❖ اگر a عضوی از دامنه‌ی تابع باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad , \quad \lim_{x\to a} b^x = b^a$$

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \quad , \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰} \sqrt{x}$ ب) $\lim_{x\to ۰} \sqrt[۳]{x}$

ج) $\lim_{x\to ۸} (\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x} - ۲)$ د) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sin x$

هـ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin^۲ x$ و) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} (۲\sin x - ۳\cos x)$

ز) $\lim_{x\to -۲} ۳^x$ ح) $\lim_{x\to ۴} ۲^x$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt{x} = \sqrt{۰} = ۰$$

توجه: منظور از $\lim_{x\to ۰} \sqrt{x}$ در واقع $\lim_{x\to ۰^+} \sqrt{x}$ است. زیرا تابع $y = \sqrt{x}$ تنها در همسایگی راست صفر تعریف شده است.

ب)

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt[۳]{x} = \sqrt[۳]{۰} = ۰$$

ج)

$$\lim_{x\to ۸} (\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x} - ۲) = \lim_{x\to ۸} \sqrt{x} + \lim_{x\to ۸} \sqrt[۳]{x} - \lim_{x\to ۸} ۲ = \sqrt{۸} + \sqrt[۳]{۸} - ۲ = ۲\sqrt{۲} + ۲ - ۲ = ۲\sqrt{۲}$$

د)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sin x = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

هـ)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin^۲ x = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} (\sin x \times \sin x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin x \times \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin x = ۱\times ۱ = ۱$$

و)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} (۲\sin x - ۳\cos x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} ۲\sin x - \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} ۳\cos x$$

$$= ۲\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sin x - ۳\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \cos x$$

$$= ۲\sin\frac{\pi}{۴} - ۳\cos\frac{\pi}{۴}$$

$$= \sqrt{۲} - ۳\frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ز)

$$\lim_{x\to -۲} ۳^x = ۳^{-۲} = \frac{۱}{۹}$$

ح)

$$\lim_{x\to ۴} ۲^x = ۲^۴ = ۱۶$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} (۳\sin x + ۴\cos x)$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} (\frac{۲\cos x + ۳\sin x}{۵})$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} (۳^x + ۲^x)$ د) $\lim\limits_{x\to -۲} (۳^x + ۲^{-x})$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۱۶} (\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۴]{x})$ و) $\lim\limits_{x\to \frac{۵\pi}{۳}} (\sin x - ۱)(\cos x + ۲)$

❖ **اگر توابع f و g در a حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq ۰$ آن‌گاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و داریم:**

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x^۲ + ۴x + ۳}{۲x - ۱}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x + \sin x}{۲\sin x - \cos x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}+۲x}{x^۲-۳}$

د) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱}{x-۱}$

هـ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \tan x$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲+۴x+۳}{۲x-۱} = \frac{۴+۸+۳}{۴-۱} = \frac{۱۵}{۳} = ۵$$

ب)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x+\sin x}{۲\sin x-\cos x} = \frac{۰+۱}{۲-۰} = \frac{۱}{۲}$$

ج)

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}+۲x}{x^۲-۳} = \frac{۲+۴}{۱۶-۳} = \frac{۶}{۱۳}$$

د)

$\lim\limits_{x\to ۱}(x-۱)=۰$. پس وقتی x به ۱ نزدیک می‌شود، قدرمطلق مقادیر $\frac{۱}{x-۱}$ به طور نامحدود افزایش می‌یابد و به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۱}{x-۱}$ وجود ندارد.

هـ)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin\frac{\pi}{۴}}{\cos\frac{\pi}{۴}} = ۱$$

توجه: اگر $a \neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$، داریم $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a$ و اگر $a\neq k\pi$، داریم $\lim\limits_{x\to a} \cot x = \cot a$.

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{x^۲+۴x+۱}{x^۳-x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}+۲^x}{۳^x-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۴}{x^۲-x}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} \frac{-۳\cos x+۲\sin x}{\sin x+\cos x}$

هـ) $\lim\limits_{x\to \frac{۵\pi}{۴}} \tan x$

و) $\lim\limits_{x\to \frac{۵\pi}{۴}} \frac{\tan x+\cot x}{\sin x+\cos x}$

❖ اگر $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ و اگر در یک همسایگی a، $f(x)\neq 0$ و $g(x)\neq 0$، در این صورت گوییم $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ مبهم است. برای محاسبه‌ی حد تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$ در صورت وجود، با ساده کردن و حذف عامل‌های مشترک، $\frac{f(x)}{g(x)}$ به کسری تبدیل می‌شود که حد آن را به کمک قضایایی که ذکر آن رفت می‌توان محاسبه نمود.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$ ب) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

ج) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$ د) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\tan(x-\frac{\pi}{4})}{2\sin(\frac{\pi}{4}-x)}$

هـ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin^3 x}{\cos^2 x-\cos^3 x}$ و) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$

ز) $\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{2\cos x+1}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)=1$$

ب)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

ج)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=0$$

د)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan(x-\frac{\pi}{4})}{2\sin(\frac{\pi}{4}-x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\cos(x-\frac{\pi}{4})}}{-2\sin(x-\frac{\pi}{4})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{-2\cos(x-\frac{\pi}{4})}=-\frac{1}{2}$$

هـ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\sin^3 x}{\cos^2 x-\cos^3 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(1-\sin x)}{\cos^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x)(1-\sin x)}{\cos^2 x(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1-\sin x)}{\cos^2 x(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\sin x)}{\cos^2 x}=2$$

و)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{-(\sin x-\cos x)}{\cos x}}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x}=\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$$

ز)

$$\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{2\cos x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}}\frac{(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x}{2\cos x+1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}}\frac{2\sin 2x\cos x+\sin 2x}{2\cos x+1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin 2x(2\cos x+1)}{2\cos x+1}$$

$$=\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}}\sin 2x=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x-3\sin x+2}{\sin x-1}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{2\cos 2x}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}$

❖ **اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند و در محاسبه‌ی حد $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ در نقطه‌ای به طول a به حالت مبهم $\dfrac{0}{0}$ برخورد کنیم، این به معنای آن است که $P(a)=0$ و $Q(a)=0$ یعنی صورت و مخرج بر $x-a$ بخش‌پذیرند و می‌توان عامل (عامل‌های) $x-a$ را در صورت و مخرج ظاهر ساخته، از صورت و مخرج حذف کنیم. سپس حد را در صورت وجود محاسبه کنیم.**

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$

ب) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^5+32}{x^3+8}$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^4-1}$

حل:

الف) با توجه به اینکه $x=3$ صورت و مخرج را صفر می‌کند. صورت و مخرج بر $x-3$ بخش‌پذیر هستند.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2+3x+9}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

ب)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x^3+8}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{x^5+2^5}{x^3+2^3}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^4-2x^3+4x^2-8x+16}{x^2-2x+4}=\frac{80}{12}=\frac{20}{3}$$

ج)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x^4-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{5}{4}$$

مثال: در تساوی زیر مقادیر a و b را به دست آورید؟

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2+ax+b}=2$$

حل:

عدد یک، صورت را صفر می‌کند. با توجه به اینکه جواب حد عدد ۲ است. لازم است $x=1$ ریشه‌ی چندجمله‌ای مخرج نیز باشد. یعنی $1+a+b=0$. بنابراین صورت و مخرج هر دو عامل $x-1$ دارند. پس داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2+ax+b}&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2+ax+(-a-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+a+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x-5}{x+a+1}\\&=\frac{-4}{2+a}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{-4}{2+a}=2\Rightarrow 4+2a=-4\Rightarrow a=-4$$

$$\Rightarrow 1+a+b=0\overset{a=-4}{\Rightarrow} b=3$$

مثال: اگر $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-2^n}{x-2}=80$، مقدار n را به دست آورید؟

حل:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^n-2^n}{x-2}&\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^{n-1}+2x^{n-2}+4x^{n-3}+\dots+2^{n-1})}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}(x^{n-1}+2x^{n-2}+4x^{n-3}+\dots+2^{n-1})\\&=2^{n-1}+2^{n-1}+2^{n-1}+\dots+2^{n-1}\\&=n\times 2^{n-1}\\&=80\\&\Rightarrow n=5\end{aligned}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^{۳}+x-۱۰}{x^{۴}-۱۶}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲x^{۲}+۳x-۵}{x^{۳}+x-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{۴x^{۳}+۳x^{۲}+۱}{x^{۴}-۱}$ د) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^{۵}+۳۲}{x^{۲}-۴}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^{۶}-۶۴}{x^{۴}-۱۶}$ و) $\lim\limits_{x\to +۱}\dfrac{۴x^{۳}+۳x^{۲}+۲x-۹}{x^{۵}-۱}$

❖ **اگر $P(x)$ یا $Q(x)$ عبارت‌های رادیکالی باشند، برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ در حالت مبهم $(\frac{0}{0})$ لازم است با گویا کردن و یا روش‌های دیگر عامل صفر کننده را ظاهر ساخته و پس از حذف آن، حد را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم.**

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+۳}-۲}{x-۱}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{x+۳}-۲}$ د) $\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{\sqrt[۳]{x+۳}-۲}{x^{۲}-۲۵}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۲۷}\dfrac{\sqrt[۳]{x}-۳}{\sqrt{x-۲}-۵}$ و) $\lim\limits_{x\to ۱۶}\dfrac{\sqrt[۴]{x}-۲}{\sqrt{x}-۴}$

حل: الف)

$$\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{x-۱}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۳}+۲}{\sqrt{x+۳}+۲}$$

$$=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}$$

$$=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{x+۳}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲}\overset{\frac{٠}{٠}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x}{(x-۱)(x+۲)(۱+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{(x+۲)(۱+\sqrt{x})}=\frac{-۱}{۶}$$

ج)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{x+۳}-۲}\overset{\frac{٠}{٠}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{x+۳}-۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳}}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{x+۳}+۲}{\sqrt{x+۳}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}{(x-۱)(\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳})}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}+۲}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳}}=\frac{۴}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

د)

$$\lim_{x\to ۵}\frac{\sqrt[۳]{x+۳}-۲}{x^۲-۲۵}\overset{\frac{٠}{٠}}{=}\lim_{x\to ۵}\frac{\sqrt[۳]{x+۳}-۲}{x^۲-۲۵}\times\frac{(\sqrt[۳]{x+۳})^۲+۲\sqrt[۳]{x+۳}+۴}{(\sqrt[۳]{x+۳})^۲+۲\sqrt[۳]{x+۳}+۴}$$

$$=\lim_{x\to ۵}\frac{x-۵}{(x-۵)(x+۵)((\sqrt[۳]{x+۳})^۲+۲\sqrt[۳]{x+۳}+۴)}=\frac{۱}{۱۰\times ۱۲}=\frac{۱}{۱۲۰}$$

هـ)

$$\lim_{x\to ۲۷}\frac{\sqrt[۳]{x}-۳}{\sqrt{x-۲}-۵}\overset{\frac{٠}{٠}}{=}\lim_{x\to ۲۷}\frac{\sqrt[۳]{x}-۳}{\sqrt{x-۲}-۵}\times\frac{(\sqrt[۳]{x})^۲+۳\sqrt[۳]{x}+۹}{(\sqrt[۳]{x})^۲+۳\sqrt[۳]{x}+۹}\times\frac{\sqrt{x-۲}+۵}{\sqrt{x-۲}+۵}$$

$$=\lim_{x\to ۲۷}\frac{(x-۲۷)(\sqrt{x-۲}+۵)}{(x-۲۷)((\sqrt[۳]{x})^۲+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}=\frac{۱۰}{۲۷}$$

و)

با توجه به اتحاد $(a^۴-b^۴=(a-b)(a^۳+a^۲b+ab^۲+b^۳$، داریم:

$$\lim_{x\to ۱۶}\frac{\sqrt[۴]{x}-۲}{\sqrt{x}-۴}\overset{\frac{٠}{٠}}{=}\lim_{x\to ۱۶}\frac{\sqrt[۴]{x}-۲}{\sqrt{x}-۴}\times\frac{(\sqrt[۴]{x})^۳+۲(\sqrt[۴]{x})^۲+۴\sqrt[۴]{x}+۸}{(\sqrt[۴]{x})^۳+۲(\sqrt[۴]{x})^۲+۴\sqrt[۴]{x}+۸}\times\frac{\sqrt{x}+۴}{\sqrt{x}+۴}$$

$$=\lim_{x\to ۱۶}\frac{(x-۱۶)(\sqrt{x}+۴)}{(x-۱۶)((\sqrt[۴]{x})^۳+۲(\sqrt[۴]{x})^۲+۴\sqrt[۴]{x}+۸)}=\frac{۸}{۳۲}=\frac{۱}{۴}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{۱-x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{۱-\sqrt{۳x+۷}}{۲x+\sqrt{x+۱۸}}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$

د) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x^{۲}-۱}+x-۱}{\sqrt{x-۱}+x^{۲}-۱}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{۳x+۱}-\sqrt{۴x}}{۱-x^{۲}}$

و) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{۲-\sqrt{x+۴}}$

ز) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲}{x-۱}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۹}\dfrac{\sqrt{x}-۳}{\sqrt{۶+\sqrt{x}}-۳}$

ط) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+۸}-۳}{\sqrt{x+۳}-۲}$

❖ **هرگاه x زاویه‌ای بر حسب رادیان باشد. آنگاه داریم:**

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{x}=۱$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{\sin x}=۱$

مثال: ثابت کنید:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱$$

حل:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\frac{۱}{\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x}=۱\times۱=۱$$

توجه: به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{\tan x}=۱$.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 3x}{5x}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{\tan x^{2}}$

د) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^{2}}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{1-\cos 4x}$

و) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{4x^{3}}$

ز) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x-\cos 3x}$

ح) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{\tan(x^{2}-3x+2)}$

ط) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\times 3=1\times 3=3$$

ب)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 3x}{5x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\sin 3x}{x}}{\dfrac{5x}{x}}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$$

ج)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{\tan x^{2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x\times\dfrac{\sin 2x}{2x}\times 2x}{\dfrac{\tan x^{2}}{x^{2}}\times x^{2}}=2$$

د)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^{2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^{2}x}{3x^{2}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2}=\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

هـ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{1-\cos 4x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^{2}\left(\frac{7x}{2}\right)}{2\sin^{2}2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\sin\frac{7x}{2}}{\frac{7x}{2}}\right)^{2}\times\left(\dfrac{7x}{2}\right)^{2}}{\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^{2}\times(2x)^{2}}=\frac{1\times\frac{49}{4}}{1\times 4}=\frac{49}{16}$$

و)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{۴x^{۳}}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{۴x^{۳}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-\cos x\sin x}{۴x^{۳}\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱-\cos x)}{۴x^{۳}\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۲\sin^{۲}\frac{x}{۲})}{۴x^{۳}\cos x}$$

$$=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{x}\times x\times(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}})^{۲}\times(\frac{x}{۲})^{۲}}{x^{۳}\cos x}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱\times\frac{۱}{۴}}{۱}=\frac{۱}{۸}$$

ز)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۲x}{\cos ۲x-\cos ۳x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin\frac{x-۲x}{۲}\sin\frac{x+۲x}{۲}}{-۲\sin\frac{۲x-۳x}{۲}\sin\frac{۲x+۳x}{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{۳x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{۵x}{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin\frac{۳x}{۲}}{\frac{۳x}{۲}}\times\frac{۳x}{۲}}{\frac{\sin\frac{۵x}{۲}}{\frac{۵x}{۲}}\times\frac{۵x}{۲}}=\frac{۳}{۵}$$

ح)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sin(x-۲)}{\tan(x^{۲}-۳x+۲)}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{\sin(x-۲)}{(x-۲)}\times(x-۲)}{\frac{\tan(x^{۲}-۳x+۲)}{(x^{۲}-۳x+۲)}\times(x-۲)(x-۱)}=۱$$

ط)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}\overset{\div}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{-2(\frac{\pi}{2}-x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)}=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 2x}$ ب) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

ج) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x\cos 3x}{\tan 5x^2}$ د) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\sin(2x-\frac{\pi}{3})}$

هـ) $\lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{\sin(x+2)}$ و) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi\sin x)}{\sin x}$

ز) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 3x-1}$ ح) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sqrt{\cos x}}$

ط) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}$ ی) $\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2(x+t)-\cos^2 x}{t}$

ک) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan 3x}-\sqrt{1-\tan 3x}}{4x}$ ل) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\tan 2x}{x^3+3x^2}$

م) $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x-\tan x}{x}$ ن) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{2-\sqrt{4-x^2}}$

ر) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x\sqrt{1-\cos 4x}}{x^3+x^2}$

❖ برای به دست آوردن $\lim_{x\to a}[f(x)]$ ابتدا حاصل $\lim_{x\to a}f(x)$ را محاسبه می‌کنیم، فرض می‌کنیم $\lim_{x\to a}f(x)=l$. اگر l عددی غیر صحیح باشد آنگاه $\lim_{x\to a}[f(x)]=[l]$ و اگر عددی صحیح باشد، در صورت لزوم حد چپ و راست تابع را در $x=a$ به دست می‌آوریم.

❖ اگر تابع f شامل جزء صحیح باشد ابتدا جزء صحیح را محاسبه می‌کنیم و سپس حاصل حد را در صورت وجود می‌یابیم.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{۳}{۲}}[x]$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲}[x]$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}[x^{۲}]$ د) $\lim\limits_{x\to -۲}[۳x-۱]$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۰}[\sin x]$ و) $\lim\limits_{x\to ۲}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]$

ز) $\lim\limits_{x\to ۱}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]$ ح) $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}[\sqrt{۲}\cos x]$

ط) $\lim\limits_{x\to ۰}[\frac{\sin x}{x}]$ ی) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{[x]+۳+x}{[x+\frac{۱}{۲}]+[-۲x]+۴-x}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to\frac{۳}{۲}} x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \lim_{x\to\frac{۳}{۲}}[x]=[\frac{۳}{۲}]=۱$$

ب)

$$\begin{cases} x\to ۲^{-}\Rightarrow ۱<x<۲\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^{-}}[x]=۱\\ x\to ۲^{+}\Rightarrow ۲<x<۳\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^{+}}[x]=۲\end{cases}$$

پس تابع $[x]$ در $x=۲$ حد ندارد.

ج)

$$x\to .\Rightarrow ۰<x^{۲}<۱\Rightarrow \lim_{x\to ۰}[x^{۲}]=۰$$

د)

$$\begin{cases} x\to -۲^{-}\Rightarrow ۳x\to -۶^{-}\Rightarrow ۳x-۱\to -۷^{-}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -۲^{-}}[۳x-۱]=-۸\\ x\to -۲^{+}\Rightarrow ۳x\to -۶^{+}\Rightarrow ۳x-۱\to -۷^{+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -۲^{+}}[۳x-۱]=-۷\end{cases}$$

پس تابع $[۳x-۱]$ در $x=-۲$ حد ندارد.

هـ)

$$\begin{cases} x\to ۰^{-}\Rightarrow -۱<\sin x<۰\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^{-}}[\sin x]=-۱\\ x\to ۰^{+}\Rightarrow ۰<\sin x<۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^{+}}[\sin x]=۰\end{cases}$$

پس تابع $[\sin x]$ در $x=۰$ حد ندارد.

و)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x+۴}{x+۱}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]=[\frac{۸}{۳}]=۲$$

ز)

$$\frac{۲x+۴}{x+۱}=\frac{۲x+۲+۲}{x+۱}=۲+\frac{۲}{x+۱}$$

$$x>۱\Rightarrow x+۱>۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{x+۱}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰<\frac{۲}{x+۱}<۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}[\frac{۲}{x+۱}]=۰$$

$$۰<x<۱\Rightarrow ۱<x+۱<۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}<\frac{۱}{x+۱}<۱\Rightarrow ۱<\frac{۲}{x+۱}<۲\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-}[\frac{۲}{x+۱}]=۱$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱^+}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]=\lim_{x\to ۱^+}[۲+\frac{۲}{x+۱}]$$
$$=\lim_{x\to ۱^+}(۲+[\frac{۲}{x+۱}])$$
$$=۲+\lim_{x\to ۱^+}[\frac{۲}{x+۱}]=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]=\lim_{x\to ۱^-}[۲+\frac{۲}{x+۱}]$$
$$=\lim_{x\to ۱^-}(۲+[\frac{۲}{x+۱}])$$
$$=۲+\lim_{x\to ۱^-}[\frac{۲}{x+۱}]=۳$$

لذا تابع $[\frac{۲x+۴}{x+۱}]$ در $x=۱$ حد ندارد.

ح)

$$\begin{cases} x\to \frac{۳\pi}{۴}^- \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\cos x<۰\Rightarrow -۱<\sqrt{۲}\cos x<۰\Rightarrow \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}\left[\sqrt{۲}\cos x\right]=-۱ \\ x\to \frac{۳\pi}{۴}^+ \Rightarrow -۱<\cos x<-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow -\sqrt{۲}<\sqrt{۲}\cos x<-۱\Rightarrow \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+}\left[\sqrt{۲}\cos x\right]=-۲ \end{cases}$$

لذا تابع $[\sqrt{۲}\cos x]$ در $x=\frac{۳\pi}{۴}$ حد ندارد.

ط)

وقتی $x>۰$ می‌دانیم $\sin x<x$ پس $۰<\frac{\sin x}{x}<۱$ بنابراین $\lim_{x\to ۰^+}[\frac{\sin x}{x}]=۰$. همچنین با توجه به زوج بودن تابع $\frac{\sin x}{x}$ داریم $\lim_{x\to ۰^-}[\frac{\sin x}{x}]=۰$ و لذا $\lim_{x\to ۰}[\frac{\sin x}{x}]=۰$.

ی)

اگر $x \to 1^-$ داریم:

$$\begin{cases} [x] = 0 \\ 1 < x + \frac{1}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow [x + \frac{1}{2}] = 1 \\ -2 < -2x < -1 \Rightarrow [-2x] = -2 \end{cases}$$

پس حد چپ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{[x] + 3 + x}{[x + \frac{1}{2}] + [-2x] + 4 - x} = \lim_{x \to 1^-} \frac{0 + 3 + x}{1 - 2 + 4 - x} = \frac{4}{2} = 2$$

و اگر $x \to 1^+$ داریم:

$$\begin{cases} [x] = 1 \\ \frac{3}{2} < x + \frac{1}{2} < 2 \Rightarrow [x + \frac{1}{2}] = 1 \\ -3 < -2x < -2 \Rightarrow [-2x] = -3 \end{cases}$$

پس حد راست به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{[x] + 3 + x}{[x + \frac{1}{2}] + [-2x] + 4 - x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 + 3 + x}{1 - 3 + 4 - x} = \frac{5}{1} = 5$$

و لذا تابع در $x = 1$ حد ندارد.

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to 2^+} \frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4}$

ب) $\lim_{x \to 1} [x]([x] - 1)$

ج) $\lim_{x \to 0^+} \frac{[7x^2]}{x + 5}$

د) $\lim_{x \to 1} [\frac{x}{2}]$

هـ) $\lim_{x \to 2} ([x] + [-x])$

ز) $\lim_{x \to \pi} ([x] + [-x])$

ح) $\lim_{x \to 6} ([3x] + 2[x] - [x^2])$

ط) $\lim_{x \to 6} ([\frac{x}{2}] + [\frac{x}{3}])$

ی) $\lim_{x \to 1^-} (x + 1)[\frac{1}{x + 1}]$

ک) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} [\tan x]$

ل) $\lim_{x \to \frac{5\pi}{4}} [\sqrt{2} \sin x]$

م) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\cos x]$

❖ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=|l|$$

❖ اگر تابع f شامل قدرمطلق باشد، برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ در صورت لزوم حدود چپ و راست را محاسبه می‌کنیم.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}|x-۲|$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}|x-۲|$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{|x-۲|}{x-۲}$

د) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{|x-۱|-۳}{|x-۳|+۴}$

هـ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۲}|x-۲|=|۲-۲|=۰$$

ب)

$$\lim_{x\to ۱}|x-۲|=|۱-۲|=۱$$

ج)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|}{x-۲}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱\\[2ex]\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x-۲}{x-۲}=۱\end{cases}\Rightarrow$$ تابع در $x=۲$ حد ندارد

د)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{|x-۱|-۳}{|x-۳|+۴}=\lim_{x\to ۱}\frac{|۱-۱|-۳}{|۱-۳|+۴}=\frac{-۳}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

هـ)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{-(\frac{\pi}{۲}-x)}=-۱\\[3ex]\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\dfrac{-\cos x}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\dfrac{-\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{-(\frac{\pi}{۲}-x)}=۱\end{cases}\Rightarrow$$ تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ حد ندارد

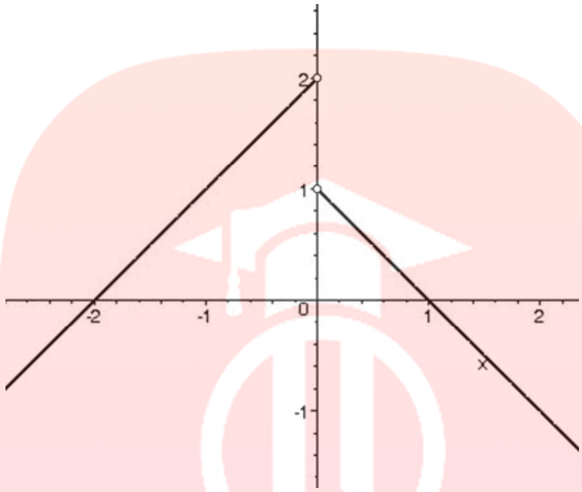
تمرین:

۱- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{|x-1|}$

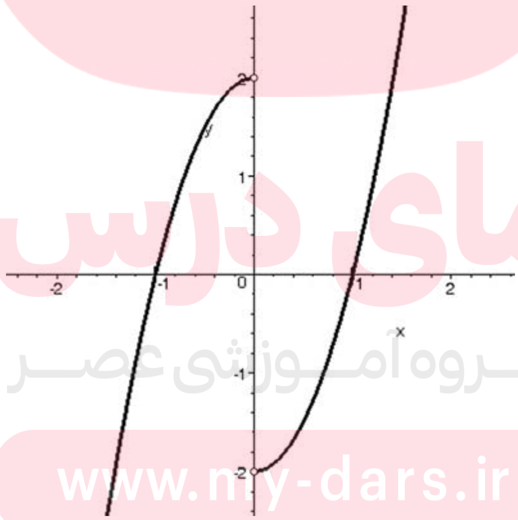
ج) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}+\dfrac{|x-1|}{x-1}\right)$ د) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$

۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار حدود زیر را محاسبه کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|f(x)|}$

۳- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار حاصل $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|$ را محاسبه کنید



❖ **قضیه فشردگی: اگر به ازای هر x از یک همسایگی a داشته باشیم $h(x) \le f(x) \le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.**

مثال: $\lim\limits_{x\to 1}|x-1|\cos\frac{1}{x-1}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$-1 \le \cos\frac{1}{x-1} \le 1 \Rightarrow -|x-1| \le |x-1|\cos\frac{1}{x-1} \le |x-1|$$

$$\lim_{x\to 1} -|x-1| = \lim_{x\to 1}|x-1| = 0 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 1}|x-1|\cos\frac{1}{x-1} = 0$$

مثال: اگر به ازای هر $x \in (-2,2)$، داشته باشیم: $|f(x)-2| \le (x-1)^2$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{f(x)}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$|f(x)-2| \le (x-1)^2 \Rightarrow -(x-1)^2 \le f(x)-2 \le (x-1)^2 \Rightarrow 2-(x-1)^2 \le f(x) \le 2+(x-1)^2$$

$$\lim_{x\to 1}(2+(x-1)^2) = \lim_{x\to 1}(2-(x-1)^2) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$$

تمرین:

۱- حدود زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)\sin\frac{1}{x-2}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x.\sin\frac{1}{x}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]$ د) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{\pi}{x}$

هـ) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-1)\sin\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ و) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)[\frac{1}{\sin x}]$

۲- اگر به ازای هر $x \in (-1,1)$ داشته باشیم $1-x^2 \le f(x) \le \cos^2 x$، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ را محاسبه کنید.

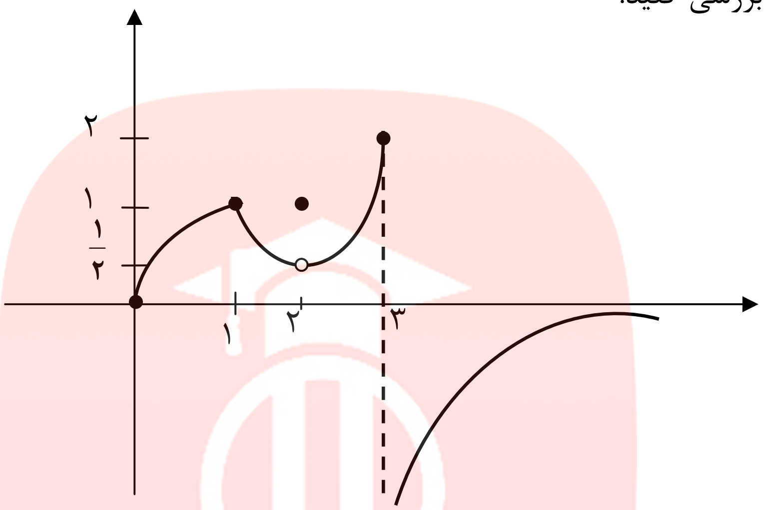
۳- اگر به ازای هر $x \in (-1,1)$ داشته باشیم $-x^2 \le f(x) \le 1-\cos x$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ را محاسبه کنید.

۴- در یک همسایگی صفر داریم $3-x^2 \le f(x)-5 \le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 3$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$ را محاسبه کنید.

۵- اگر برای هر x از یک همسایگی $x_0 = -2$ داشته باشیم $g(x) \le f(x) \le x^3+2$ و $g(x) = \begin{cases} x-4 & x \ge -2 \\ x^5+26 & x < -2 \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ را محاسبه کنید.

❖ **اگر $a \in D_f$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ ، گوییم تابع f در $x = a$ پیوسته است.**

مثال: نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار، پیوستگی تابع f را در نقاط مشخص شده بررسی کنید.



الف) $x = ۰$ ب) $x = ۱$ ج) $x = ۲$ د) $x = ۳$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = f(۰) = ۰$$

پس تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

توجه: در اصطلاح، با توجه به این‌که در واقع $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = f(۰)$ می‌گویند تابع f در $x = ۰$ تنها از راست پیوسته است.

ب)

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = f(۱) = ۱$$

پس تابع f در $x = ۱$ پیوسته است.

ج)

$f(۲) = ۲$ ولی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = \frac{۱}{۲}$ پس $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) \neq f(۲)$. بنابراین تابع f در $x = ۲$ پیوسته نیست.

د)

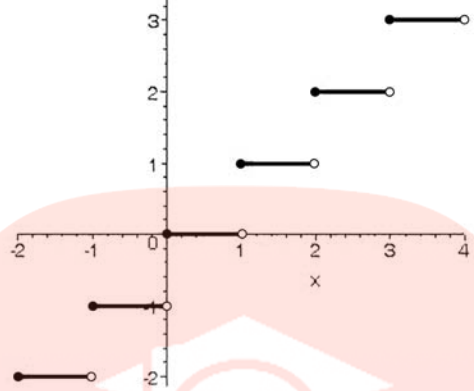
تابع f در $x = ۳$ حد ندارد، پس در این نقطه پیوسته نیست.

توجه: در اصطلاح ، می‌گویند تابع f در $x = ۳$ تنها پیوستگی چپ دارد.

مثال: تابع $y=[x]$ در چه نقاطی ناپیوسته است.

حل:

نمودار تابع $y=[x]$ به صورت زیر می‌باشد. با توجه به نمودار، تابع در Z ناپیوسته است. (البته می‌توان ثابت کرد تابع $y=[x]$ در $x_{\circ}\in Z$ ناپیوسته و در $x_{\circ}\in \Re - Z$ پیوسته است.)



مثال: پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقطه یا نقاط داده شده در صورت با معنی بودن، بررسی کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-۱}\quad , x=۰$

ب) $f(x)=x^{۲}-۳x+۵\quad , x=۲$

ج) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x<۱ \\ ۲ & x=۱ \\ \dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱} & x>۱ \end{cases}\quad , x=۱$

د) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x<۱ \\ ۳ & x=۱ \\ \dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱} & x>۱ \end{cases}\quad , x=۱$

هـ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}\quad , x=۰$

و) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲ & x<-۱ \\ -۳x & -۱<x<۱ \\ x-۴ & x>۱ \end{cases}\quad , x=-۱, x=۱$

حل: الف)

می‌دانیم $D_f=[۱,+\infty)$ و $۰\notin D_f$، بنابراین بحث از پیوستگی این تابع در $x=۰$ بی‌معنا است.

ب)

تابع f در $x=۲$ پیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)=۳$.

توجه: توابع چند جمله‌ای در هر نقطه‌ای از $\Re$ پیوسته هستند.

ج)

$$f(۱)=۲$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\left(x^{۲}+۱\right)=۲ \\ &\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x)=۲$$

تابع f در $x=1$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

د)

$$f(1)=3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$$

تابع f در $x=1$ پیوسته نیست زیرا $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$.

هـ)

$$f(0)=1$$

$$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

تابع f در $x=0$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

و)

$$f(-1)=3$$

$$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(-3x)=3$$

$$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^2+1\right)=2$$

تابع f در $x=-1$ حد ندارد. بنابراین تابع f در $x=-1$ پیوسته نیست، زیرا در این نقطه حد ندارد.
(همان‌گونه که بیان شد تابع f در $x=-1$ تنها پیوستگی راست دارد).

$$f(1)=-3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-3x)=-3\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-4)=-3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-3$$

تابع f در $x=1$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$.

مثال: مقدار a را طوری بیابید تا تابع $f(x)=(x+a)[2x-5]$ در $x=2$ پیوسته باشد.

حل:

$$f(2)=(2+a)[4-5]=-a-2$$

$$\lim\limits_{x\to 2^-}(x+a)[2x-5]=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+a)(-2)=-4-2a$$

$$\lim\limits_{x\to 2^+}(x+a)[2x-5]=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+a)(-1)=-2-a$$

با توجه به اینکه باید داشته باشیم $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$ پس لازم است $-a-2=-4-2a$ بنابراین $a=-2$ می‌باشد.

مثال: مقدار k را طوری تعیین کنید تا تابع $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+x^2-2}{x^2-1} & x\neq \pm 1\\ k & x=\pm 1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد.

حل:

$$f(1)=k$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^2-2}{x^2-1}=\lim\frac{(x^2-1)(x^2+2)}{x^2-1}=3$$

بنابراین لازم است $k=3$ باشد.

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x<0\\ a & x=0\\ [x]+b & x>0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد مقدار a و b را به دست آورید.

حل:

$$f(0)=a$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\sqrt{2}|\sin x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-\sqrt{2}\sin x}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}([x]+b)=\lim_{x\to 0^+}(0+b)=b$$

برای اینکه تابع f در $x=0$ پیوسته باشد باید $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ ، بنابراین داریم:

$$b=a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرین:

۱- پیوستگی $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{2x^2+1} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

۲- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} (x+3)[x] & x<3 \\ ax+3 & x\geq 3 \end{cases}$ در $x=3$ پیوسته باشد، مقدار a را به دست آورید.

۴- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} [x]+3 & |x|<1 \\ [x]+2 & |x|\geq 1 \end{cases}$ را در $x=\pm 1$ بررسی کنید.

۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x+|x|} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x=0$ چگونه است.

۶- پیوستگی هر یک از توابع $f(x)=[x^2]$ و $g(x)=[x^3]$ را در $x=0$ بررسی کنید.

۷- تابع $f(x)=[2\sin x]$ در نقطه‌ی $x=\dfrac{\pi}{2}$ از نظر پیوستگی چگونه است.

۸- به ازای چه مقادیری از k تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos k\pi} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است.

۹- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x-[x] & ,\ [x]\in O \\ x-[x]+1 & ,\ [x]\in E \end{cases}$ را در نقاط $x=2$ و $x=3$ بررسی کنید. (O و E به ترتیب مجموعه‌های اعداد فرد و زوج طبیعی هستند.)

۱۰- اگر یکی از توابع f و g در $x=a$ پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد، ثابت کنید توابع $f+g$ و $f-g$ در $x=a$ ناپیوسته‌اند. درمورد توابع $\dfrac{f}{g}$ و $f.g$ چه می‌توان گفت؟

۱۱- اگر توابع f و g در $x=a$ ناپیوسته باشند، در مورد پیوستگی توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $\dfrac{f}{g}$ و $f.g$ در $x=a$ چه می‌توان گفت.

۱۲- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases} [x+2]+\frac{1}{2}a & x<0 \\ |x-2|+b & x=0 \\ x\cot\dfrac{x}{3} & x>0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

۱۳- به ازای چه مقادیری از a و b تابع $f(x)=\begin{cases} a[x]+b[x] & x>۲ \\ ۲a+۳ & x=۲ \\ \left[\frac{x}{۲}\right] & x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته است.

❖ **اگر تابعی در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته می‌نامند.**

مثال: کدام یک از توابع زیر، تابع پیوسته می‌باشند.

الف) $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ ب) $g(x)=\frac{x+۱}{x^۲-۴}$

ج) $h(x)=\begin{cases} \frac{\tan x}{x} & x\neq ۰ \\ ۲ & x=۰ \end{cases}$

حل: الف)

دامنه‌ی تابع f، بازه‌ی $[۰,۲]$ می‌باشد. اگر $۰<x<۲$، آن‌گاه:

$x_۰\in(۰,۲): \lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=\sqrt{۲x_۰-x_۰^۲}=f(x_۰)$ دلخواه

اگر $x=۰$، $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰=f(۰)$ و اگر $x=۲$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۰=f(۲)$. پس تابع f، تابعی پیوسته می‌باشد.

ب)

$D_g=\Re-\{\pm ۲\}$

$x_۰\in D_g: \lim\limits_{x\to x_۰} g(x)=\frac{x_۰+۱}{x_۰^۲-۴}=g(x_۰)$ دلخواه

بنابراین g تابعی پیوسته است.

ج)

$D_h=\Re$

$$۰\in D_h=\begin{cases} h(۰)=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۰} h(x)=۱ \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۰} h(x)\neq h(۰)$$

بنابراین h تابعی پیوسته نیست.

تمرین:

کدام یک از توابع زیر پیوسته هستند.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{x+۱} & x>۲\\ \dfrac{۳}{x-۴} & x<۲\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{x+۱} & x>۲\\ \dfrac{۳}{x-۴} & x\le ۲\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{x+۱} & x<۲\\ \dfrac{۳}{x+۴} & x\le ۲\end{cases}$

د) $f(x)=\tan x$

هـ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۳}{۵-x}}$

و) $f(x)=\sqrt{x^۳-۸}$

ز) $f(x)=\sqrt[۳]{\dfrac{x+۱}{x-۲}}$

- **توابع چند جمله‌ای، $y=\sin x$، $y=\cos x$، $y=\tan^{-1}x$ و $y=\cot^{-1}x$ روی $\Re$ پیوسته‌اند.**
- **توابع $y=\tan x$، $y=\cot x$، $y=\sin^{-1}x$ و $y=\cos^{-1}x$ در دامنه‌ی تعریف خود که زیرمجموعه‌ای از $\Re$ می‌باشد تابعی پیوسته هستند.**
- **اگر تابع h از جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم چند تابع پیوسته تشکیل شده باشد روی دامنه خود تابعی پیوسته است.**
- **اگر f تابعی پیوسته باشد، تابع $\sqrt[n]{f}$ روی دامنه‌ی تعریف خود پیوسته است.**

مثال: پیوستگی توابع زیر را روی دامنه‌ی تعریف بررسی کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x^۲+۱}{x^۲-۴}$

ب) $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$

ج) $h(x)=\tan x.\cot x$

حل: الف)

صورت و مخرج توابع چند جمله‌ای هستند و در هر نقطه‌ای پیوسته، پس تابع f روی $D_f=\Re-\{\pm ۲\}$ پیوسته است.

ب)

تابع $y=x^۲-۴$ تابع چند جمله‌ای است و در هر نقطه‌ای پیوسته، پس تابع g در دامنه تعریف خود یعنی $(-\infty\,,-۲]\cup[۲\,,+\infty)$ پیوسته است.

ج)

تابع $y=\tan x$ روی $D=\left\{x \middle| x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$ و تابع $y=\cot x$ روی $D_f=\{x|x\neq k\pi\}$ پیوسته‌اند پس تابع h روی $D_h=\left\{x \middle| x\neq \frac{k\pi}{2}\right\}$ پیوسته است.

مثال: فاصله‌ی پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-2} & x>3\\[2mm] \dfrac{x+1}{x+2} & x\leq 3\end{cases}$ را تعیین کنید.

حل:

می‌دانیم $D_f=\Re-\{-2\}$ و هر یک از ضابطه‌ها روی دامنه‌ی تعریف خود پیوسته‌اند. پس کافی است پیوستگی تابع در $x=3$ را بررسی کنیم.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x+1}{x-2}=4$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+1}{x+2}=\frac{4}{5}$$

تابع در $x=3$ پیوسته نیست بنابراین تابع f روی $(-\infty\,,-2)\cup(-2\,,3)\cup(3\,,+\infty)$ پیوسته است.

مثال: حدود k را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\dfrac{x^2+x+7}{x^2+kx+1}$ در $\Re$ پیوسته باشد

حل:

صورت و مخرج توابع چند جمله‌ای هستند و در هر نقطه‌ای از $\Re$ پیوسته می‌باشند. پس کافی است دامنه تعریف تابع برابر $\Re$ باشد. یعنی باید معادله $\boldsymbol{x^2+kx+1=0}$ فاقد ریشه باشد بنابراین لازم است:

$$\Delta<0\Rightarrow \boldsymbol{k^2-4<0\Rightarrow |k|<2\Rightarrow -2<k<2}$$

تمرین:

۱- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}2a-x^2 & 2\leq x<3\\ [x]-1 & 3\leq x<4\\ bx+1 & 4\leq x<5\end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

۲- a و b را طوری به دست آورید تا تابع $f(x)=\begin{cases}x+a+1 & x\leq 0\\ [x]+2b & 0<x<1\\ \dfrac{3a}{x} & x\geq 1\end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

۳- مقدار k را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱}{x} & x\ge k \\ x & x<k \end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

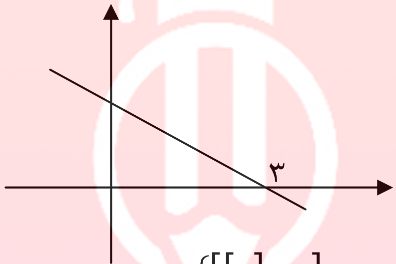
۴- مقدار m را طوری تعیین کنید تا $f(x)=\begin{cases} \dfrac{mx^{۲}+۵x}{x^{۲}+mx+۱} & x\neq ۱ \\ ۲m & x=۱ \end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

۵- فاصله‌ی پیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x+۳}{x^{۲}-۹}$ 　　　 ب) $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}$

ج) $h(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{۳-x}}$ 　　　 د) $k(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۱ \end{cases}$

۶- اگر $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{۲}-۵x+b}{a-x} & x\neq a \\ ۱ & x=a \end{cases}$ تابعی پیوسته بوده و نمودار آن به صورت زیر باشد مقادیر a و b را به دست آورید.



۷- به ازای چه مقادیر از a تابع $f(x)=\begin{cases} [[x]-x] & x\notin Z \\ a & x\in Z \end{cases}$ تابعی پیوسته می‌باشد.

۸- به ازای چه مقادیری از a تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{۲}-۱}{x-\sqrt{x}} & x>۱ \\ ax+a+۴ & x\le ۱ \end{cases}$ ، تابعی پیوسته می‌باشد.

۹- تابع $f(x)=\begin{cases} (x-۱)[x] & x<۲ \\ a+۲\sin\dfrac{\pi}{۴} & x\ge ۲ \end{cases}$ به ازای چه مقداری از a روی $D_f=[۰\,,\,۳]$ پیوسته است.

❖ **اگر ترکیب fog امکان‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ و f تابعی پیوسته در $x_{۰}=l$ باشد، آن‌گاه داریم:**

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

مثال:

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x^{۲}+۳}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۱}(x^{۲}+۳)}=\sqrt{۴}=۲$ زیرا تابع $y=\sqrt{x}$، تابعی پیوسته است

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}[x]\neq[\lim\limits_{x\to ۲}x]$ زیرا تابع $y=[x]$ در $x_{\circ}=۲$ پیوسته نیست

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}[x^{۲}]=[\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}x^{۲}]=[\frac{۱}{۴}]=\circ$

د) $\lim\limits_{x\to ۱}[\frac{۲x+۱}{x}]\neq[\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲x+۱}{x}]$ زیرا تابع $y=[\frac{۲x+۱}{x}]$ در $x_{\circ}=۱$ پیوسته نیست

هـ) $\lim\limits_{x\to ۲}[\frac{۲x+۱}{x}]=[\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۲x+۱}{x}]=[\frac{۵}{۲}]=۲$

❖ **اگر تابع g در $x=a$ پیوسته و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد، تابع fog در $x=a$ پیوسته است.**

مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\sqrt[۳]{x}$ ، تابعی پیوسته است.

حل: روش اول:

تابع $y=x$ تابع چند جمله‌ای است و در $x_{\circ}\in\Re$ دلخواه پیوسته است پس تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ در $x_{\circ}$ پیوسته است و تابع $h(x)=\sin x$ در هر نقطه‌ای از جمله $g(x_{\circ})$ پیوسته است پس تابع

$$f(x)=h(g(x))=\sin\sqrt[۳]{x}$$

در $x_{\circ}$ پیوسته است.

روش دوم:

$x_{\circ}\in\Re$ دلخواه

$$\left.\begin{array}{l} f(x_{\circ})=\sin\sqrt[۳]{x_{\circ}} \\ \lim\limits_{x\to x_{\circ}} f(x)=\sin\sqrt[۳]{x_{\circ}} \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_{\circ}} f(x)=f(x_{\circ})$$

بنابراین تابع f روی $D_f=\Re$ تابعی پیوسته است.

تمرین:

۱- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=\sqrt{x}$، ثابت کنید تابع fog در $x=\circ$ پیوسته است.

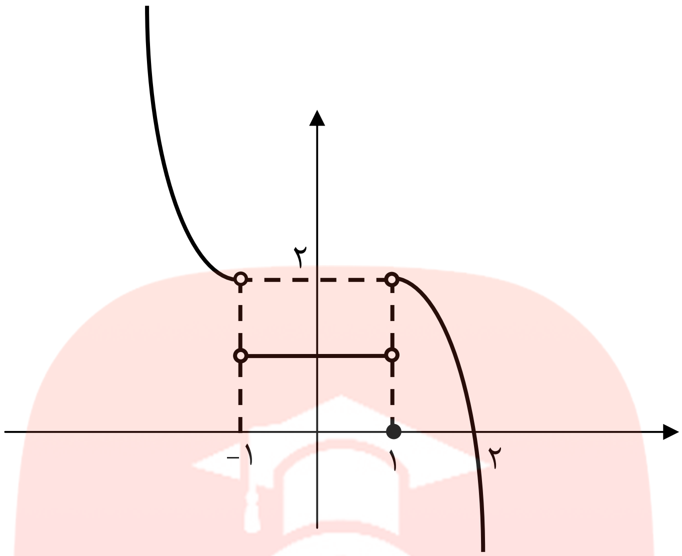
۲- اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=x-۲$، پیوستگی توابع fog و gof را در $x=۵$ بررسی کنید.

۳- اگر $f(x)=\begin{cases}-x & x<\circ \\ ۱ & x\geq\circ\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۱ & x<\circ \\ x & x\geq\circ\end{cases}$ ثابت کنید توابع f و g در $x=\circ$، ناپیوسته‌اند ولی تابع fog در $x=\circ$ پیوسته است.

۴- اگر $f(x)=\begin{cases}۳ & x\in z \\ -۳ & x\notin z\end{cases}$ ، پیوستگی تابع fof را بررسی کنید.

تمرین‌های تکمیلی:

۱- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است با توجه به نمودار طرف دوم هر یک از تساوی‌ها را بنویسید.



$\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۴}} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} [f(x)]=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -۱^-} [f(x)]=$

$f(۱)=$

۲- نمودار تابعی رسم کنید که در آن همه‌ی ویژگی‌های زیر را داشته باشد.

الف) $f(۰)=۲$ $\qquad$ ب) $f(-۲)=۰$ $\qquad$ ج) $f(۶)=۰$

د) $f(۱)=۵$ $\qquad$ هـ) $f(۲)$ تعریف نشده است $\qquad$ و) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۳$

ز) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۴$ $\qquad$ ح) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

۳- اگر $f(x-۳)=\dfrac{۲x}{۱-x}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را محاسبه کنید.

۴- اگر $f(\dfrac{x}{x+۲})=۵x^۲-۶x$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} f(x-۴)$ را به دست آورید.

۵- تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<۱ \\ ۴x+۳b & x>۱ \end{cases}$ مفروض است، a و b را طوری به دست آورید تا اولاً تابع در $x=۱$ حد داشته باشد، ثانیاً $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)+۳\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۴$.

۶- هر یک از مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le -2 \\ ax+b & -2<x<2 \\ 2x-6 & x\ge 2 \end{cases}$$
در $x=2$ و $x=-2$ دارای حد باشد.

۷- به ازای کدام مقدار a تابع $y=a[x]+[x+1]$ در $x=1$ دارای حد است.

۸- حدود چپ و راست تابع $y=2[-x]+3[x]$ را در نقاط $x=3$ و $x=-3$ به دست آورید.

۹- اگر به ازای هر x از بازه‌ای شامل -1 داشته باشیم $2-3(x+1)^2 \le f(x)\le 2+(x+1)^2$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را به دست آورید.

۱۰- فرض کنید به ازای هر x از بازه $(-\pi\,,0)$ داریم $-\sin x\le f(x)\le 2+\sin x$ آنگاه $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۱- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2-2\cos 2x}}$

پ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin(x^2)}$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}}\dfrac{2+2\cos 4\pi x}{(4x-1)^2}$

ث) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{1-x}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x+\sin^2 x}{\cos x+1}$

چ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+4\tan x}{2-x-2x^4}$

ح) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan x}-1}$

خ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos(\frac{x+\pi}{6})}$

د) $\lim\limits_{a\to \pi}\dfrac{\sin a}{1-\frac{a^2}{\pi^2}}$

۱۲- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{3x-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x-10}{2x^2-x-6}$

ت) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3+5x^2-6x-2}{x^2-1}$

ث) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2-2(x-2)}{x^2-4}$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{2x^3+3x^2-x-4}$

چ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{3x}$

ح) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt[3]{x-3}-1}$

خ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

د) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$

ذ) $\lim\limits_{t\to -3}\sqrt{\dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}}$

ر) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x)(\sqrt{x}+1)-4}{x-1}$

ز) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})..(1-\sqrt[n]{x})}{(x-1)^{n-1}}$

ژ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$

س) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

ش) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$

ص) $\lim\limits_{x\to 0} Arc\tan\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

۱۳- مقدار k را طوری به دست آورید تا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(1-x)\sin kx}{1-\cos x}=2$.

۱۴- به ازای چه مقداری از a تساوی $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1}=\dfrac{7}{2}$ برقرار است.

۱۵- مقدار a چقدر باشد تا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x\sin 3x}=\dfrac{1}{6}$.

۱۶- اگر $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=2$ ، آنگاه a چقدراست.

۱۷- تابع $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$ مفروض است $f(0)$ را طوری تعیین کنید که تابع f در $x=0$ پیوسته باشد.

۱۸- $f(0)$ را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

۱۹- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x<0\\ a & x=0\\ [x]+b & x>0\end{cases}$ در صفر پیوسته باشد.

۲۰- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & |x|<2\\ \sqrt{x^2-2x+1} & |x|\ge 2\end{cases}$ در $\Re$ پیوسته باشد.

۲۱- به ازای چه مقداری از a تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+x^2-2}{x^2-1} & x\ne \pm 1\\ a & x=\pm 1\end{cases}$ روی $\Re$ پیوسته است.

۲۲- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x-1}} & x>1\\ ax+2 & x\le 1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است.

۲۳- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}2[x]-\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & x\ne 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ را بررسی کنید

۲۴- تابع f با دامنه‌ی $[0\,,3]$ و با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & x<2\\ a+2\sin\dfrac{\pi}{x} & x\geq 2\end{cases}$ مفروض است به ازای چه مقدار a تابع f تابعی پیوسته است.

۲۵- تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2ax+3a-2}$ با $D_f=\Re$ مفروض است. به ازای چه مقادیری از a ، f تابعی پیوسته است.

۲۶- پیوستگی تابع $y=[\frac{x}{2}]+[\frac{x}{4}]$ را در $x=3$ بررسی کنید.

۲۷- تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[x+\frac{1}{2}]+2b & x<0\\ 3a+1 & x=0\\ \dfrac{\sqrt{2}\sin 4x}{1-\cos 2x} & x>0\end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع f در $x=0$ پیوسته باشد.

۲۸- تابعی با دامنه‌ی $\Re$ مثال بزنید که تنها در یک نقطه پیوسته باشد.

۲۹- تابع $y=[\sqrt[3]{x}-1]$ با دامنه‌ی $(0\,,1000)$ مفروض است. این تابع چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد.

۳۰- دو تابع f و g را طوری مثال بزنید که هر دو در $x=a$ ناپیوسته بوده ولی جمع و ضرب و تقسیم آن‌ها تابعی پیوسته در $x=a$ باشد.

۳۱- دو تابع f و g را طوری مثال بزنید که f در $x=a$ ناپیوسته و g و fog در $x=a$ پیوسته باشد.