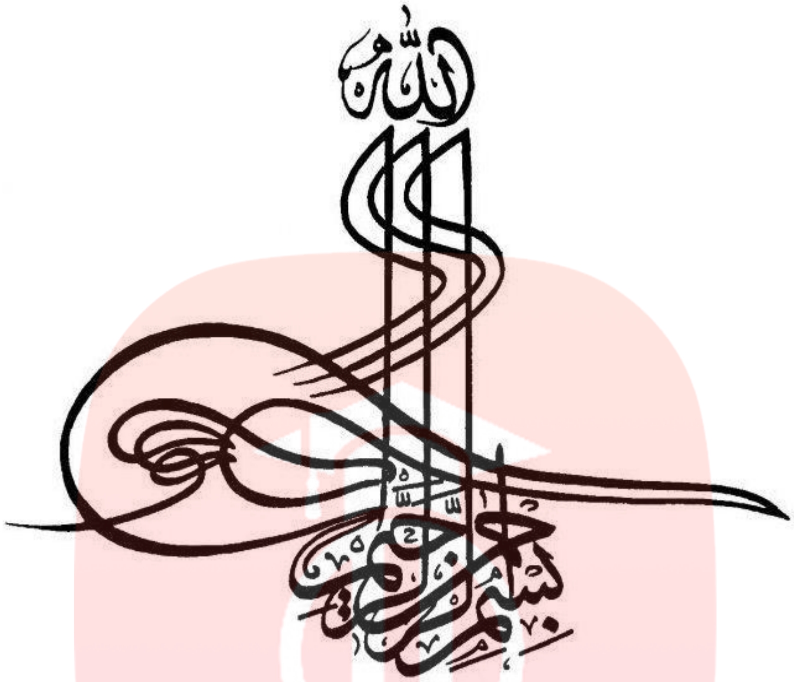


# قدرمطلق و ویژگی های آن

## درس چهارم از فصل اول حسابان پایه یازدهم ریاضی فیزیک

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی سوالات کنکور سراسری
- حل تمام تمرین‌ها ، فعالیت ها و کاردر کلاس ها

مؤلف:
حبیب هاشمی

۱۳۹۶

**مقدمه**

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل اول کتاب درسی حسابان (۱) ، مبحث «قدرمطلق و ویژگی های آن» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع‌تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

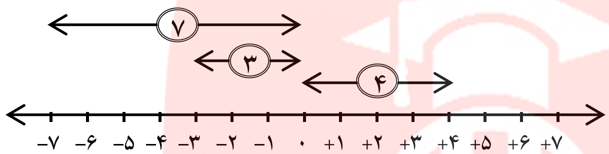
حبیب هاشمی

# درس ۴

## قدر مطلق و ویژگی های آن

### قدر مطلق:

$\boxed{\text{قدر مطلق یک عدد یعنی فاصله‌ی آن از مبدأ}}$




$|+۴| = +۴$
$|-۳| = +۳$
$|-۷| = +۷$

قدر مطلق را می‌توان یک مکان مقدس در نظر گرفت که هر جور موجودی وارد آن شود تبدیل به یک انسان مثبت می‌شود.

به عبارتی دیگر اگر داخل قدر مطلق مثبت باشد خود آن را بیرون می‌آوریم ولی اگر داخل قدر مطلق منفی باشد قرینه‌ی آن را بیرون می‌آوریم.

درحالت کلی $|u| = \begin{cases} u & u \geq ۰ \\ -u & u < ۰ \end{cases}$

مثال ۱ : حاصل عبارت‌های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $|-۵| = -(-۵) = +۵$

ب) $\underbrace{|۱-\sqrt{۲}|}_{\text{منفی}} = -(۱-\sqrt{۲}) = \sqrt{۲}-۱$

پ) $\underbrace{|۲-\sqrt{۲}|}_{\text{مثبت}} = ۲-\sqrt{۲}$

ت) $|-۶ \div ۳ \times ۲| = |-۲ \times ۲| = |-۴| = -(-۴) = ۴$

ث) $\underbrace{|a^۲+۱|}_{\text{مثبت}} = a^۲+۱$

ج) $|x^۲+۴x+۴| = \underbrace{|(x+۲)^۲|}_{\text{نامنفی}} = (x+۲)^۲$

چ) $\underbrace{|-(x-۱)^۲-۳|}_{\text{منفی}} = -(-(x-۱)^۲-۳)$

**مثال:** حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف ) $|-۵-(-۳)| = |-۲| = ۲$

ب ) $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}| = -(\sqrt{۳}-\sqrt{۵}) = \sqrt{۵}-\sqrt{۳}$

پ ) $\left|۱/۵ - ۱\frac{۱}{۲}\right| = |۰| = ۰$

**مثال:** عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف ) $\sqrt{a^۴ + ۲a^۲ + ۱} = \sqrt{(a^۲+۱)^۲} = |a^۲+۱| = a^۲+۱$

ب ) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} = \sqrt{(\sqrt{۳}-۲)^۲} = |\sqrt{۳}-۲| = (\sqrt{۳}-۲) = ۲-\sqrt{۳}$

**مثال:** با استفاده از تعیین علامت ، ضابطهٔ هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف ) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^۲ & x \geq ۰ \\ x(-x) = -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$

ب ) $g(x) = |x^۲-۱| = \begin{cases} x^۲-۱ & x \leq -۱ \text{ یا } x \geq ۱ \\ -x^۲+۱ & -۱ < x < ۱ \end{cases}$

| x | | $-۱$ | | $۱$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲-۱$ | + | ۰ | − | ۰ | + |

پ ) $h(x) = |x-۱| + |x+۱| = \begin{cases} -x+(-x-۱) = -۲x & x \leq -۱ \\ -x+۱+x+۱ = ۲ & -۱ < x < ۱ \\ x-۱+x+۱ = ۲x & x \geq ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x & x \leq -۱ \\ ۲ & -۱ < x < ۱ \\ ۲x & x \geq ۱ \end{cases}$

| x | | $-۱$ | | $۱$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-۱$ | $-$ | | $-$ | ○ | $+$ |
| $x+۱$ | $-$ | ○ | $+$ | | $+$ |

**مثال :** اگر $۱ < x < ۳$ حاصل عبارت $|x-۱|+|x-۳|$ را به دست آورید.

ابتدا همانند مثال بالا عبارت های داخل قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم

$$۱ < x < ۳ \Longrightarrow \underbrace{|x-۱|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|x-۳|}_{\text{منفی}} = (x-۱) + \big(-(x-۳)\big) = x-۱-x+۳ = ۲$$

**مثال :** حاصل $|۲x-۱|+|۲-x|$ وقتی $-۱ < x < ۰$ باشد کدام است؟

۱) $-۳-۳x$ ۲) $۳-۳x$ ۳) $-۳+۳x$ ۴) $۱+x$

ابتدا همانند مثال بالا عبارت های داخل قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم

$$-۱ < x < ۰ \Longrightarrow \underbrace{|۲x-۱|}_{\text{منفی}} + \underbrace{|۲-x|}_{\text{مثبت}} = -(۲x-۱) + (۲-x) = -۳x+۳$$

**مثال :** اگر $|x^۲-۲x| = ۲x-x^۲$ باشد آن گاه محدوده‌ی $x$ کدام است؟

$$|u| = -u \Longrightarrow u \le ۰ \Longrightarrow x^۲-۲x \le ۰$$

| -∞ | | ۰ | | ۲ | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $+$ | ○ | $\underbrace{-}_{\text{جواب}}$ | ○ | $+$ | |

$x \in [۰\,,۲]$

## رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق

روش کلی **رسم نمودار** توابع شامل قدر مطلق استفاده از تعریف قدرمطلق وتبدیل به یک تابع چند ضابطه‌ای به کمک تعیین علامت است

برای رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ریشه‌های داخل قدر مطلق را به دست می آوریم.وعبارات داخل قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم

۲- با توجه به ریشه‌های بدست آمده و جدول تعیین علامت، قدر مطلق را برمی‌داریم و تابع را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم.

۳- نمودار هر ضابطه را با توجه به محدوده‌ی مورد نظر رسم می کنیم.

مثال: نمودار تابع $f$ با ضابطه $f(x) = |x-1| + |x+2|$ را رسم کنید .

حل:

از روش تعیین علامت عبارت های داخل قدر مطلق ها کمک می گیریم . برای این کار ابتدا عبارت های داخل قدر مطلق ها را تعیین علامت می کنیم.

| $x$ | | $-2$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |

$$f(x) = (x-1) + (x+2) = 2x+1$$

$$f(x) = -(x-1) + (x+2) = 3$$

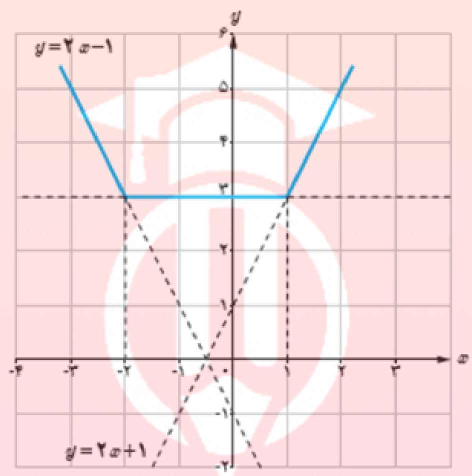
$$f(x) = -(x-1) - (x+2) = -2x-1$$

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۱ & , \quad x<-۲\\ ۳ & ,-۲\le x\le ۱\\ ۲x+۱ & , \quad x>۱\end{cases}$$

| | |
|---|---|
| −۲ | −۳ |
| ۳ | ۵ |

| | |
|---|---|
| ۱ | ۲ |
| ۳ | ۵ |

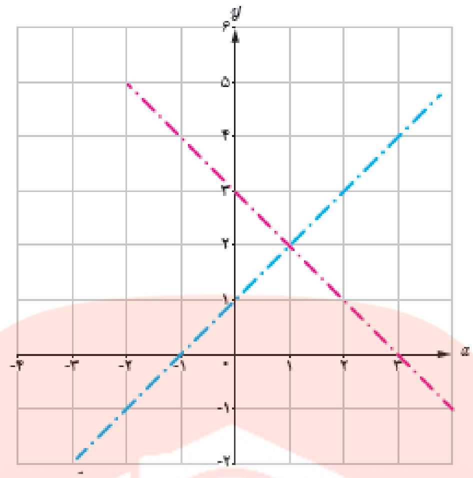
نمودار تابع از سه قسمت که هر یک بخشی از یک خط هستند تشکیل می شود



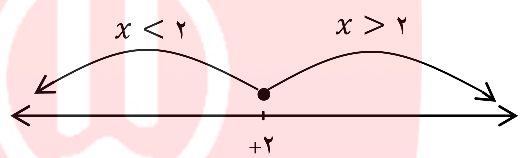

مثال: نمودار تابع $y=|x-۱|+۲$ را رسم کنید.

گام اول؛ با استفاده از تعیین علامت، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه ای بنویسید.

$$y=|x-۱|+۲=\begin{cases}x-۱+۲ & ,x\ge ۱\\ -x+۱+۲ & ,x<۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+۱ & x\ge ۱\\ -x+۳ & x<۱\end{cases}$$



**مثال :** نمودار تابع $y = |x - ۲|$ را رسم کنید.




I $\quad x - ۲ = ۰ \Longrightarrow x = +۲$

II $\quad y = \begin{cases} x - ۲ \; ; & x \geq +۲ \\ -(x - ۲) \; ; & x < +۲ \end{cases}$

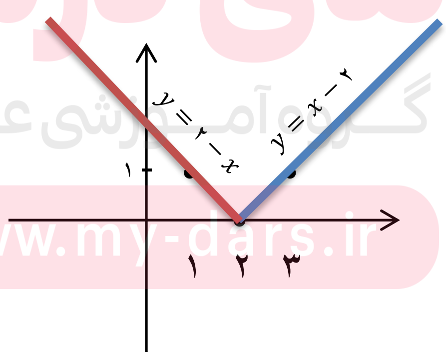
$\Longrightarrow y = \begin{cases} x + ۲ \; ; & x \geq +۲ \\ ۲ - x \; ; & x < +۲ \end{cases}$

III $\quad y = x - ۲ \; ; \quad x \geq +۲$

$\quad y = ۲ - x \; ; \quad x < ۲$

| $x$ | +۲ | ۳ |
|---|---|---|
| $y$ | ۰ | ۱ |

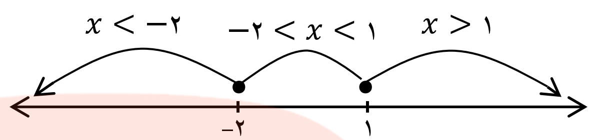
| $x$ | +۲ | ۱ |
|---|---|---|
| $y$ | ۰ | ۱ |



**مثال:** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

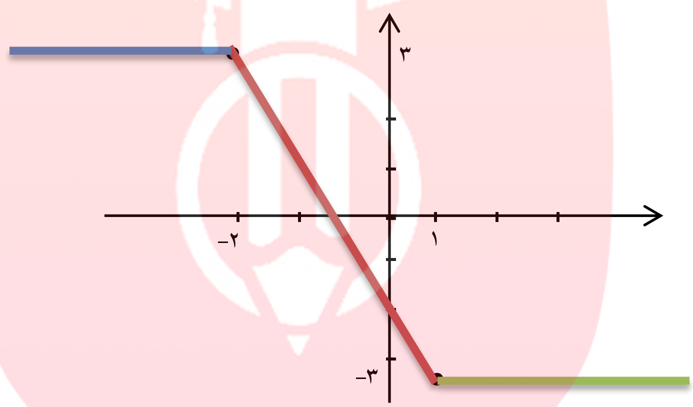
الف) $y = |x - ۱| - |x + ۲|$

I $\begin{cases} x - ۱ = ۰ \to x = ۱ \\ x + ۲ = ۰ \to x = -۲ \end{cases}$



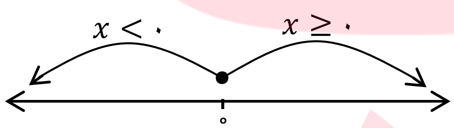

II $y = \begin{cases} (x - ۱) - (x + ۲) = -۳ & ; x > ۱ \\ -(x - ۱) - (x + ۲) = -۲x - ۱ & ; -۲ \leq x \leq ۱ \\ -(x - ۱) - \big(-(x + ۲)\big) = ۳ & ; x < -۲ \end{cases}$

III



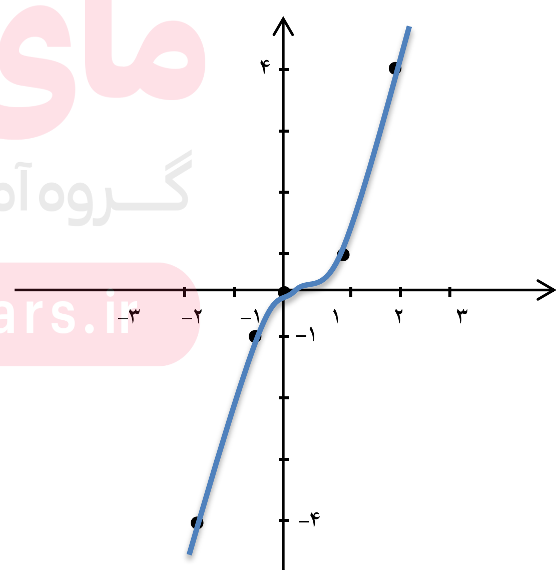

ب) $y = x|x|$

I $x = ۰$




II $y = \begin{cases} x(x) = x^۲ & x \geq ۰ \\ x(-x) = -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$

III



**تمرین :** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۳ - |x + ۱|$

ب) $y = x + |x|$

## روش سریع رسم نمودارهای توابع قدر مطلق (حالت‌های خاص)

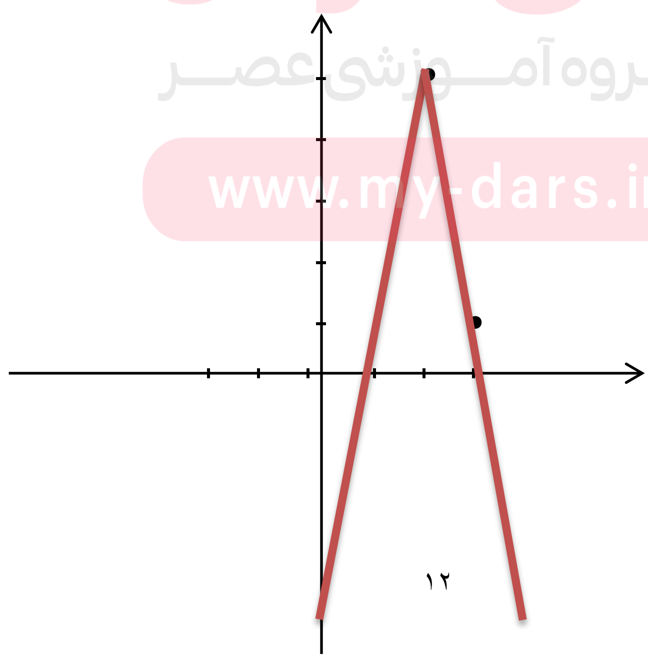
۱- توابع به فرم $y = a\,|\text{عبارت درجه یک}| \pm d$ (نمودار به فرم $\overset{a>۰}{۷}$ یا $\overset{a<۰}{۸}$ می‌شود)

ابتدا ریشه داخل قدر مطلق که همان رأس نمودار است را به دست می‌آوریم سپس یک عدد سمت راست ریشه و یک عدد سمت چپ ریشه (ترجیحاً با فواصل یکسان) می‌نویسیم و با توجه به نقاط به دست آمده نمودار را رسم می‌کنیم.

$y = -۲|۳x - ۶| + ۵$

$۳x - ۶ = ۰ \Longrightarrow x = ۲$

| $x$ | ۱ | ۲ (ریشه) | ۳ |
|---|---|---|---|
| $y$ | ۱- | ۵ | ۱- |



**مثال :** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

ب) $y = |۳ - ۲x|$

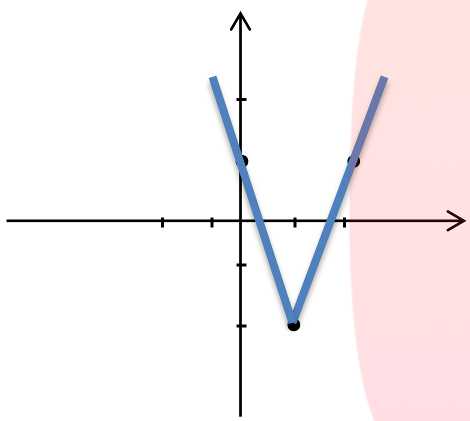
$۳ - ۲x = ۰ \rightarrow x = \frac{۳}{۲}$

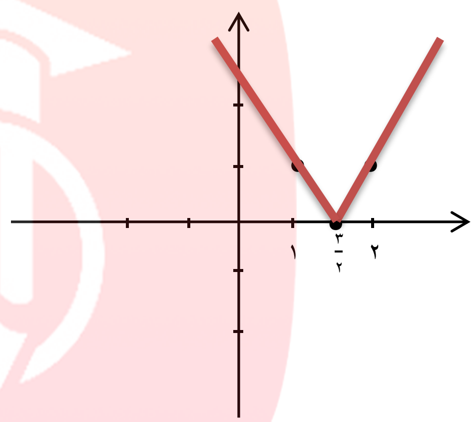
| | | رأس | |
|---|---|---|---|
| $x$ | ۱ | $\frac{۳}{۲}$ | ۲ |
| $y$ | ۱ | ۰ | ۱ |

الف) $y = ۳|x - ۱| - ۲$

$x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱$

| | | رأس | |
|---|---|---|---|
| $x$ | ۰ | ۱ | ۲ |
| $y$ | ۱ | -۲ | ۱ |






**تمرین:** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |x + ۲|$ ب) $y = -|x|$

پ) $y = |۲x|$ ت) $y = |۲x - ۳|$

ث) $y = ۲ - |x + ۳|$

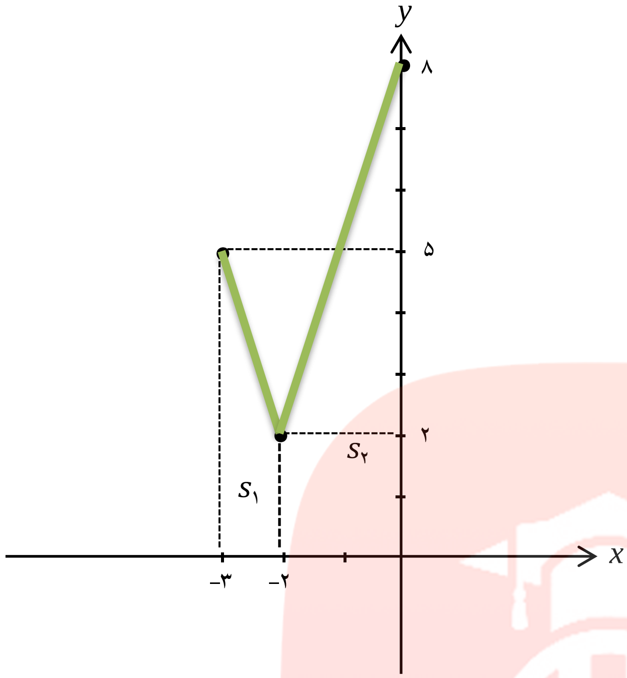
**مثال :** مساحت محدود به نمودار $f(x) = |۳x + ۶| + ۲$ و محور $x$ها در بازه‌ی $[-۳, ۰]$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۲}$ ۲) ۱۴ ۳) $\frac{۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲}$

$f(x) = |۳x + ۶| + ۲$

$۳x + ۶ = ۰ \Longrightarrow x = -۲$

| | اول بازه | رأس | آخر بازه |
|---|---|---|---|
| $x$ | -۳ | -۲ | ۰ |
| $f(x)$ | ۵ | ۲ | ۸ |




$\frac{۱}{۲} =$ مساحت ذوزنقه $\left(\text{مجموع قاعده‌ها}\right) \times$ ارتفاع

$$s_۱ = \frac{۱}{۲} \times (۲+۵) \times ۱ = \frac{۷}{۲}$$

$$s_۲ = \frac{۱}{۲} \times (۲+۸) \times ۲ = ۱۰$$

کل $s = s_۱ + s_۲ = \frac{۷}{۲} + ۱۰ = \frac{۲۷}{۲}$

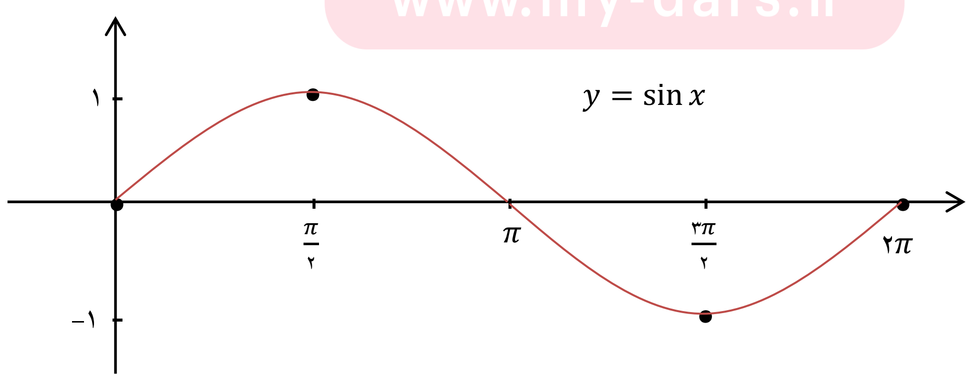
۲- توابع به فرم $y = |f(x)|$ ($y$ مثبت می‌شود)

ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم (قدر مطلق را در نظر نمی‌گیریم) سپس قسمت بالای محور $x$ها را نگه می‌داریم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x هاست ، تصویر آینه وار نمودار f(x) را نسبت به محور x ها رسم کنیم و قسمت پایین محور $x$ها را حذف می‌کنیم.

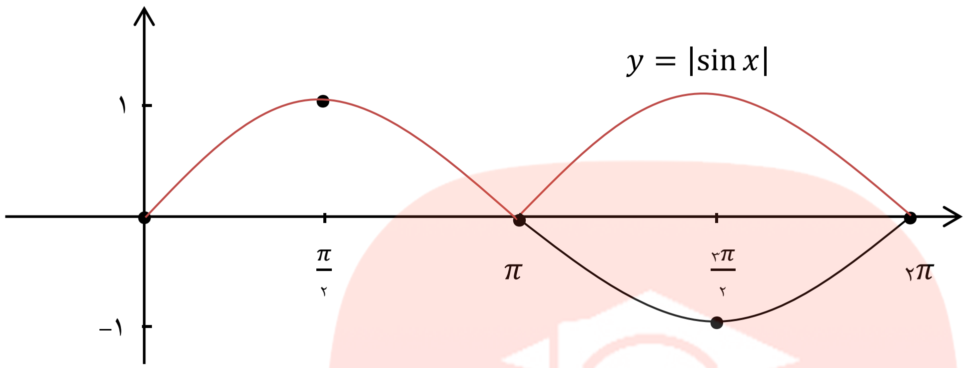
$y = |\sin x| \qquad ۰ \le x \le ۲\pi$

ابتدا تابع نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم می‌کنیم.

| $x$ | ۰ | $\frac{\pi}{۲}$ | $\pi$ | $\frac{۳\pi}{۲}$ | $۲\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | ۰ | ۱ | ۰ | -۱ | ۰ |



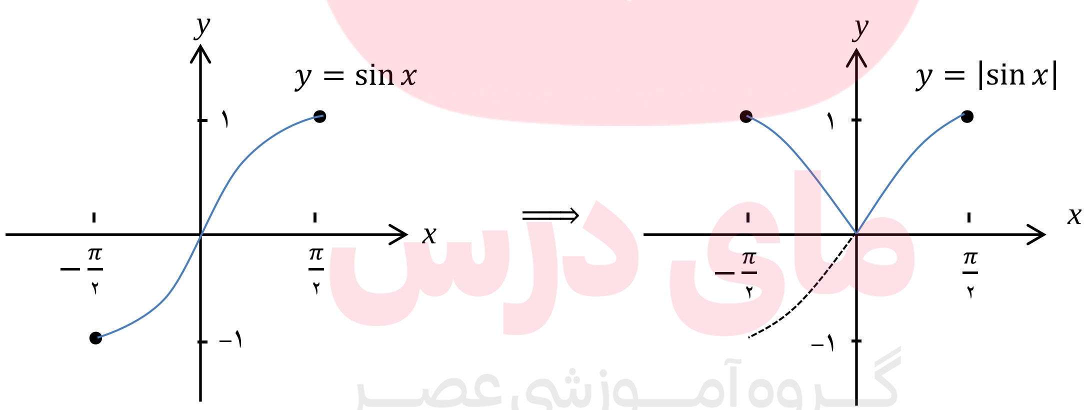
قسمت بالای محور $x$ها را نگه می‌داریم و قسمت پایین را نسبت به محور $x$ها قرینه می‌کنیم.




**مثال :** نمودار توابع زیر را رسم کنید.

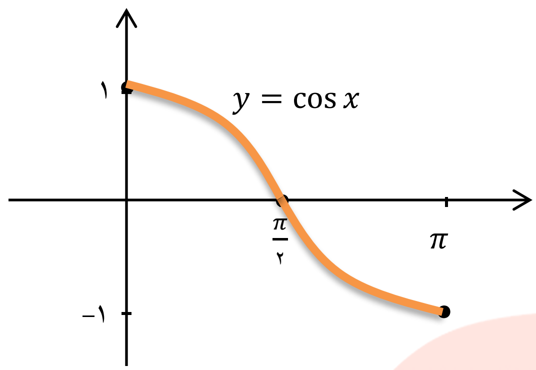
الف) $y = |\sin x|$ $\qquad -\frac{\pi}{۲} \le x \le \frac{\pi}{۲}$

| $x$ | $-\frac{\pi}{۲}$ | ۰ | $\frac{\pi}{۲}$ |
|---|---|---|---|
| $y = \sin x$ | -۱ | ۰ | ۱ |

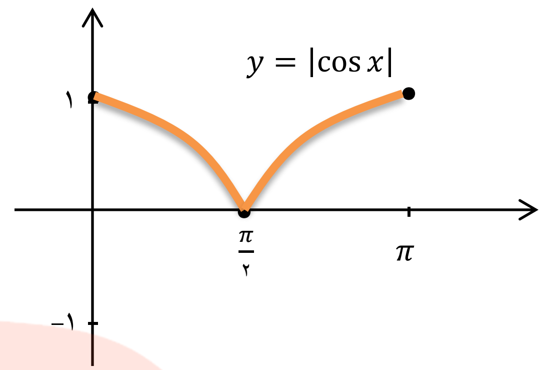



ب) $y = |\cos x|$ $\qquad ۰ \le x \le \pi$

| $x$ | ۰ | $\frac{\pi}{۲}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $y = \cos x$ | ۱ | ۰ | -۱ |

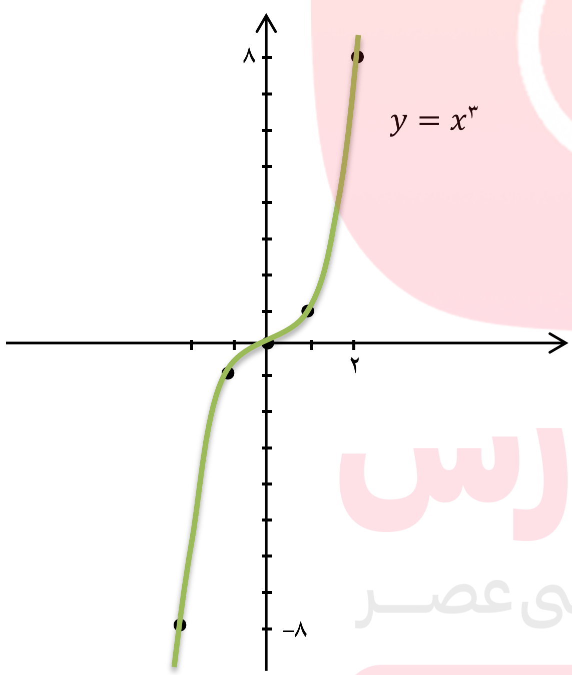


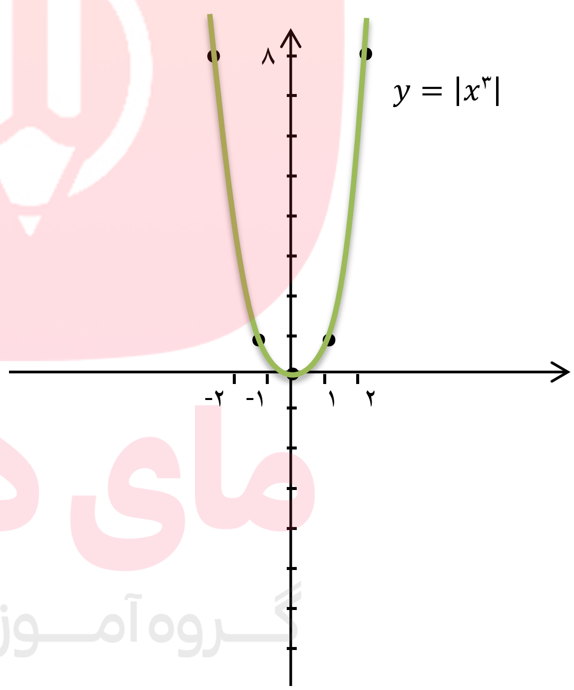

$\Longrightarrow$




پ) $y = |x^۳|$

| $x$ | -۲ | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^۳$ | -۸ | -۱ | ۰ | ۱ | ۸ |



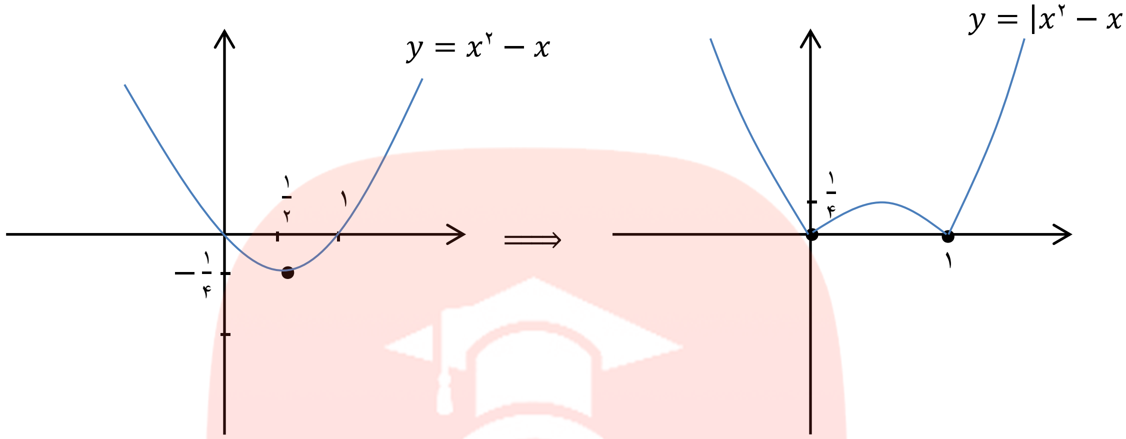



ت) $y = |x^۲ - x|$

$y = x^۲ - x$

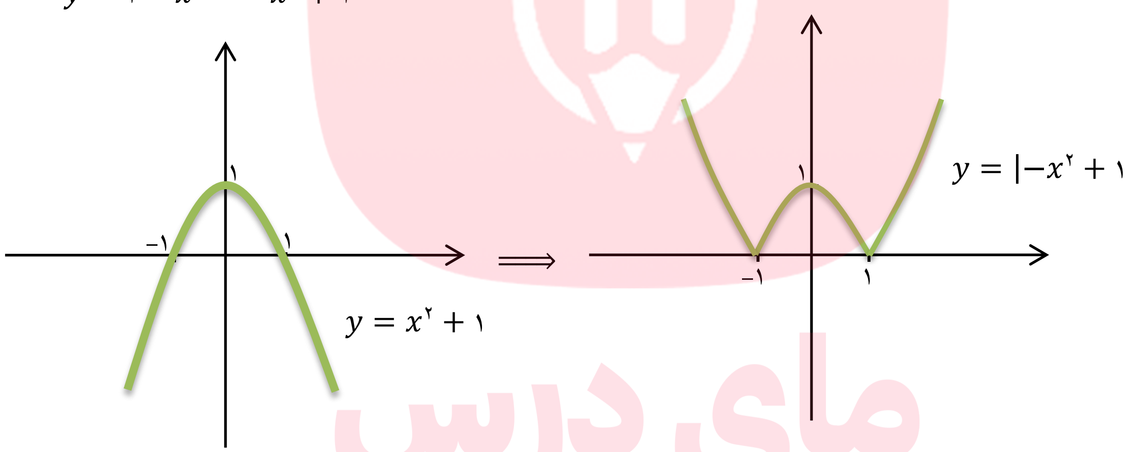
$x_s = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۱}{۲(۱)} = \frac{۱}{۲}$

| $x$ | ۰ | $\frac{۱}{۲}$ | ۱ |
|---|---|---|---|
| $y = x^{۲} - x$ | ۰ | $-\frac{۱}{۴}$ | ۰ |

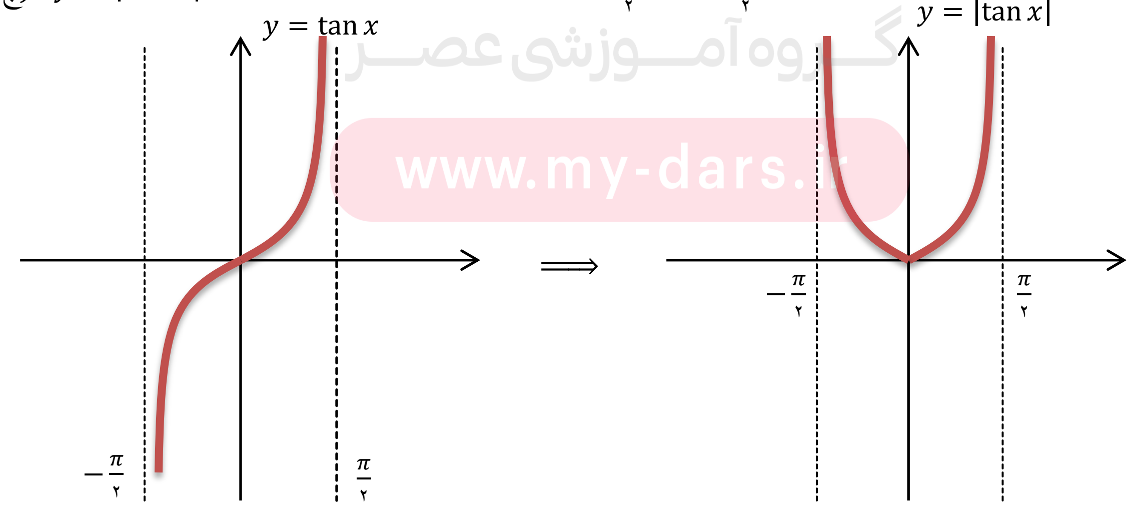



ث) $y = |۱ - x^{۲}|$

$y = ۱ - x^{۲} = -x^{۲} + ۱$

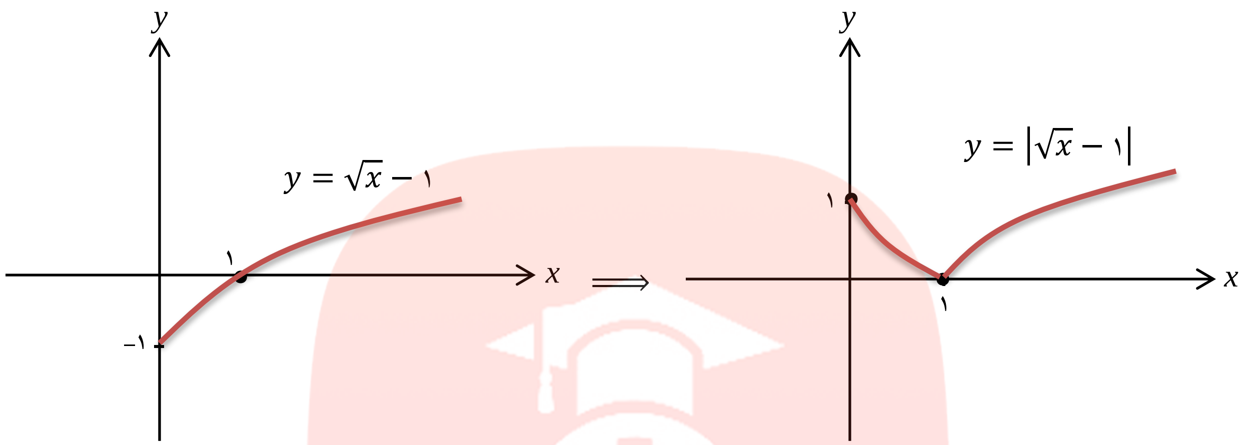



ج) $y = |\tan x|$ $\qquad -\frac{\pi}{۲} \leq x \leq \frac{\pi}{۲}$



**مثال :** نمودار $f(x) = \left|\sqrt{x} - ۱\right|$ را رسم کنید.

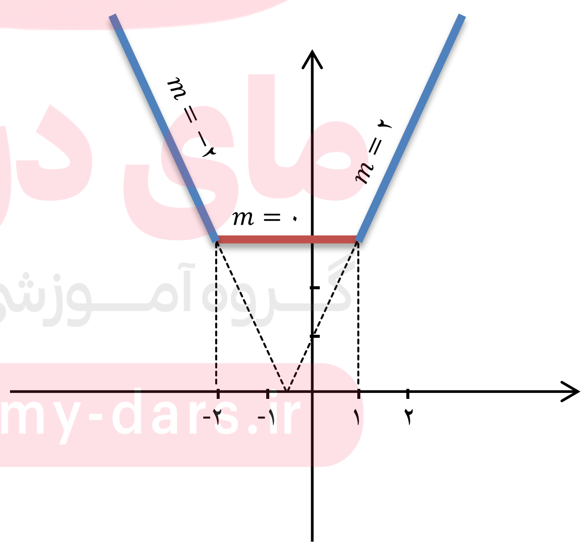
$y = \sqrt{x} - ۱$




۳- توابع به فرم $y = |x + a| + |x + b|$ (جمع دو قدر مطلق درجه یک) (**نمودارهای گلدانی**) ابتدا ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها را بدست می‌آوریم سپس مربعی به ضلع $|a - b|$ (فاصله بین ریشه‌ها) به سمت بالا رسم می‌کنیم ضلع بالایی مربع را پررنگ می‌کنیم تا کف گلدان مشخص سپس وسط ضلع مربع را بدست می‌آوریم از وسط ضلع مربع دو نیم خط رسم می‌کنیم.

$y = |x - ۱| + |x + ۲|$

$$\begin{cases} x - ۱ = ۰ \rightarrow x_۱ = ۱ \\ x + ۲ = ۰ \rightarrow x_۲ = -۲ \end{cases}$$



* معادله‌ی محور تقارن این نمودار $x = \frac{x_۱+x_۲}{۲}$ می‌باشد.

* طبق نمودار می‌توانیم برد نمودار ، صعودی یا نزولی بودن ، مساحت و ... را بدست آوریم.

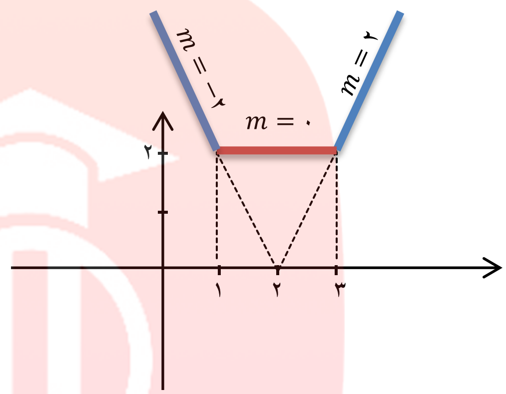
* اگر $x$ها ضریب یکسان داشته باشند همیشه گلدان درست می‌شود و به تعداد ضریب‌ها مربع (کاشی) درست می کنیم.

**مثال :** نمودار توابع زیر را رسم کنید. سپس برد هر کدام را مشخص کنید.

الف) $y = |x-۱| + |x-۳|$

$$\begin{cases} x-۱=۰ \to x=۱ \\ x-۳=۰ \to x=۳ \end{cases}$$

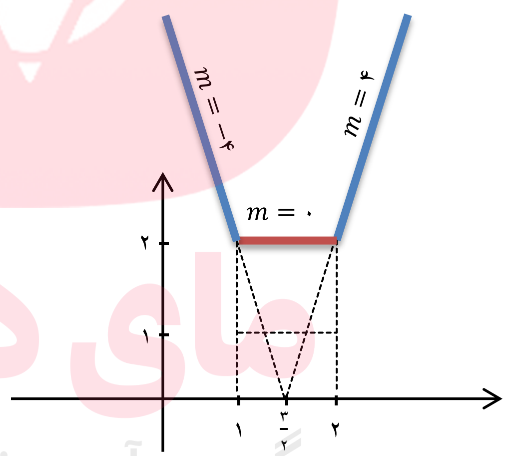
برد : $[۲,+\infty)$




ب) $y = |۲x-۲| + |۲x-۴|$

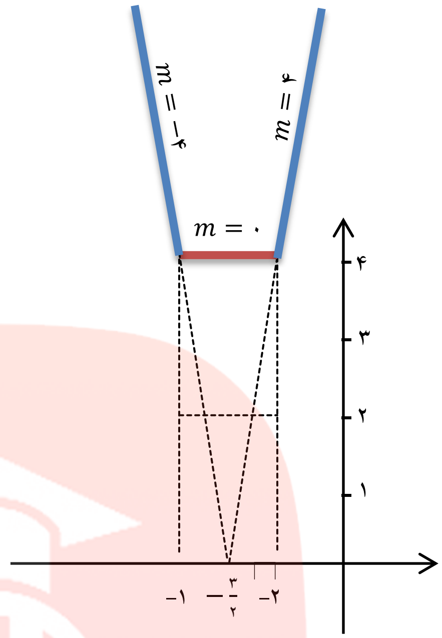
$$\begin{cases} ۲x-۲=۰ \to x=۲ \\ ۲x-۴=۰ \to x=۴ \end{cases}$$

برد : $[۲,+\infty)$



ب) $y = |۲x| + |۲x + ۴|$

$$\begin{cases} ۲x = ۰ \to x = ۰ \\ ۲x + ۴ = ۰ \to x = -۴ \end{cases}$$




برد : $[۴, +\infty)$

**مثال :** مساحت محصور بین نمودار $y = |x - ۲| + |x - ۴|$ و محور $x$ها و خطوط $x = ۳$ و $x = ۵$ چقدر است؟

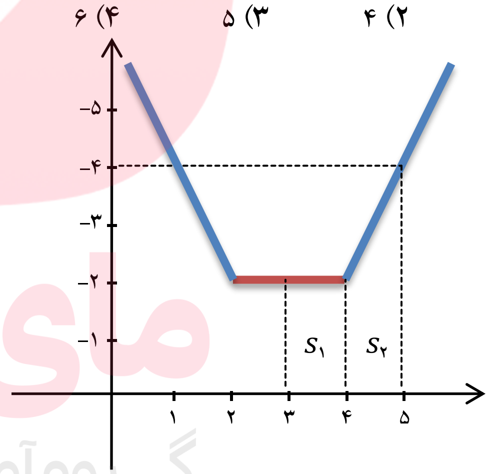
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$$\begin{cases} x - ۲ = ۰ \to x = ۲ \\ x - ۴ = ۰ \to x = ۴ \end{cases}$$

مساحت مستطیل $s_۱ = ۱ \times ۲ = ۲$

مساحت ذوزنقه $s_۲ = \frac{۱}{۲} \times (۲ + ۴) \times ۱ = ۳$

کل $s = s_۱ + s_۲ = ۲ + ۳ = ۵$




**تمرین :** برد تابع $y = |۳x| + |۳x + ۳|$ کدام است؟

۱) $[۰, +\infty)$ ۲) $(۰, +\infty)$ ۳) $[۳, +\infty)$ ۴) $(۰,۳)$

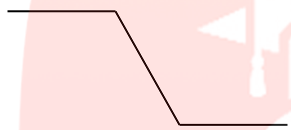
**تمرین:** شیب تابع $y = |x + ۱| + |x - ۲|$ در کدام بازه صفر است؟

۱) $[۰, +\infty]$ ۲) $(-\infty, -۱]$ ۳) $[-۱, ۲]$ ۴) R

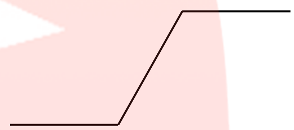
**تمرین:** مساحت محصور بین نمودار $y = |x - ۲| + |x - ۴|$ و محور $x$ها و خطوط $x = ۱$ و $x = ۴$ چقدر است؟

۱) ۴      ۲) ۵      ۳) ۶      ۴) ۷

۴- توابع به فرم $y = |x + a| - |x + b|$ (تفریق دو قدر مطلق) (**سرسره‌ای یا آبشاری**) ابتدا ریشه‌های داخل قدر مطلق را بدست می‌آوریم سپس یک مربع به ضلع $|a - b|$ به سمت بالا و یک مربع به سمت پایین رسم می‌کنیم که نمودار به یکی از صورت‌های زیر است.



یا



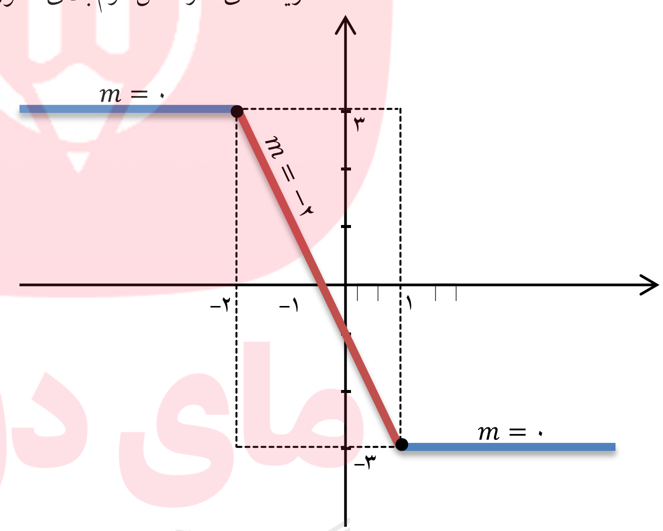
ریشه‌های قدر مطلق اولی زیر محور $x$هاست

ریشه‌های قدر مطلق دوم بالای محور $x$هاست

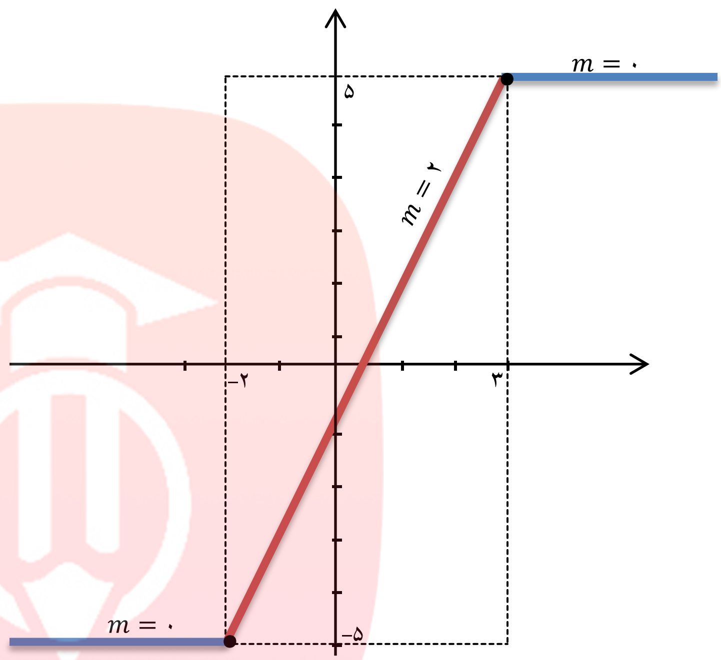
$$y = \overbrace{|x - ۱|} - \overbrace{|x + ۲|}$$

$$\begin{cases} x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \\ x + ۲ = ۰ \rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

برد : $[-۳, ۳]$



**مثال :** نمودار توابع زیر را رسم کنید سپس برد آن را مشخص کنید.




الف) $y=|x+۲|-|x-۳|$

$$\begin{cases} x+۲=۰ \to x=-۲ \to \text{زیر محور } x\text{ها} \\ x-۳=۰ \to x=۳ \to \text{بالای محور } x\text{ها} \end{cases}$$

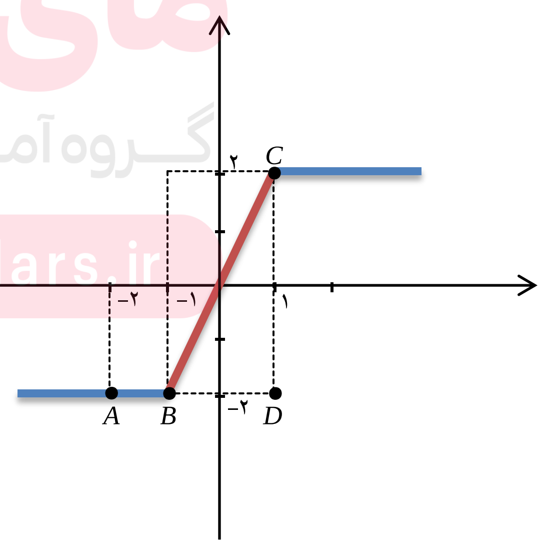
برد : $[-۵,۵]$

**مثال :** طول پاره خط شکسته تابع $f(x)=|x+۱|-|x-۱|$ در فاصله‌ی $[-۲,۱]$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}+۱$ ۲) $۲\sqrt{۵}+۱$ ۳) $\sqrt{۳}+۱$ ۴) $۲\sqrt{۳}+۱$

$$\begin{cases} x+۱=۰ \to x=-۱ \to \text{زیر محور } x\text{ها} \\ x-۱=۰ \to x=۱ \to \text{بالای محور } x\text{ها} \end{cases}$$

$|AB|=۱$
$|BC|=?$




رابطه‌ی فیثاغورث : $BC^۲=BD^۲+CD^۲$

$BC^۲=۲^۲+۴^۲=۲۰ \to BC=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$

طول پاره خط شکسته $=|AB|+|BC|=۱+۲\sqrt{۵}$

## ویژگی های قدر مطلق

در سال های قبل با برخی از ویژگی های قدر مطلق آشنا شده اید که عبارت اند از:

الف) $|x| \geq ۰$

ب) $\sqrt{x^۲} = |x|$

پ) $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ یا $x = -a \quad (a \geq ۰)$

ت) $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ یا $x = -a$

ث) $|-x| = |x|$

ج) $|x|^۲ = x^۲$

**فعالیت :** فرض کنید $a$ و $b$ عددهای حقیقی دلخواه باشند.

الف) از رابطه $\sqrt{a^۲} = |a|$ استفاده کنید و نشان دهید که:

$$|ab| = |a||b| \quad \rightarrow |ab| = \sqrt{(ab)^۲} = \sqrt{a^۲b^۲} = \sqrt{a^۲}\sqrt{b^۲} = |a||b|$$

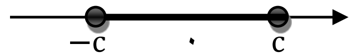
ب) با فرض $b \neq ۰$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید که:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \rightarrow |a| = \left|\frac{a}{b} \times b\right| = \left|\frac{a}{b}\right| |b| \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$$

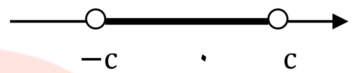
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^۲} = \sqrt{\frac{a^۲}{b^۲}} = \frac{\sqrt{a^۲}}{\sqrt{b^۲}} = \frac{|a|}{|b|}$$

**نکته :** فرض کنید $c$ یک عدد حقیقی نامنفی باشد. در این صورت داریم:

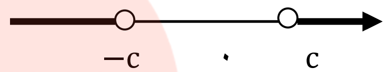
الف) $|x| \le c \,, (c \neq ۰) \quad \rightarrow \quad -c \le x \le c$




ب) $|x| < c$




پ) $|x| > c$




ت) $|x| \ge c$


**فعالیت:** برای هر عدد حقیقی $a$ نشان دهید که: $-|a| \le a \le |a|$

$$\begin{cases} a \ge ۰ & \rightarrow |a| = a \rightarrow -|a| \le a \\ a < ۰ & \rightarrow |a| = -a \rightarrow a \le |a| \end{cases} \Rightarrow -|a| \le a \le |a|$$

**فعالیت:** برای هر دو عدد حقیقی $a$ و $b$ ثابت کنید که: $-|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b|$

$$\begin{cases} -|a| \le a \le |a| \\ \underline{-|b| \le b \le |b|} \end{cases}$$

$$-|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b|$$

**فعالیت:** با استفاده از قسمت قبل «نامساوی مثلث» را برای هر دو عدد حقیقی $a$ و $b$ نتیجه بگیرید:

$$-|a| \le a \le |a|$$
$$\underline{-|b| \le b \le |b|}$$

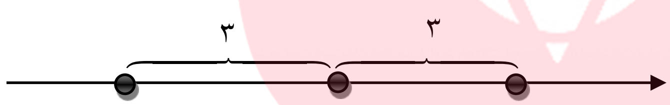
$$-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b| \rightarrow |a + b| \le \big||a| + |b|\big| \quad \rightarrow |a + b| \le |a| + |b|$$

## معادلات قدر مطلقی:

**حل معادلات قدر مطلقی**
- روش جبری
  - استفاده از تعریف قدرمطلق و تبدیل به تابع چندضابطه ای
  - استفاده از ویژگی‌ها
  - ابتکاری (معمولاً همان به توان ۲ رساندن است)
- روش هندسی
- روش رد گزینه‌ها (برای تست‌هایی که مجموعه جواب داده می‌شود)

**مسئله:** بر روی محور اعداد حقیقی فاصلهٔ چه نقاطی از نقطه ثابت ۷ برابر ۳ است؟

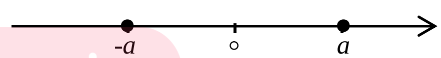
برای حل این مسئله شکل روبه رو را رسم می کنیم.




اگر طول نقطهٔ جواب مسئله را x بنامیم، شرط مسئله به این معناست که $|x-۷|=۳$، با استفاده از ویژگی های قدر مطلق

**I) ویژگی‌های قدر مطلق (حل معادلات)**

$$1)\quad |u|=a \begin{cases} \xrightarrow{a>0} \begin{cases} u=+a \\ u=-a \end{cases} \\ \xrightarrow[a<0]{} \text{جواب ندارد} \end{cases}$$




خواهیم داشت $x-۷=\pm۳$، و در نتیجه $x=۱۰$ و $x=۴$؛ و هر دو جواب های معادله هستند.

**مثال:** هر یک از عبارت های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

$$|x-۳|=۷ \rightarrow \begin{cases} x-۳=۷ & \rightarrow \quad x=۱۰ \\ x-۳=-۷ & \rightarrow \quad x=-۴ \end{cases}$$

ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است .

$$۲|x-۶|=۴ \rightarrow |x-۶|=۲ \rightarrow \begin{cases} x-۶=۲ & x=۸ \\ x-۶=-۲ & x=-۴ \end{cases}$$

جواب های معادله $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب های معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستندیعنی:

$$\boxed{\text{ویژگی 2)} \quad |f(x)|=|g(x)| \Longrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{cases}}$$

به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند معادلات قدر مطلقی می گویند.

مثال: معادله $|۳x-۲|=|x-۴|$ را حل کنید .

روش اول: با استفاده از ویژگی های قدر مطلق :

$$|۳x-۲|=|x-۴| \Longrightarrow \begin{cases} ۳x-۲=x-۴ \rightarrow x=-۱ \\ ۳x-۲=-(x-۴) \rightarrow x=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

روش دوم: با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $۹x^۲-۱۲x+۴=x^۲-۸x+۱۶$؛ و از آنجا

$۲x^۲-x-۳=۰$ جواب های این معادله ۱- و $\frac{۳}{۲}$ هستند.

**مثال:** معادله قدر مطلقی $|x-۱| = ۴ - ۳x$ را به سه روش زیر حل کنید.

روش اول: با استفاده از تعریف قدر مطلق (شرط ،چندضابطه ای کردن،کلی)

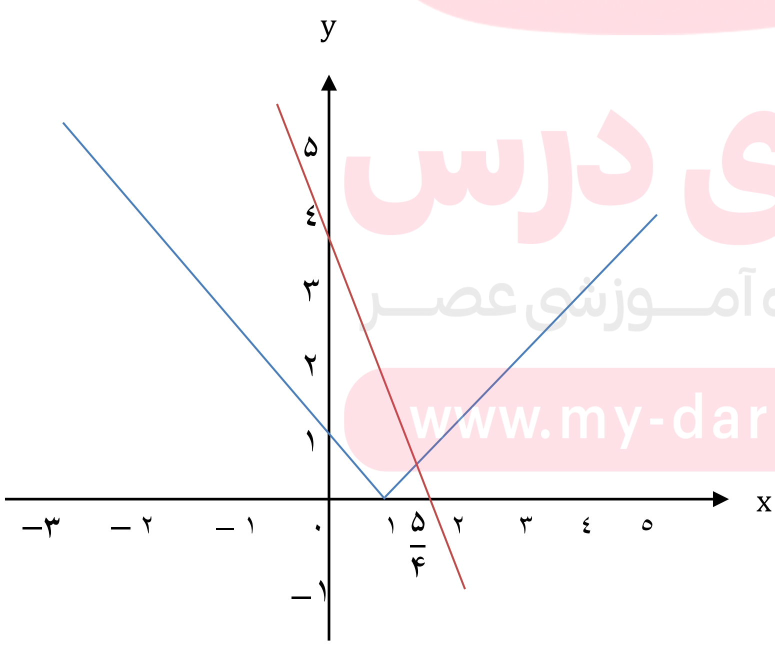
$$|x-۱| = \begin{cases} x-۱ & ,x \geq ۱ \\ -(x-۱) & ,x < ۱ \end{cases}$$

$$|x-۱| = ۴-۳x \implies \begin{cases} if \quad x \geq ۱ \implies x-۱ = ۴-۳x \implies x = \frac{۵}{۴} \xrightarrow{x\geq ۱} x = \frac{۵}{۴} \text{ ق ق} \\ if \quad x < ۱ \implies -(x-۱) = ۴-۳x \implies x = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{x<۱} x = \frac{۳}{۲} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

مجموعه جواب $= \left\{\frac{۵}{۴}\right\}$

روش دوم: ( روش هندسی)

ابتدا نمودار توابع $y = |x-۱|$ و $y = ۴-۳x$ را رسم می کنیم. طول محل تلاقی دو نمودار یعنی $x = \frac{۵}{۴}$ جواب معادله است.



روش سوم: ( به توان رساندن طرفین)

$$|x-۱| = ۴-۳x \quad \rightarrow \quad |x-۱|^{۲} = (۴-۳x)^{۲}$$

$$x^{۲} - ۲x + ۱ = ۱۶ - ۲۴x + ۹x^{۲} \rightarrow ۸x^{۲} - ۲۲x + ۱۵ = ۰$$

$$\frac{۱}{۸}(۸x-۱۲)(۸x-۱۰) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} ۸x = ۱۲ & x = \frac{۳}{۲} \ \text{غ ق} \\ ۸x = ۱۰ & x = \frac{۵}{۴} \ \text{ق ق} \end{cases}$$

**مثال :** ریشه‌های معادله‌ی $|۲x-۴| = ۶$ کدامند؟

۱) $\{۱,-۵\}$ ۲) $\{-۱,-۵\}$ ۳) $\{۱,۵\}$ ۴) $\{-۱,۵\}$

راه اول : روش جبری _ روش شرط

$$|۲x-۴| = ۶ \Longrightarrow \begin{cases} if \quad x \geq ۲ \Longrightarrow ۲x-۴ = ۶ \Longrightarrow x = ۵ \xrightarrow{x\geq ۲} x = ۵ \\ if \quad x \leq ۲ \Longrightarrow -۲x+۴ = ۶ \Longrightarrow x = -۱ \xrightarrow{x\leq ۲} x = -۱ \end{cases}$$

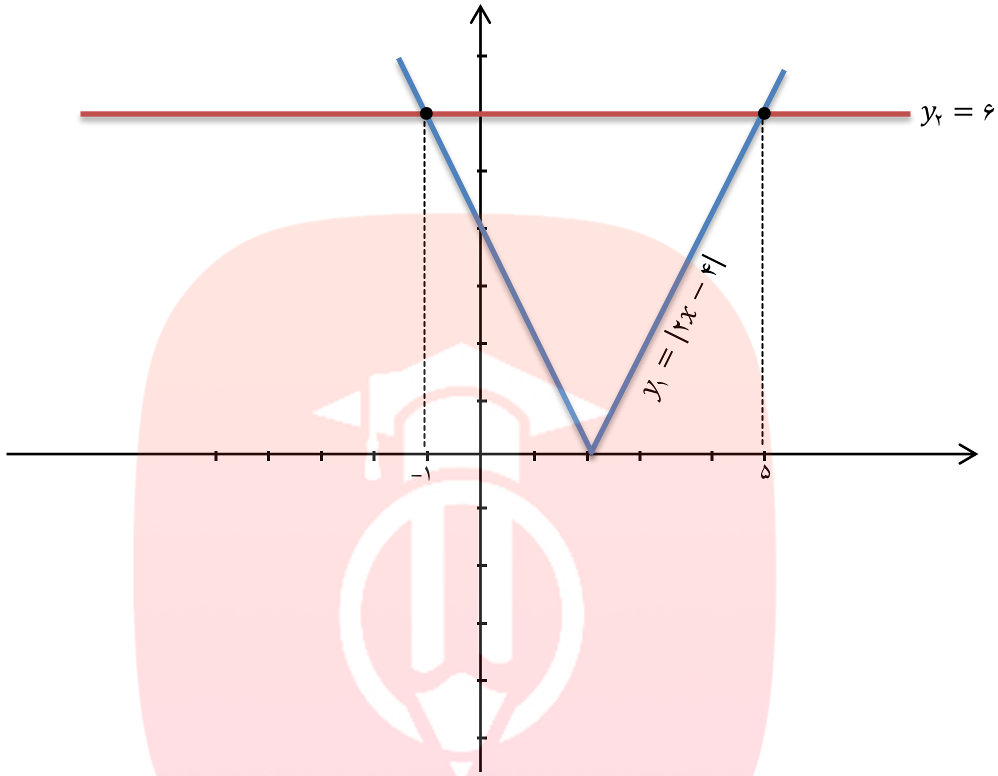
راه دوم : روش جبری _ استفاده از ویژگی‌ها

$$|۲x-۴| = ۶ \xrightarrow{|u|=a \Rightarrow u=\pm a} ۲x-۴ = \pm ۶ \Longrightarrow \begin{cases} ۲x-۴ = +۶ \Longrightarrow x = ۵ \\ ۲x-۴ = -۶ \Longrightarrow x = -۱ \end{cases}$$

راه سوم : روش جبری _ ابتکاری

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴x^{۲} - ۱۶x + ۱۶ = ۳۶ \Longrightarrow ۴x^{۲} - ۱۶x - ۲۰ = ۰$$
$$\Longrightarrow x^{۲} - ۴x - ۵ = ۰ \Longrightarrow (x-۵)(x+۱) = ۰ \Longrightarrow \begin{matrix} x = ۵ \\ x = -۱ \end{matrix}$$

راه چهارم : روش هندسی (بیشتر زمانی که تعداد ریشه‌ها را از ما بخواهد این روش بهتر است)




$$\underbrace{|۲x - ۴|}_{y_۱} = \underbrace{۶}_{y_۲} \Longrightarrow \begin{cases} y_۱ = |۲x - ۴| \\ y_۲ = ۶ \end{cases}$$

| $x$ | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|
| $y_۱$ | ۲ | ۰ | ۲ |

راه پنجم : حذف گزینه‌ها

**مثال :** معادله‌ی $|x - ۲| + |x + ۳| = ۵$ دارای چند ریشه است؟

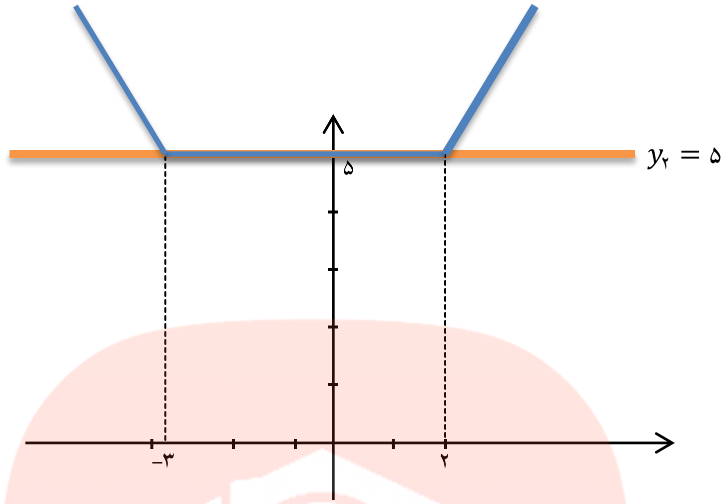
۱) ۰　　　۲) ۱　　　۳) ۲　　　۴) بیشمار

از روش هندسی استفاده می‌کنیم

$$y_۱ = |x - ۲| + |x + ۳| = ۵$$

$$\begin{cases} x - ۲ = ۰ \to x = ۲ \\ x + ۳ = ۰ \to x = -۳ \end{cases}$$

$$y_۲ = ۵$$




**مثال:** بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱− و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد؟


$|x-(-۱)|+|x-۳|=۶$

$$\begin{cases} -۲x+۲ & x\le -۱ \quad \to -۲x+۲=۶ \;\to -۲x=۴\to x=-۲ \text{ ق ق} \\ ۴ & -۱<x<۳ \\ ۲x-۲ & x\ge ۳ \to ۲x-۲=۶ \quad ۲x=۸ \quad x=۴ \text{ ق ق} \end{cases}$$

$\begin{vmatrix}-۲\\ ۰\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}۴\\ ۰\end{vmatrix}$

**مثال :** تعداد ریشه‌های معادله‌ی $|۲x-۱|=۵$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) بیشمار

$$\begin{cases} ۲x-۱=۵\to x=۳ \\ ۲x-۱=-۵\to x=-۲ \end{cases}$$

**مثال :** تعداد ریشه‌های معادله‌ی $|x^۲-۱|=۱$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

$$\begin{cases} x^۲-۱=۱ \to x^۲=۲ \to x=\pm\sqrt{۲} \\ x^۲-۱=-۱ \to x^۲=۰ \to x=۰ \end{cases}$$

**مثال :** مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\big||x-۱|-۲\big|-۳=۰$ کدام است؟

۱) ۰ ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۲ ‏ ۴) ۲-

$$\big||x-۱|-۲\big|=۳ \Rightarrow \begin{cases} |x-۱|-۲=+۳ \to |x-۱|=۵ \Longrightarrow \begin{cases} x-۱=۵ \to x=۶ \\ x-۱=-۵ \to x=-۴ \end{cases} \\ |x-۱|-۲=-۳ \to |x-۱|=-۱ \Longrightarrow \text{.جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} =۶+(-۴)=۲$$

**مثال :** مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{|۲x|}{|x+۱|}=۳$ کدام است؟

۱) $\left\{-\frac{۳}{۵},-۳\right\}$ ‏ ۲) $\{۳,-۲\}$ ‏ ۳) $\emptyset$ ‏ ۴) $\left\{-۳,\frac{۳}{۵}\right\}$

نکته : $\left|\frac{u}{v}\right|=\frac{|u|}{|v|}$

$$\frac{|۲x|}{|x+۱|}=\left|\frac{۲x}{x+۱}\right|=۳ \Longrightarrow \begin{cases} \frac{۲x}{x+۱}=۳ \to x=-۳ \\ \frac{۲x}{x+۱}=-۳ \to x=-\frac{۳}{۵} \end{cases}$$

**مثال :** مجموعه جواب معادله‌ی $|۲x+۴|=|x-۳|$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} x-۳=۲x-۴ \to x=۱ \\ x-۳=-(۲x-۴) \to x=\frac{۷}{۳} \end{cases}$$

**مثال :** تعداد جواب‌های معادله‌ی $|x+۱|=|x-۱|$ کدام است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۰ ‏ ۴) بیشمار

$$\begin{cases} x-۱=x+۱ \to -۱=۱ \qquad \text{غیر ممکن} \Longrightarrow \text{جواب}=\emptyset \\ x-۱=-(x+۱) \to x=۰ \end{cases}$$

**مثال :** کدامیک از گزینه‌های زیر در مورد وضعیت ریشه‌های معادله‌ی $|x^۲-۲x-۱|=|x^۲-۲x+۳|$ صحیح است؟

۱) ریشه حقیقی ندارد　　　　　۲) دو ریشه دارد

۳) مجموع ریشه‌های آن برابر یک است　　　　　۴) مجموع ریشه‌های آن برابر ۲ است

$$\begin{cases} x^2-2x+3=x^2-2x-1 \Longrightarrow 3=-1 \xrightarrow{\text{غیر ممکن}} \text{جواب}=\emptyset \\ x^2-2x+3=-(x^2-2x-1) \Longrightarrow 2x^2-4x+2=0 \xrightarrow[\text{یک ریشه‌ی مضاعف دارد}]{\Delta=0} s=-\frac{-4}{2}=2 \end{cases}$$

**مثال:** به روش جبری و با استفاده از ویژگی های قدر مطلق معادلهٔ $|x^2-1|=|2x-1|$ را حل کنید.

$$|x^2-1|=|2x-1| \begin{cases} \xrightarrow{\text{حالت اول}} x^2-1=2x-1 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=2 \\ \xrightarrow[\text{حالت دوم}]{} x^2-1=-(2x-1) \Rightarrow x^2+2x-2=0 \quad \Delta=12 \end{cases}$$

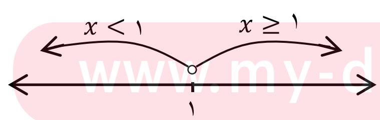
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{2}=-1\ ,\pm\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x=-1+\sqrt{3}\cong 0/73 \\ x=-1-\sqrt{3}\cong -2/73 \end{cases}$$

**نکته کاربردی : وقتی معادله یا نامعادله‌ای داخل قدر مطلق یک ریشه داشته باشد و بیرون قدر مطلق عبارت $x$دار داشته باشیم استفاده از تعریف قدرمطلق و تبدیل به تابع چندضابطه ای معمولاً بهترین روش است.**

**مثال :** تعداد ریشه‌های معادله‌ی $2x+|x-1|=1$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

$x-1=0 \rightarrow x=1$




$$\begin{cases} if \quad x\geq1 \Longrightarrow 2x+(x-1)=1 \rightarrow \boxed{x=\frac{2}{3}} \rightarrow \text{غیر قابل قبول چون باید } x\geq1 \text{ باشد} \\ if \quad x<1 \Longrightarrow 2x+\big(-(x-1)\big)=1 \rightarrow \boxed{x=0} \rightarrow \text{قابل قبول چون } x<1 \text{ است} \end{cases}$$

**مثال :** معادله های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۲-x}{|x-۳|}=۱ \xrightarrow{x\neq ۳} |x-۳|=۲-x \to \begin{cases} x\geq ۳ \to x-۳=۲-x \to ۲x=۵ \quad x=\frac{۵}{۲} \text{ غ ق ق} \\ x<۳ \to x-۳=x-۲ \to -۳=-۲ \quad \text{غیر ممکن} \end{cases}$

ب) $\sqrt{x^۲-۲x+۱}=۲x+۱ \to \sqrt{(x-۱)^۲}=۲x+۱ \to |x-۱|=۲x+۱$

$$\begin{cases} x\geq ۱ \to x-۱=۲x+۱ \to x=-۲ \quad \text{غ ق ق} \\ x<۱ \to x-۱=-۲x-۱ \to ۲x=۰ \to x=۰ \text{ ق ق} \end{cases}$$

**مثال:** معادلات قدر مطلقی زیر را حل کنید.

الف) $||x|-۱|=۵$ ب) $|۲x-۱|+|x|=۷$ ج) $x|x|=-۴$

حل:

الف) $||x|-۱|=۵ \Rightarrow \begin{cases} |x|-۱=۵ \\ |x|-۱=-۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x|=۶ \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ x=-۶ \end{cases} \\ |x|=-۴ \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$

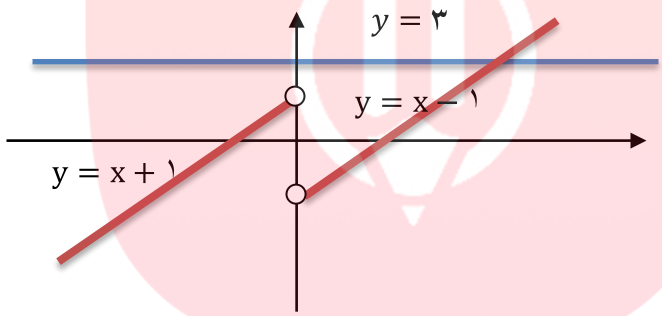
ب) $|۲x-۱|+|x|=۷ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱+x=۷ \quad x\geq \frac{۱}{۲} \\ -۲x+۱+x=۷ \quad ۰<x<\frac{۱}{۲} \\ -۲x+۱-x=۷ \quad x\leq ۰ \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۸}{۳} \quad x\geq \frac{۱}{۲} \\ x=-۶ \ (\text{غ ق ق}) \ ۰<x<\frac{۱}{۲} \\ x=-۲ \quad x\leq ۰ \end{cases}$$

$$ج)\ x|x| = -۴ \Rightarrow \begin{cases} x^{۲} = -۴ \quad \text{غیر ممکن} \quad , \quad x \geq ۰ \\ -x^{۲} = -۴ \quad , \quad x < ۰ \quad \Rightarrow x^{۲} = ۴ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \quad \text{غیر قابل قبول} \\ x = -۲ \end{cases} \end{cases}$$

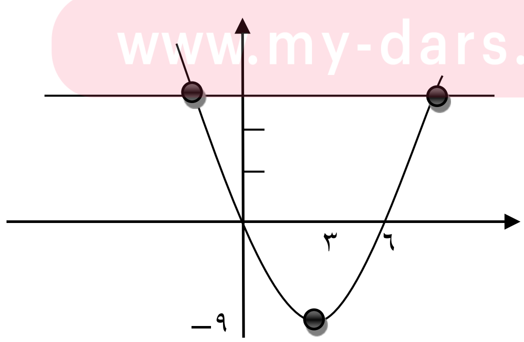
**مثال:** نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y = ۳$ معادله های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

$$الف)\ y = x - \frac{x}{|x|} \to \begin{cases} x - \frac{x}{x} = ۳ \quad x > ۰ \\ x - \frac{x}{-x} = ۳ \quad x < ۰ \end{cases} \to \begin{cases} x - ۱ = ۳ \to x = ۴ \quad \text{ق ق} \\ x + ۱ = ۳ \to x = ۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$




$$ب)\ y = x^{۲} - ۶x \to x^{۲} - ۶x = ۳\ , x^{۲} - ۶x - ۳ = ۰ , \Delta = ۴۸$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۶ \pm ۴\sqrt{۳}}{۲} = ۳ \pm ۲\sqrt{۳} \to \begin{cases} x = ۳ + ۲\sqrt{۳} \cong ۶/۴۶ \\ x = ۳ - ۲\sqrt{۳} \cong ۰/۴۶ \end{cases}$$



**تمرین:** نمودار تابع $f(x) = \left||x| - ۲\right|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = ۱$ را ، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

**تمرین:** نمودار تابع $f(x) = |x^۲ - ۲x|$ را رسم کنید ، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^۲ - ۲x| = ۲$ را حل نمایید.

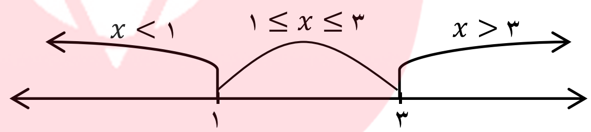
**حل نا معادلات قدر مطلقی**
- روش جبری
  - استفاده از تعریف قدرمطلق و تبدیل به تابع چندضابطه ای
  - استفاده از ویژگی‌ها
  - ابتکاری (معمولاً همان به توان ۲ رساندن است)
- روش هندسی
- روش رد گزینه‌ها (برای تست‌هایی که مجموعه جواب داده می‌شود)

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $|x-۳| > |x-۱|$ کدام است؟

۱) $(۲,+\infty)$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۳)$ ۴) $(۱,۳)$

راه اول : روش جبری _ روش شرط:

$$\underbrace{|x-۱|}_{x=۱\ \text{ریشه}} > \underbrace{|x-۳|}_{x=۳\ \text{ریشه}}$$




$$\begin{cases} x>۳ \Longrightarrow x-۱>x-۳ \Longrightarrow -۱>-۳ \rightarrow \boxed{۱<۳} \xrightarrow{\cap} x>۳ \\ ۱\le x\le ۳ \Longrightarrow x-۱>۳-x \Longrightarrow ۲x>۴ \rightarrow \boxed{x>۲} \xrightarrow[\cap]{۱\le x\le ۳} ۲<x\le ۳ \\ x<۱ \Longrightarrow ۱-x>-x+۳ \rightarrow \boxed{۱>۳}\ \text{غ ق ق} \xrightarrow{\cap} \emptyset \end{cases}$$

جواب نهایی : $x>۳ \cup ۲<x\le ۳ \Longrightarrow x>۲$

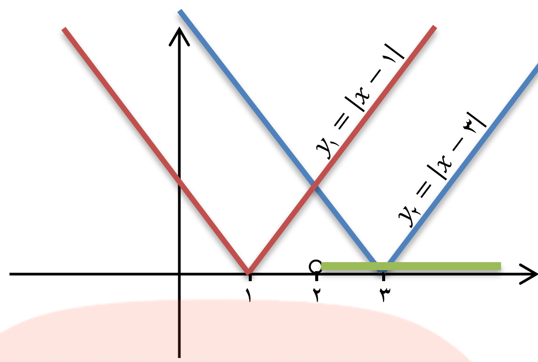
راه دوم : روش جبری استفاده از ویژگی‌ها و ابتکاری

$$|u| \lessgtr |v| \xrightarrow[\text{طرفین نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا قدرمطلق از بین برود .}]{\text{اگر طرفین نامعادله قدرمطلق داشته باشد}} u^{۲} \lessgtr v^{۲}$$

$$|x-۱|>|x-۳| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x-۱)^{۲}>(x-۳)^{۲} \Longrightarrow x^{۲}-۲x+۱>x^{۲}-۶x+۹ \Longrightarrow ۴x>۸ \rightarrow x>۲$$

راه سوم : روش هندسی

$$\underbrace{|x-۱|}_{y_۱} > \underbrace{|x-۳|}_{y_۲}$$



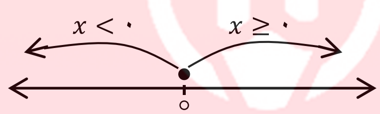

$y_۱ > y_۲ \Longrightarrow$ نمودار $y_۱$ بالای نمودار $y_۲$ است

راه چهارم : رد گزینه‌ها : با انتخاب $x = ۲$ (اختلاف گزینه‌های ۱ و ۲) گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ حذف می‌شوند.

**مثال :** مجموعه جواب نامعادلات زیر را بدست آورید؟

الف) $x|x| - ۵x - ۶ > ۰$

$x = ۰$



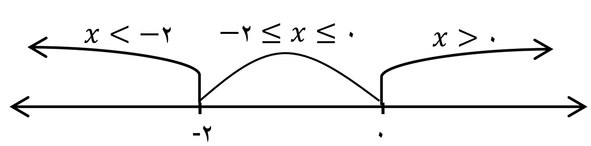

$$\begin{cases} if \quad x \geq ۰ \Longrightarrow x(x) - ۵x - ۶ > ۰ \to x^۲ - ۵x - ۶ > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \\ \qquad \{x \geq ۰\} \cap \{x < -۱ \cup x > ۶\} \to \boxed{x > ۶} \\ if \quad x < ۰ \Longrightarrow x(-x) - ۵x - ۶ > ۰ \to -x^۲ - ۵x - ۶ > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \\ \qquad \{x < ۰\} \cap \{-۳x < -۲ \cup x > ۶\} \to \boxed{-۳ < x < -۲} \end{cases}$$

| $x$ | | -۱ | | ۶ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲ - ۵x - ۶$ | $\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ | ۰ | - | ۰ | $\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ |

| $x$ | | -۳ | | -۲ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x^۲ - ۵x - ۶$ | - | ۰ | $\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ | ۰ | - |

جواب نهایی : $x > ۶ \cup -۳ < x < -۲$

ب) $|x + ۲| \leq ۴ - |x| \Longrightarrow \begin{cases} x + ۲ = ۰ \to \boxed{x = -۲} \\ x = ۰ \end{cases}$

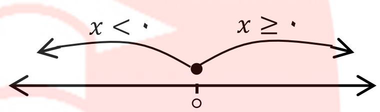


$$\begin{cases} if \quad \boxed{x > ۰} \Rightarrow x + ۲ \leq ۴ - x \rightarrow \boxed{x \leq ۱} \rightarrow \boxed{۰ < x \leq ۱} \\ if \quad \boxed{-۲ \leq x \leq ۰} \Rightarrow x + ۲ \leq ۴ - (-x) \rightarrow ۲ \leq ۴ \rightarrow \text{جواب همیشه درست} = \boxed{R} \Rightarrow \boxed{-۲ \leq x \leq ۰} \\ if \quad \boxed{x < -۲} \Rightarrow -(x + ۲) \leq ۴ - (-x) \rightarrow -۲x < ۶ \rightarrow \boxed{x > -۳} \rightarrow \boxed{-۳ < x < -۲} \end{cases}$$

جواب نهایی : $\{۰ < x \leq ۱\} \cup \{-۲ \leq x \leq ۰\} \cup \{-۳ < x < -۲\} = [-۳,۱]$

پ) $\dfrac{۳x^۲ - ۸|x| - ۳}{x^۲ + ۲x + ۳} \geq ۰$

$x = ۰$




$$\begin{cases} if\ x \geq \Rightarrow \dfrac{۳x^۲ - ۸x - ۳}{x^۲ + ۲x + ۳} \geq ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x - ۳ \rightarrow \\ \{x \geq ۰\} \cap \left\{x \geq ۳ \ U \ x \leq -\dfrac{۱}{۳}\right\} = x \geq ۳ \\ if\ x<۰ \Rightarrow \dfrac{۳x^۲ - ۸(-x) - ۳}{x^۲ + ۲x + ۳} \geq ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۸x - ۳ \\ \quad \{x<۰\} \cap \left\{x \leq -۳ \cup \ x \geq -\dfrac{۱}{۳}\right\} \rightarrow x \leq -۳ \\ \quad \text{جواب نهایی}\ x \geq ۳ \cup \ x \leq -۳ = R - (-۳,۳) \end{cases}$$

ت) $\left|۲x - ۳\right| + ۲\left|x - ۱\right| \geq ۱ \quad \begin{cases} ۲x - ۳ = ۰ \rightarrow x = \dfrac{۳}{۲} \\ x - ۱ = ۰ \rightarrow x = ۱ \end{cases}$

$$\begin{cases} if\ x>\dfrac{۳}{۲} \Rightarrow ۲x - ۳ + ۲(x - ۱) \geq ۱ \rightarrow x \geq \dfrac{۶}{۴} \Rightarrow x>\dfrac{۳}{۲} \\ ۱ \leq x \leq \dfrac{۳}{۲} \Rightarrow -(۲x - ۳) + ۲(x - ۱) \geq ۱ \Rightarrow ۲ \geq ۱ \rightarrow R \rightarrow ۱ \leq x \leq \dfrac{۳}{۲} \\ x<۱ \Rightarrow -(۲x - ۳) + ۲(-(x - ۱)) \geq ۱ \Rightarrow -۴x \geq -۴ \rightarrow x \leq ۱ \rightarrow x \leq ۱ \\ \quad \text{جواب نهایی} = x>\dfrac{۳}{۲} \cup \ ۱ \leq x \leq \dfrac{۳}{۲} \cup \ x \leq ۱ \ \Rightarrow R \end{cases}$$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $x|x-۴| < ۲x-۵$ به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی فیزیک ۹۲)

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۱-\sqrt{۶},۱+\sqrt{۶})$

۳) $(۱,۵)\cup(۱+\sqrt{۶},+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱-\sqrt{۶})\cup(۱,۵)$

$\mathrm{I}\; if, x \geq ۰ \Rightarrow x(x-۴)<۲x-۵ \Rightarrow x^۲-۶x+۵<۰ \to ۱<x<۵$

$\mathrm{II}\; if, x \leq ۰ \Rightarrow -x(x-۴)<۲x-۵ \Rightarrow x^۲-۲x-۵>۰ \begin{cases} x>۱+\sqrt{۶} \\ x<+۱-\sqrt{۶} \end{cases}$

اجتماع : $(-\infty,۱-\sqrt{۶})\cup(۱,۵)$

II) ویژگی‌های قدر مطلق (نامعادلات)

$$۱)\quad |u| \leq \overset{\text{عدد}}{a} \xRightarrow{a>۰} -a \leq u \leq a$$

$$\text{یعنی} \begin{cases} u \leq a \\ \cap \\ u \geq -a \end{cases}$$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-۱| \leq ۲$ کدام است؟

$-۲ \leq x-۱ \leq ۲ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۳$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{۲x-۳}{x+۲}\right| < ۱$ کدام است؟

۱) $(۵,+\infty)$ ۲) $(\frac{۱}{۳},+\infty)$ ۳) $(-\infty,\frac{۱}{۳})$ ۴) $(\frac{۱}{۳},۵)$

$$-۱<\frac{۲x-۳}{x+۲}<۱$$

$$\begin{cases} \frac{۲x-۳}{x+۲}<۱ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۲}-۱<۰ \Rightarrow \frac{x-۵}{x+۲}<۰ \\ \text{اشتراک} \\ \frac{۲x-۳}{x+۲}>-۱ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۲}+۱>۰ \to \frac{۳x-۱}{x+۲}>۰ \end{cases}$$

جواب نهایی : $\{-۲<x<۵\}\cap\left\{x<-۲\cup x>\frac{۱}{۳}\right\}=\left(\frac{۱}{۳},۵\right)$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $\left||x|-۱\right| \leq ۲$ کدام است؟

۱) $[-۱\,,۱]$ ۲) $[-۲\,,۲]$ ۳) $[-۳\,,۳]$ ۴) $[-۴\,,۴]$

$$\left||x|-۱\right| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq |x| - ۱ \leq ۲ \to -۱ \leq |x| \leq ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۱ \leq |x| \to \text{قدر مطلق همواره از منفی بزرگتر است} \Rightarrow \text{همیشه} = R \\ |x| \leq ۳ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۳ \end{cases}$$

جواب نهایی : $R \cap -۳ \leq x \leq ۳ \to -۳ \leq x \leq ۳$

**مثال** : مجموعه جواب نامعادله $\left||x+۲|-۱\right| \leq ۳$ شامل چند عدد صحیح است؟ (جواب:۹)

$$-۳ \leq |x+۲| - ۱ \leq ۳ \Longrightarrow -۲ \leq |x+۲| \leq ۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲ \leq |x+۲| \to \text{قدر مطلق همیشه از منفی بزرگتر است پس همیشه برقرار است} \Rightarrow \text{جواب} = R \\ \text{و} \\ |x+۲| \leq ۴ \Rightarrow -۴ \leq x+۲ \leq ۴ \Rightarrow -۶ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

جواب نهایی : $R \cap -۶ \leq x \leq ۲ = -۶ \leq x \leq ۲$

**مثال :** اگر $|x-۱| < ۲$، آن گاه حاصل $y = |۲x+۳| + ۲|x-۳|$ را بدست آورید؟

جواب :۹

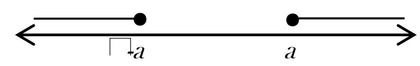
$$|x-۱| < ۲ \to -۲ < x-۱ < ۲ \to -۱ < x < ۳$$
$$y = |۲x+۳| + ۲|x-۳| = ۲x+۳+۲\big(-(x-۳)\big) = ۹$$

**مثال :** اگر نامساوی $۱۰ < x < ۲۰$ معادل $|x-\alpha| < \beta$ باشد $\alpha \times \beta$ کدام است؟

۱)۵۵ ۲)۶۵ ۳)۷۵ ۴)۸۵

$$-\beta < x-\alpha < \beta \Rightarrow \begin{cases} -\beta+\alpha < x < \beta+\alpha \\ ۱۰ < x < ۲۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\beta+\alpha = ۱۰ \\ \beta+\alpha = ۲۰ \end{cases} \to \begin{matrix} \alpha = ۱۵ \\ \beta = ۵ \end{matrix}$$

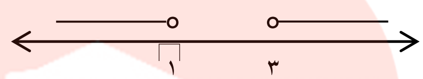
$$2)\quad |\boldsymbol{u}| \geq \boldsymbol{a} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{u} \leq -\boldsymbol{a} \end{cases} \cup$$




مثال ۳۸: مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-۲|>۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

$$\begin{cases} x-۲>۱ \Rightarrow x>۳ \\ \text{یا} \\ x-۲<-۱ \Rightarrow x<۱ \end{cases}$$




**مثال:** عبارت زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک نامعادله بنویسید و جواب را به دست آورید.

– فاصله بین x و ۳- بزرگ تر از ۲ است.

$$|\mathrm{x}-(-۳)|>۲ \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x}+۳>۲ \rightarrow x>-۱ \\ \mathrm{x}+۳<-۲ \rightarrow x<-۵ \end{cases}$$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{۱}{x}\right|>۱$ کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{۱}{x}>۱ \Rightarrow \frac{۱}{x}-۱>۰ \Rightarrow \frac{x-۱}{x}>۰ \Rightarrow ۰<x<۱ \\ \text{یا} \\ \frac{۱}{x}<-۱ \Rightarrow \frac{۱}{x}+۱<۰ \Rightarrow \frac{x+۱}{x}<۰ \Rightarrow -۱<x<۰ \end{cases}$$

جواب نهایی : $x \in (-۱,۰) \cup (۰,۱)$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right|>۱$ به صورت کدام بازه است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) $\left(-۳,\frac{۱}{۲}\right) \cup \left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳}\right)$ ۲) $\left(-۲,-\frac{۱}{۲}\right) \cup \left(-\frac{۱}{۲},۱\right)$

۳) $\left(-۳,-\frac{۱}{۲}\right)$ ۴) $\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳}\right)$

روش اول :

$$D = R - \left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{جهت عوض نمی‌شود}]{\times|۲x+۱|} \frac{|x-۲|}{|۲x+۱|} > ۱ \longrightarrow |x-۲| > |۲x+۱|$$

$$\xRightarrow{(\ )^۲} x^۲ - ۴x + ۴ > ۴x^۲ + ۴x + ۱$$
$$\Rightarrow ۳x^۲ + ۸x - ۳ < ۰$$

| $x$ | | $-۳$ | | $\frac{۱}{۳}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $۳x^۲ + ۸x - ۳$ | + | ۰ | - | ۰ | + |

جواب : $\left(-۳, \frac{۱}{۳}\right) - \left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$

روش دوم :

$$if \quad |u| > a \Rightarrow \begin{cases} u > a \\ u < -a \end{cases} > \text{اجتماع}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-۲}{۲x+۱} > ۱ \Rightarrow \dfrac{x-۲}{۲x+۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \dfrac{-x-۳}{۲x+۱} > ۰ \\ \qquad\qquad\qquad \cup \\ \dfrac{x-۲}{۲x+۱} < -۱ \Rightarrow \dfrac{x-۲}{۲x+۱} + ۱ < ۰ \Rightarrow \dfrac{۳x-۱}{۲x+۱} < ۰ \end{cases}$$

| $x$ | | $-۳$ | | $-\frac{۱}{۲}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-x-۳$ | + | ۰ | - | | - |
| $۲x+۱$ | - | | - | ۰ | + |
| | - | ۰ | $\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ | ت ن | - |

| $x$ | | $-\frac{۱}{۲}$ | | $\frac{۱}{۳}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $۳x-۱$ | - | | - | ۰ | + |
| $۲x+۱$ | - | ۰ | + | | + |
| | + | ت ن | $\underbrace{-}_{\text{جواب}}$ | ۰ | + |

جواب نهایی : $\left(-۳, -\frac{۱}{۲}\right) \cup \left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}\right)$

**مثال :** اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^۲ - x > ۶$ را به صورت $|x - \alpha| > \beta$ نشان دهیم حاصل $\alpha - \beta$ کدام است؟ جواب ۲-

$$x^۲ - x > ۶ \longrightarrow x^۲ - x - ۶ > ۰$$

| $x$ | | $-۲$ | | $+۳$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲ - x - ۶$ | + | ۰ | - | ۰ | + |

جواب : $\begin{cases} x > ۳ \\ \cup \\ x < -۲ \end{cases}$

$$|x-\alpha|>\beta \rightarrow \begin{cases} x-\alpha>\beta \rightarrow \\ \cup \\ x-\alpha<-\beta \rightarrow \end{cases} \begin{cases} x>\beta+\alpha \xrightarrow{x>۳} \beta+\alpha=۳ \\ x<-\beta+\alpha \xrightarrow{x<-۲} -\beta+\alpha=-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{۱}{۲}}\,,\boxed{\beta=\frac{۵}{۲}}$$

**مثال:** مجموعه جواب نامعادله‌ی $|۳x-۲|<۲x+۱$ کدام است؟

روش شرط بهتر است
$$\begin{cases} if \quad x\geq\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۳x-۲<۲x+۱\rightarrow x<۳\Rightarrow \frac{۲}{۳}\leq x<۳ \\ if \quad x\leq\frac{۲}{۳}\Rightarrow -(۳x-۲)<۲x+۱\Rightarrow -۵x<-۱\rightarrow x>\frac{۱}{۵}\Rightarrow \frac{۱}{۵}<x<\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

جواب نهایی: $\frac{۲}{۳}\leq x<۳ \quad \cup \quad \frac{۱}{۵}<x\leq\frac{۲}{۳}\Rightarrow \frac{۱}{۵}<x<۳$

**نکته کاربردی : وقتی معادله یا نامعادله‌ای داخل قدر مطلق یک ریشه داشته باشد و بیرون قدر مطلق عبارت $x$دار داشته باشیم استفاده از تعریف قدرمطلق و تبدیل به تابع چندضابطه ای معمولاً بهترین روش است.**

**مثال :** در مجموعه جواب نامعادله‌ی $|۲x-۳|\leq x$ چند عدد صحیح وجود دارد؟

۱) ۱     ۲) ۲     ۳) ۳     ۴) بیشمار

روش شرط
$$\begin{cases} if\ x\geq\frac{۳}{۲}\Rightarrow \quad ۲x-۳\leq x\rightarrow \quad x\leq ۳\rightarrow \qquad \frac{۳}{۲}\leq x\leq ۳ \\ if\ x\leq\frac{۳}{۲}\Rightarrow \quad -۲x+۳\leq x\rightarrow \quad x\geq ۱\rightarrow \qquad ۱\leq x\leq\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

**مثال :** جواب نامعادله ی $x|x|<x^۲-x$ را بدست آورید؟

$$\begin{cases} if\ x\geq ۰\Rightarrow x<x^۲-x \ \rightarrow ۰<x^۲-۲x \\ \quad \{x\geq ۰\}\cap\{x<۰\cup x>۲\}=x>۲ \\ if\ x<۰\Rightarrow \ -x<x^۲-x \ \rightarrow ۰<x^۲ \\ \qquad \{x<۰\}\cap\{R-\{۰\}\}=x<۰ \end{cases}$$

جواب نهایی: $\{x>۲\}\cup\{x<۰\}=R-[۰,۲]$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله $|۹ - ۲x| > ۴x$ کدام است؟

۱) $x < ۰$ ۲) $x < -۴/۵$ ۳) $x > ۱/۵$ ۴) $x < ۱/۵$

$$\begin{cases} if \quad \boxed{x \geq \frac{۹}{۲}} \Rightarrow -(۹ - ۲x) > ۴x \longrightarrow -۲x > ۹ \longrightarrow \boxed{x < -\frac{۹}{۲}} = \emptyset \\ if \quad \boxed{x \leq \frac{۹}{۲}} \Rightarrow ۹ - ۲x > ۴x \longrightarrow -۶x > -۹ \longrightarrow \boxed{x < \frac{۳}{۲}} \Rightarrow \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

روش شرط بهتر است

جواب نهایی : $\emptyset \cup x < \frac{۳}{۲} = x < \frac{۳}{۲}$

**نکته : اگر دو طرف قدر مطلق داشتیم به توان ۲ می‌رسانیم و قدر مطلق را برمی‌داریم.**

$$|u| \mathop{\lessgtr} |v| \xRightarrow{\text{به توان 2 می‌رسانیم}} u^2 \mathop{\lessgtr} v^2$$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x| > |x - ۱|$ کدام است؟

جواب : $x < \frac{۱}{۲}$

$$|x - ۱| > |x| \xRightarrow{(\ )^۲} (x - ۱)^۲ > x^۲ \longrightarrow x^۲ - ۲x + ۱ > x^۲ \longrightarrow -۲x + ۱ > ۰ \longrightarrow \boxed{x < \frac{۱}{۲}}$$

**مثال :** اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی $\big||x| - ۴\big| > |x + ۱|$ بصورت $(a\,, b)$ باشد $a \times b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۱۵}{۲}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $-\frac{۱۵}{۴}$

$$|x + ۱| < \big||x| - ۴\big| \xRightarrow{(\ )^۲} (x + ۱)^۲ < (|x| - ۴)^۲ \longrightarrow x^۲ + ۲x + ۱ < |x|^۲ - ۸|x| + ۱۶$$
$$\Rightarrow ۲x + ۱ < -۸|x| + ۱۶ \Rightarrow ۲x + ۸|x| < ۱۵$$

$$\begin{cases} if \quad x \geq ۰ \Rightarrow ۲x + ۸x < ۱۵ \Rightarrow x < \frac{۳}{۲} \xrightarrow{x < \frac{۳}{۲} \cap x \geq ۰} x \in \left[۰\,, \frac{۳}{۲}\right) \\ if \quad x \leq ۰ \Rightarrow ۲x - ۸x < ۱۵ \Rightarrow x > -\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\cap} x \in \left(-\frac{۵}{۲}\,, ۰\right) \end{cases}$$

$$\cup\!\longrightarrow x \in \left(-\frac{۵}{۲}\,, \frac{۳}{۲}\right) = (a\,, b)$$

**نکته :** اگر از طرفین یک تساوی یا نامساوی رادیکال بافرجه زوج بگیریم برای هر دو طرف آن قدر مطلق می-گذاریم

$$u^{۲n} \overset{>}{\underset{<}{=}} v^{۲n} \xrightarrow{\sqrt[۲n]{\;}} |u| \overset{>}{\underset{<}{=}} |v|$$

**مثال :** نامعادله‌ی $(x-۳)^۲ < ۶۴$ را حل کنید.

$$(x-۳)^۲ < ۶۴ \xRightarrow{\sqrt{\;}} |x-۳| < |۸| \Rightarrow |x-۳| < ۸ \Rightarrow -۸ < x-۳ < ۸ \Rightarrow -۵ < ۵ < ۱۱$$

نتیجه :

$$\boxed{\begin{array}{c} \sqrt[۲n]{u^{۲n}} = |u| \\ \sqrt[۲n+۱]{u^{۲n+۱}} = u \end{array}}$$

**مثال:** مجموعه ی جواب معادله ی $\sqrt{(x-۲)^۲} = ۲ - \mathrm{x}$ را بیابید.

$$\sqrt{(x-۲)^۲} = ۲ - \mathrm{x}$$

$$|x-۲| = ۲ - x \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x} - ۲ = ۲ - \mathrm{x} \Rightarrow \mathrm{x} = ۲ & , \quad \mathrm{x} \geq ۲ \\ -(\mathrm{x}-۲) = \mathrm{x} - ۲ \quad \text{بدیهی} & , \quad \mathrm{x} < ۲ \end{cases} \rightarrow \text{مجموعه ی جواب} = (-\infty, ۲]$$

**مثال :** اگر $۰ < a < ۱$ باشد حاصل عبارت $\sqrt{a^۲ + ۱ - ۲\sqrt{a^۲}}$ کدام است؟

۱) $a - ۱$ ۲) $۱ - a$ ۳) $-۱ - a$ ۴) $a + ۱$

$$\sqrt{a^۲ + ۱ - ۲\sqrt{a^۲}} = \sqrt{a^۲ + ۱ - ۲|a|} \xrightarrow{۰<a<۱} \sqrt{a^۲ + ۱ - ۲a} = \sqrt{a^۲ - ۲a + ۱} = \sqrt{(a-۱)^۲}$$
$$= |a-۱| \xrightarrow{۰<a<۱} -(a-۱) = -a + ۱ = ۱ - a$$

**مثال :** اگر $a < ۰ < b$ و $|a| > |b|$ باشد حاصل عبارت $\sqrt{a^۲ + b^۲ + ۲ab} - \sqrt{a^۲ + b^۲ - ۲ab}$ کدام است؟

۱) $۲a$ ۲) $۲b$ ۳) $-۲a$ ۴) $-۲b$

$$\sqrt{a^۲+b^۲+۲ab}=\sqrt{(a+b)^۲}=|a+b|\xrightarrow{\text{فرض می‌کنیم } b=۱\,,a=-۲}-(a+b)=-a-b$$

$$\sqrt{a^۲+b^۲-۲ab}=\sqrt{(a-b)^۲}=|a-b|\xrightarrow{\text{فرض می‌کنیم } b=۱\,,a=-۲}-(a-b)=-a+b$$

$$\sqrt{a^۲+b^۲+۲ab}-\sqrt{a^۲+b^۲-۲ab}=(-a-b)-(-a+b)=-۲b$$

**مثال :** با شرط $x^۲<x$ حاصل عبارت $\sqrt{x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲}+\sqrt{x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲}$ کدام است؟

۱) ۲     ۲) $\frac{۲}{x}$     ۳) $۲x$     ۴) ۴

$$x^۲<x\longrightarrow x^۲-x<۰$$

| $x$ | | $-۲$ | | $+۳$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^۲-x$ | + | ۰ | $\underbrace{-}_{\text{جواب}}$ | ۰ | + |

$\boxed{۰<x<۱}$

$$\sqrt{x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲}=\sqrt{\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲}=\left|x+\frac{۱}{x}\right|\xrightarrow[\text{فرض می‌کنیم } x=\frac{۱}{۲}]{۰<x<۱}x+\frac{۱}{x}$$

$$\sqrt{x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲}=\sqrt{\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۲}=\left|x-\frac{۱}{x}\right|\xrightarrow[\text{فرض می‌کنیم } x=\frac{۱}{۲}]{۰<x<۱}-\left(x+\frac{۱}{x}\right)=-x+\frac{۱}{x}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲}+\sqrt{x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲}=\left(x+\frac{۱}{x}\right)+\left(-x+\frac{۱}{x}\right)=\frac{۲}{x}$$

$$\underbrace{|u|+|v|\geq|u+v|}_{\text{نامساوی مثلث}}\Rightarrow\begin{cases}|u|+|v|=|u+v| & (u.v\geq ۰)\ u \text{ و } v \text{ هم علامت باشند}\\ |u|+|v|>|u+v| & (u.v<۰)\ u \text{ و } v \text{ هم علامت نباشند}\end{cases}$$

**مثال :** مجموعه جواب معادله‌ی $|۲x-۵|=|x-۳|+|x-۲|$ کدام است؟

$$\underbrace{|x-۲|}_{u}+\underbrace{|x-۳|}_{v}=\underbrace{|۲x-۵|}_{u+v}\xrightarrow{u \text{ و } v \text{ هم علامتند}}(x-۲)(x-۳)\geq ۰\Rightarrow$$

| $x$ | | ۲ | | ۳ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | ۰ | - | ۰ | + |

نکته: درمعادلات و نامعادلات اگر هم زمان سه تا قدرمطلق داشتیم به احتمال زیاد باید از نامساوی مثلث استفاده کنیم.

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{۱}{۲}x-۱\right|+\left|\frac{۱}{۲}x+۱\right|>|x|$ کدام است؟

۱) $(-۲\,,۲)$ ۲) $R-[-۲\,,۲]$ ۳) $R-(-۲\,,۲)$ ۴) $\{\pm۲\}$

$$\left|\underbrace{\frac{۱}{۲}x-۱}_{u}\right|+\left|\underbrace{\frac{۱}{۲}x+۱}_{v}\right|>\left|\left(\underbrace{\frac{۱}{۲}x-۱}_{u}\right)+\left(\underbrace{\frac{۱}{۲}x+۱}_{v}\right)\right|$$

$$u.v<۰\Rightarrow\left(\frac{۱}{۲}x-۱\right)\left(\frac{۱}{۲}x+۱\right)<۰$$

| $x$ | | $-۲$ | | $۲$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{۱}{۲}x-۱$ | - | | - | ۰ | + |
| $\frac{۱}{۲}x+۱$ | - | ۰ | + | | + |
| | + | | $\underbrace{-}_{\text{جواب}}$ | | + |

جواب : $(-۲\,,۲)$

**مثال :** مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x+۱|+|x+۳|<|۲x+۴|$ کدام است؟

$$\left|\underbrace{x+۱}_{u}\right|+\left|\underbrace{x+۳}_{v}\right|<\left|\underbrace{۲x+۴}_{u+v}\right|\xrightarrow{|u|+|v|\geq|u+v|}x\in\emptyset$$

**مثال :** مجموعه جواب معادله‌ی $|۲x-۲|+|x-۳|=|x+۱|$ کدام است؟

۱) $[-۱\,,۳]$ ۲) $[۱\,,۳]$ ۳) $[-۳\,,۱]$ ۴) $[-۳\,,-۱]$

نکته : $\boxed{|-u|=|u|}$

$$|x-۳|=|-(x-۳)|=|۳-x|$$

$$\left|\underbrace{۲x-۲}_{u}\right|+\left|\underbrace{x-۳}_{v}\right|=\left|\underbrace{x+۱}_{u+v}\right|$$

$$(۲x-۲)(۳-x)\geq۰$$

| $x$ | | $۱$ | | $۳$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $۲x-۲$ | - | ۰ | + | | + |
| $۳-x$ | + | | + | ۰ | - |
| | - | ۰ | $\underbrace{+}_{\text{جواب}}$ | | - |

**نکته :** توان داخل قدرمطلق را می‌توان به بیرون از آن انتقال داد

$|u^n| = |u|^n$

**مثال :** مجموع جواب‌های $(x-۳)^۲ - ۷|x-۳| + ۶ = ۰$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $-۶$ ۳) ۱۲ ۴) $-۱۲$

$$(x-۳)^۲ - ۷|x-۳| + ۶ = ۰ \xrightarrow{(x-۳)^۲ = |(x-۳)^۲| = |x-۳|^۲} |x-۳|^۲ - ۷|x-۳| + ۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{|x-۳| = t} t^۲ - ۷t + ۶ = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} t = ۱ \\ t = ۶ \end{cases}$$

$|x-۳| = t$

$$\begin{cases} t = ۱ \longrightarrow |x-۳| = ۱ \Longrightarrow \begin{cases} x-۳ = ۱ \longrightarrow x = ۴ \\ x-۳ = -۱ \longrightarrow x = ۲ \end{cases} \\ t = ۶ \longrightarrow |x-۳| = ۶ \Longrightarrow \begin{cases} x-۳ = ۶ \longrightarrow x = ۹ \\ x-۳ = -۶ \longrightarrow x = -۳ \end{cases} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها : $۴ + ۲ + ۹ - ۳ = ۱۲$

---