

محاسبه حد یازدهم ریاضی

سؤال ۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} (\sqrt{3} \cos x - \sin x)$ کدام است؟

$$\sqrt{2} \quad (۴)$$

$$\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

با ضرب و تقسیم یک عدد ۲ ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{12}} \frac{-(\sin x - \sqrt{3} \cos x)}{\cos \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

نکته: برای حل حدهای مثلثاتی می‌توانیم از اتحادهای زیر کمک بگیریم.

$$۱) \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$۲) 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$۳) 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$۴) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

سؤال ۲: اختلاف حد چپ و راست تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1 + \cos \pi x}}{\sin \pi x}$ در نقطه $x = 1$ چقدر است؟

$$۲ \quad (۴)$$

$$\sqrt{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

به کمک اتحادهای $1 + \cos \pi x = 2 \cos^2 \frac{\pi x}{2}$ و $\sin \pi x = 2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \frac{\pi x}{2}}}{2 \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2} \left| \cos \frac{\pi x}{2} \right|}{2 \cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{\sqrt{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{2 \cos \frac{\pi x}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

به طور مشابه هر چپ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. بنابراین اختلاف هر چپ و راست برابر $\sqrt{2}$ است. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2}$

سؤال ۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲

از اتحاد $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{-(\sin x - \cos x) \cos x (\cos x + \sin x)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}} = -1 \end{aligned}$$

سؤال ۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 4x}{\cot x - \tan x}$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -1

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به اتحاد $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{2 \cot 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos 2x}{2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = 1$$

سؤال ۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه ۲

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)}{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} (\cos x - \sin x) \times (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})}{2 (\cos x - \sin x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$$

سؤال ۶: مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}$ برابر است با:

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$ زیرا:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = 1 + \sin 2x$$

از طرفی می دانیم $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ پس:

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 = \left(\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)^2 = 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4} \right)} \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4} \right)} \frac{2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} = 2$$

قضیه فشردگی:

اگر در ی همسایگی محذوف a رابطه $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ برقرار باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

www.my-dars.ir

سؤال ۷: برای هر $x \neq 2$ رابطه $x^2 - 1 < f(x) + x < x^2 - 1 - x$ برقرار است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

طبق فرض رابطه $x^2 - 1 < f(x) + x < x^2 - 1 - x$ برقرار است چون $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1 - x) = 1$ پس

طبق قضیه فشردگی $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.

سؤال ۸: تابع $y = (x^2 - 1)[x]$ در چند نقطه از بازه $(-2, 2)$ حد ندارد؟

سه (۴)

دو (۳)

یک (۲)

هیچ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

تابع $[x]$ در نقاطی که x صحیح است حد ندارد؛ یعنی نقاط $x = -1, 0, 1$ ولی چون $x^2 - 1$ در نقاط $x = -1, x = 1$ برابر صفر است لذا تابع $y = (x^2 - 1)[x]$ در این نقاط حد دارد. بنابراین تابع داده شده فقط در $x = 0$ حد ندارد.

سؤال ۹: نشان دهید: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

پاسخ: می دانیم $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ پس تابع $y = \sin \frac{1}{x}$ کران دار است و چون $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ، پس طبق قضیه تابع کران دار $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ است.

سؤال ۱۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x [\tan x]$ را بیابید.

پاسخ: فرض کنید $\tan x = \frac{1}{a}$ در این صورت $a \rightarrow 0$ و با توجه به وجود a در صفر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x [\tan x] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \frac{\cos x}{\sin x} [\tan x] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \times \lim_{a \rightarrow 0} a \left[\frac{1}{a} \right] = 1 \times 1 = 1$$

سؤال ۱۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \left[\frac{1}{x - 2} \right]$ کدام است؟

۴ (۴)

گروه آموزشی عصر

۲ (۲)

۱ (۱)

www.my-dars.ir

پاسخ: گزینه ۴

از تغییر متغیر $x - 2 = t$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)(x - 2) \left[\frac{1}{x - 2} \right] = 4 \times \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \left[\frac{1}{x - 2} \right] = 4 \times \lim_{t \rightarrow 0} t \left[\frac{1}{t} \right] = 4 \times 1 = 4$$

روش دوم: استفاده از رابطه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

در بخش قبل مشاهده کردید که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ به طور مشابه می توان روابط زیر را نیز اثبات نمود.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نکته: در حالت کلی تر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan kx}{kx} = 1$

به طور مثال برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ صورت و مخرج را در ۳ ضرب می کنیم. به $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)$ می رسم حاصل

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right) = 3 \times 1 = 3 \text{ پس برابر ۱ است. پس } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$$

سؤال ۱۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin x}{x + \sin x}$ چقدر است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پون $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ است پس $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ است. حال صورت و مخرج را بر x تقسیم می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{\sin x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{3+1}{1+1} = 2$$

سؤال ۱۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$ برابر است با:

-√۲ (۴)

√۲ (۳)

-√۲ / ۲ (۲)

√۲ / ۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

به کمک اتحاد مثلثاتی $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 \sin^2 x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{2} \sin x}{x} = -\sqrt{2} \times 1 = -\sqrt{2}$$

نکته: طبق قضیه فشردگی داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right] = 1$

سؤال ۱۴: حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

پاسخ: صورت و مخرج را در $1 + \cos x$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{2} (1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

پاسخ: از اتحاد $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \times \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1 \times \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$$

دقت کنید حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ در قسمت ۱ به یک روش دیگر حل شده است.

روش سوم: تغییر متغیر:

در این روش با تغییر مناسب متغیر حد مورد نظر را به یک حد ساده‌تر تبدیل می‌کنیم و سپس حد جدید را محاسبه می‌کنیم.

به طور مثال برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ از تغییر متغیر $2x = t$ استفاده می‌کنیم وقتی $x \rightarrow 0$ آنگاه $t \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\frac{t}{2}} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2 \times 1 = 2$$

تذکر: در عباراتی شبیه $\sin f(x)$ وقتی $f(x) \rightarrow 0$ از تغییر متغیر $t = f(x)$ استفاده می‌کنیم.

سؤال ۱۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$ را بیابید.

پاسخ: فرض کنید $t = \sqrt{x} - 1$ در این صورت $t \rightarrow 0$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

تذکر: وقتی $x \rightarrow a$ از تغییر متغیر $x - a = t$ استفاده می کنیم. در این صورت $t \rightarrow 0$. در سوالات مثلثاتی این تغییر

متغیر بسیار سودمند است.

سؤال ۱۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin 3x}$ برابر کدام است؟

(۱) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ (۲) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

پاسخ: گزینه ۱

قرار می دهیم $t = x - \pi$ پس $t \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin 3x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + \cos(t + \pi)}}{\sin 3(t + \pi)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{-\sin 3t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \sin^2 \frac{t}{2}}{-\sin 3t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{t}{2}}{-\sin 3t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\sqrt{2} \frac{\sin \frac{t}{2}}{t} \times \frac{t}{\sin 3t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \right) \left(\frac{1}{3} \frac{3t}{\sin 3t} \right)$$

$$= -\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

سؤال ۱۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \tan \frac{x}{2}$ برابر است با:

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -2 (۴) 2

پاسخ: گزینه ۳

با تغییر متغیر $x - \pi = t$ داریم:

$$x - \pi = t \Rightarrow x = t + \pi \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{t}{2}$$

$$x \rightarrow \pi \Leftrightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \tan \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\cot \frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{-\tan \frac{t}{2}} = -2$$

تذکر: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

سؤال ۱۸: اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{k |\cos x|}{2x - \pi} = \frac{1}{3}$ آنگاه مقدار k کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{5} \quad (3)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$-\frac{5}{6} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow |\cos x| = -\cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{k |\cos x|}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-k \cos x}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-k \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{-2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

سؤال ۱۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ چقدر است؟

$$\frac{16}{\pi} \quad (4)$$

$$\frac{8}{\pi} \quad (3)$$

$$\frac{4}{\pi} \quad (2)$$

$$\frac{2}{\pi} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

قرار می دهیم $t = x - 2$ پس $x \rightarrow 0$ و داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{(x + 2)}_4 (x - 2) \cot\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= \lim_{t \rightarrow 0} 4t \cot\left(\frac{\pi}{2}(2+t)\right) = \lim_{t \rightarrow 0} 4t \cot\left(\pi + \frac{\pi}{2}t\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} 4t \cot\frac{\pi}{2}t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t}{\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t}{\frac{\pi}{2}t} = \frac{8}{\pi} \end{aligned}$$

سؤال ۲۰: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} (x - a) \tan \frac{\pi}{4}x$ برابر عدد حقیقی b باشد مقدار $a + b\pi$ کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \tan \frac{\pi}{4}x = \infty$ پس شرط لازم برای وجود هر آن است که $\lim_{x \rightarrow 2} (x - a) = 0$ باشد پس $a = 2$ است قرار

می دهیم. $t = x - 2$ در این صورت $t \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) &= \lim_{t \rightarrow 0} (t + 2 - 2) \tan\left(\frac{\pi}{4}(t + 2)\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}t\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-t \cot \frac{\pi}{4}t\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{\tan \frac{\pi}{4}t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-4}{\pi} \left(\frac{\frac{\pi}{4}t}{\tan \frac{\pi}{4}t}\right) = -\frac{4}{\pi} \times 1 = -\frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

بنابراین $b = -\frac{4}{\pi}$ در نتیجه $a + b\pi = 2 - 4 = -2$

روش چهارم: هم ارزی: □

در همسایگی a تابع $f(x)$ را با یک چند جمله ای هم ارز می نامیم. هرگاه نمودار آنها تقریباً بر هم منطبق باشند (رفتاری کاملاً شبیه هم داشته باشند) در این صورت می توانیم در محاسبه حد به جای $f(x)$ هم ارز آن را جایگزین کنیم. هم ارزی های مهم: وقتی $u \rightarrow 0$ توابع هم ارز مهم به صورت زیر می باشند. (~ نماد هم ارزی است).

۱) $\sin u \sim u$

۲) $\tan u \sim u$

۳) $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$

۴) $\cos^m u \sim 1 - m \frac{u^2}{2}$

۵) $(1+u)^n \sim 1 + nu$

۶) $\sqrt[n]{1+u} \sim 1 + \frac{1}{n}u$

سؤال ۲۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$ را بیابید. □

پاسخ: به جای $\cos x$ هم ارز آن $1 - \frac{x^2}{2}$ و به جای $\tan x$ از هم ارز آن x استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{xx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

سؤال ۲۲: با فرض $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \sqrt{\cos x}}{x^2} = -\frac{1}{4}$ مقدار a کدام است؟ □

±۴ (۴)

±۳ (۳)

±۲ (۲)

±۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

از هم ارزی $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{a^2 x^2}{2} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{x^2}$$

حال از هم ارزی $\sqrt[n]{1+u} \sim 1 + \frac{1}{n}u$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{a^2 x^2}{2} - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2a^2 + 1}{4} x^2 = \frac{-2a^2 + 1}{4}$$

پس $a = \pm 1$ و $\frac{-2a^2 + 1}{4} = -\frac{1}{4}$

سؤال ۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} \frac{\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ برابر است با:

(۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۱

$$\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$1 + \sin 2x = 1 + 2 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2$$

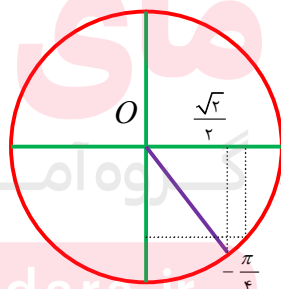
در یک همسایگی راست $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ متلاض بازه $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$ ، $\cos x$ مثبت و $\sin x$ منفی است اما قدرمطلق $\cos x$

بیشتر از قدرمطلق $\sin x$ است پس حاصل $\sin x + \cos x$ در این همسایگی مثبت است. به دایره مثلثاتی دقت کنید:

در این همسایگی مقدار قدرمطلق $\cos x$ از قدرمطلق $\sin x$ بیشتر است زیرا هر مقدار به محور کسینوس ها نزدیک می شویم

کسینوس به ۱ نزدیک می شود.

$$-\frac{\pi}{4} < x < 0 \Rightarrow |\sin x + \cos x| = \sin x + \cos x$$



یک همسایگی راست $-\frac{\pi}{4}$

با توجه به توضیحات فوق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} \frac{\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)}{|\sin x + \cos x|} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sin x + \cos x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sin x + \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سؤال ۲۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^2}$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2 \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} \times \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2}$$

برای مناسبه حد فوق چند راه پیشنهاد می کنیم:

(۱) می دانیم $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{4}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = -4 \times \frac{1}{4} = -1$$

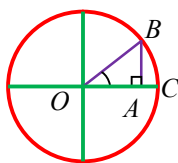
(۲) با ضرب صورت و مخرج کسر در $1 + \cos x$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos^2 x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} = -2 \times 1 \times \frac{1}{2} = -1$$

(۳) در $x = 0$ از هم ارزی $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ استفاده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{x^2}{2}}{x^2} = -1$$



سؤال ۲۵: اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\tan^2 ax} = 4$ باشد مقدار a کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{\tan^2 ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\tan^2 ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\tan ax} \times \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan ax} \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\tan ax} \right)^2 = \frac{1}{a} \times 2 \times \left(\frac{1}{a} \right)^2 = \frac{1}{a} \times 2 \times \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

سؤال ۲۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

می توانیم از هم ارزی های $\sin x \sim x$ و $\tan x \sim x$ و $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (\cos x - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(-\frac{1}{2}x^2 \right)}{x^3} = -\frac{1}{2}$$

سؤال ۲۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲

به صورت کسر یک $\cos 2x$ اضافه و یک بار کم می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x + \cos 2x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \cos 2x - \cos x \cos 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \cos 2x (1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 2x}{x^2} + \cos 2x \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x \times \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

سؤال ۲۹: اگر $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{a + \cos \pi x}{x - 4\sqrt{x} + 4} = b$ باشد مقدار ab کدام است؟

- (۱) -4π (۲) $-4\pi^2$ (۳) $-8\pi^2$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۳

چون در مخرج تابع $f(x) = \frac{a + \cos \pi x}{x - 4\sqrt{x} + 4}$ در $x = 4$ صفر است، پس شرط لازم برای مویود بودن این حد در $x = 4$ آن

است که در صورت هم صفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (a + \cos \pi x) = 0 \Rightarrow a + \cos 4\pi \Rightarrow a = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1 + \cos \pi x}{x - 4\sqrt{x} + 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(1 - \cos \pi x)}{(\sqrt{x} - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2 \sin^2 \frac{\pi x}{2}}{(\sqrt{x} - 2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \times (\sqrt{x} + 2)^2}{(\sqrt{x} - 2)^2 \times (\sqrt{x} + 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2 \sin^2 \frac{\pi x}{2} \times (\sqrt{x} + 2)^2}{(x - 4)^2} \end{aligned}$$

چون $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2)^2$ غیر صفر است در ادامه برای کم میم تر شدن مقادیر آن یعنی ۱۶ را قرار می دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2 \sin^2 \frac{\pi}{2} x \times 16}{(x - 4)^2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-32 \sin^2 \frac{\pi}{2} x}{(x - 4)^2}$$

به کمک تغییر متغیر $x - 4 = t$ داریم:

$$\begin{cases} x - 4 = t \Leftrightarrow x = t + 4 \\ x \rightarrow 4 \Leftrightarrow t \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2} x = \sin \left(\frac{\pi}{2} (t + 4) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} t + 2\pi \right) = \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-32 \sin^2 \frac{\pi}{2} x}{(x - 4)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-32 \sin^2 \frac{\pi}{2} t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} -32 \times \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{t} \right)^2 = -32 \times \frac{\pi^2}{4} = -8\pi^2$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir