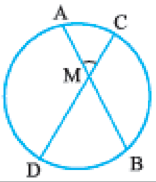
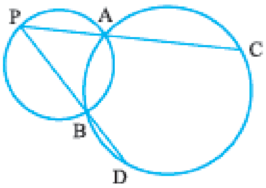
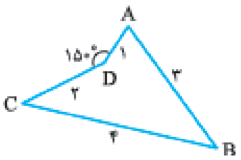
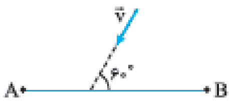
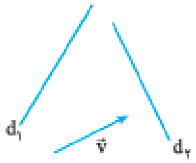
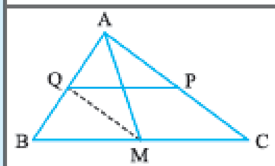
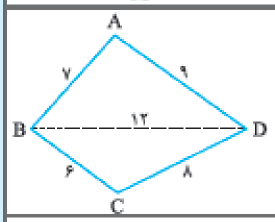
	هندسه (۲)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	
ردیف	آزمون شمارهٔ ۹		نوبت دوم پایهٔ یازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره
۱	ثابت کنید اگر دو وتر از یک دایره، درون دایره متقاطع باشند، زاویهٔ بین دو وتر، برابر است با نصف مجموع دو کمان نظیر آن؛ یعنی در شکل مقابل داریم: $\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}$ 			۱/۵
۲	دو دایره یکدیگر را در نقاط A و B قطع می‌کنند. اگر P نقطه‌ای دلخواه روی یکی از دو دایره و بیرون دایرهٔ دیگر باشد و امتدادهای PA و PB دایرهٔ دیگر را در نقاط C و D قطع کنند، ثابت کنید با تغییر نقطهٔ P روی دایرهٔ مفروض، اندازهٔ کمان CD ثابت می‌ماند. 			۱/۲۵
۳	ثابت کنید اگر در دایره‌ای، دو وتر نابرابر باشند، وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز نزدیک‌تر است.			۱/۲۵
۴	ثابت کنید ترکیب دو بازتاب محوری با محورهای متقاطع در نقطهٔ O، یک دوران به مرکز O و زاویهٔ ۲α است که α زاویهٔ بین دو محور می‌باشد.			۱/۵
۵	خط d و نقطهٔ A بیرون آن و به فاصلهٔ ۱ از خط d مفروض‌اند. بازتاب نقطهٔ A نسبت به خط d را A' می‌نامیم. مجانس نقطهٔ A' در تجانس به مرکز A و با نسبت -۲ را A'' می‌نامیم. اگر فاصلهٔ A از خط d برابر ۱ باشد، طول $A'A''$ چه‌قدر است؟			۱/۲۵
۶	دو نقطهٔ A و O به فاصلهٔ ۱ از یکدیگر قرار دارند. اگر $A_۱$ مجانس A به مرکز نقطهٔ O و با نسبت -۲ و $A_۲$ دوران‌یافتهٔ $A_۱$ حول نقطهٔ O به اندازهٔ $+۹۰^\circ$ باشد، طول پاره‌خط $AA_۲$ چه‌قدر است؟			۱/۵
۷	اگر بخواهیم بدون تغییر محیط چهارضلعی و تعداد اضلاع آن در شکل مقابل و با استفاده از بازتاب، مساحت شکل را افزایش دهیم، مساحت آن چه مقدار افزایش می‌یابد؟ 			۱/۵
۸	اگر طول اضلاع مثلثی ۴، ۵ و ۷ باشند و مجانس این مثلث را در تجانس به مرکز O و با نسبت $k=-۴$ رسم کنیم، مساحت شکل تبدیل‌یافته چه‌قدر است؟			۱/۲۵
۹	در شکل مقابل بردار $\vec{v}$ به طول ۱ با پاره‌خط AB به طول $۲\sqrt{۳}$، زاویهٔ ۶۰° می‌سازد. اگر $A'B'$ انتقال‌یافتهٔ پاره‌خط AB تحت بردار $\vec{v}$ باشد، مساحت چهارضلعی $ABB'A'$ چه‌قدر است؟ 			۰/۷۵
۱۰	دو خط $d_۱$ و $d_۲$ و بردار $\vec{v}$ داده شده‌اند. پاره‌خط AB را چنان رسم کنید که A روی $d_۱$، B روی $d_۲$ و $\overline{AB}$ موازی و مساوی با بردار $\vec{v}$ باشد. 			۱/۲۵
۱۱	اگر در مثلث ABC مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی بر هم منطبق و $AB=۵\sqrt{۳}$ باشد، طول نیمساز زاویهٔ درونی نظیر رأس A را پیدا کنید.			۱/۵
۱۲	در مثلث ABC داریم $\frac{p-a}{۴}=\frac{p-b}{۳}=\frac{p-c}{۲}$ و مساحت دایرهٔ محاطی داخلی آن $\frac{۸\pi}{۳}$ است. مساحت مثلث را پیدا کنید.			۱/۵
۱۳	در شکل مقابل، نقطهٔ M، وسط BC و MQ نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}B$ است. از Q خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا AC را در P قطع کند. ثابت کنید PM نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}C$ است. 			۱/۵
۱۴	در شکل مقابل با توجه به اندازه‌های روی آن، مساحت چهارضلعی را پیدا کنید. 			۱/۵
۱۵	ثابت کنید اگر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر R باشد، آن‌گاه مساحت آن از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $S=۲R^۲\sin\hat{A}\cdot\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}$			۱
	جمع نمرات			۲۰

چون $\hat{D}_1+\hat{D}_2=180^\circ$، در نتیجه: $\sin\hat{D}_1=\sin\hat{D}_2 \quad (3)$

$$(1)\ و\ (2)\ و\ (3) \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{12\sin\hat{D}_1}{4\sin\hat{D}_2}=3$$

۱۰- می‌دانیم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R$$

بنا بر ویژگی مهم تناسب نتیجه می‌شود:

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}=2R \Rightarrow \frac{12}{\frac{3}{2}}=2R \Rightarrow R=4$$

۱۱- پس از گذشت نیم‌ساعت مسافت‌های پیموده‌شده عبارت‌اند از:

$$AB=V_1t=60\times 0/5=30\ \text{km}$$

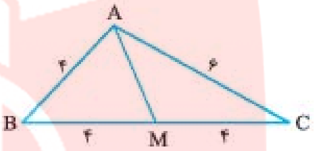
$$AC=V_2t=100\times 0/5=50\ \text{km}$$

پس از نیم‌ساعت، فاصلهٔ دو اتومبیل برابر BC است.

$$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\times AB\times\cos 120^\circ$$

$$BC^2=900+2500-2\times 30\times 50\times\frac{-1}{2}=4900 \Rightarrow BC=70\ \text{km}$$

۱۲- اگر AM میانه باشد، رابطهٔ استوارت را در مثلث شکل مقابل می‌نویسیم:



$$AB^2\times MC+AC^2\times MB$$
$$=AM^2\times BC+BM\times MC\times BC$$

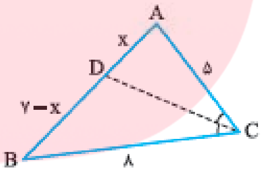
$$\Rightarrow 4^2\times 4+6^2\times 4=AM^2\times 8+4\times 4\times 8$$

$$\Rightarrow 64+144=8\,AM^2+128$$

بر ۸ تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow 8+18=AM^2+16 \Rightarrow AM^2=10 \Rightarrow AM=\sqrt{10}$$

۱۳- نیمساز زاویهٔ متوسط، نظیر ضلع متوسط است.



$$\text{نیمساز } CD \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{x}{7-x}=\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 8x=35-5x \Rightarrow 13x=35 \Rightarrow x=\frac{35}{13}$$

پس $AD=\frac{35}{13}$ و $BD=7-\frac{35}{13}=\frac{91-35}{13}=\frac{56}{13}$.

۱۴- اولاً: چون طول هر سه ضلع مثلث ADE برابرند، پس $\hat{A}=60^\circ$. اکنون در مثلث ABC داریم:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow BC^2=8^2+6^2-2\times 8\times 6\times\frac{1}{2}=52 \Rightarrow BC=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

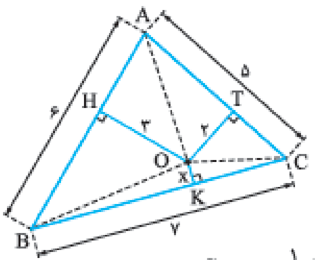
ثانیاً:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\hat{A}=\frac{1}{2}\times 8\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

$$S_{ADE}=\frac{1^2\times\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{DECB}=S_{ABC}-S_{BDE}=12\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{47\sqrt{3}}{4}$$

۱۵-



$$P=\frac{6+5+7}{2}=9$$

$$S=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$$
$$=\sqrt{9\times 4\times 3\times 2}=6\sqrt{6}$$

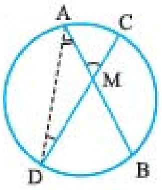
از طرفی: $S_{ABC}=S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times OH+\frac{1}{2}AC\times OT+\frac{1}{2}BC\times OK$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times 6\times 3+\frac{1}{2}\times 5\times 2+\frac{1}{2}\times 7\times x \Rightarrow x=\frac{12\sqrt{6}-28}{7}$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- از A به D وصل می‌کنیم:

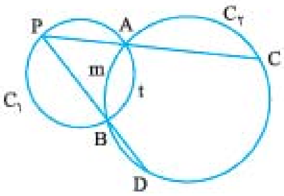


$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\frac{\widehat{AC}}{2}\ \text{محاطی}\\ \hat{A}=\frac{\widehat{BD}}{2}\ \text{محاطی}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{D}=\frac{\widehat{AC}+\widehat{BD}}{2} \quad (1)$$

$$M\ \text{زاویهٔ خارجی مثلث}\ AMD \Rightarrow \hat{M}=\hat{A}+\hat{D} \quad (2)$$

$$(1)\ و\ (2) \Rightarrow \hat{M}=\frac{\widehat{AC}+\widehat{BD}}{2}$$

۲- در دایرهٔ C_1، $\hat{P}$ زاویه‌ای محاطی است، پس: $\hat{P}=\frac{\widehat{AtB}}{2}=$ ثابت. در دایرهٔ C_2، $\hat{P}$ زاویه‌ای خارجی است، پس:



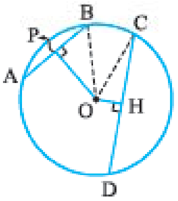
$$\hat{P}=\frac{\widehat{CD}-\widehat{AmB}}{2} \Rightarrow \widehat{CD}=2\hat{P}+\widehat{AmB}$$

چون $\widehat{AmB}$ و $\hat{P}$ ثابت هستند، پس اندازهٔ کمان $\widehat{CD}$ ثابت است و به جای نقطهٔ P بستگی ندارد.

۳- فرض کنیم در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر CD از وتر AB بزرگ‌تر باشد. اگر OP و OH به ترتیب بر AB و CD عمود باشند، آن‌گاه $PB=\frac{1}{2}AB$ و $CH=\frac{1}{2}CD$.

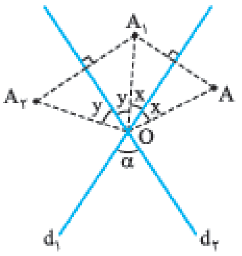
$$\overset{\triangle}{OBP}: OP^2=OB^2-PB^2=R^2-\frac{AB^2}{4} \quad (1)$$

$$\overset{\triangle}{OCH}: OH^2=OC^2-CH^2=R^2-\frac{CD^2}{4} \quad (2)$$

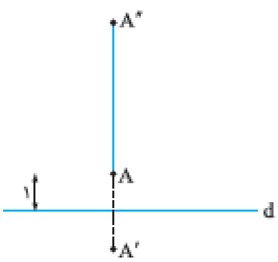


چون $AB<CD$، پس $-\frac{AB^2}{4}>-\frac{CD^2}{4}$ یا $R^2-\frac{AB^2}{4}>R^2-\frac{CD^2}{4}$. با توجه به (1) و (2) نتیجه می‌شود $OP^2>OH^2$ یا $OP>OH$.

۴- اگر دو خط d_1 و d_2 در نقطهٔ O متقاطع و زاویهٔ بین دو خط، α باشد، چنان‌چه بازتاب A نسبت به d_1، A_1 باشد و بازتاب A_1 نسبت به d_2، A_2 باشد، آن‌گاه $OA=OA_1$ و $OA_1=OA_2$، پس $OA=OA_2$. از طرفی با توجه به شکل، زاویهٔ بین OA و OA_2 برابر $2x+2y=2(x+y)=2\alpha$ است. پس A_2 دوران‌یافتهٔ A نقطهٔ O به اندازهٔ 2α می‌باشد.

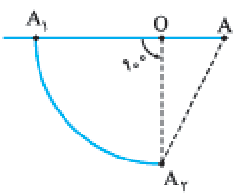


۵- واضح است که $AA'=2$ و چون A'' مجانس A' در تجانس به مرکز A و با نسبت -2 است، پس باید A بین A' و A'' و $AA''=2AA'=4$ باشد، پس با توجه به شکل داریم:



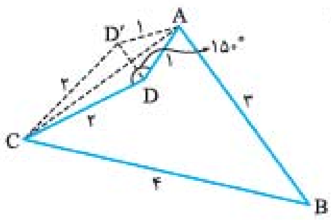
$$A'A''=A'A+AA''=2+4=6$$

۶- چون A_1 مجانس A به مرکز O و با نسبت -2 است، پس O بین A و A_1 است و $OA_1=2\,OA=2$ می‌باشد. با توجه به شکل، OA_2 بر AA_1 عمود است و $OA_2=2$ و چون $OA=1$، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAA_2 داریم:



$$AA_2^2=OA^2+OA_2^2=1^2+2^2 \Rightarrow AA_2=\sqrt{5}$$

۷- کافی است بازتاب D نسبت به AC را پیدا کنیم. اگر این نقطه را D' بنامیم، آن‌گاه دو مثلث ACD و ACD' همنهشت هستند، پس مقدار افزایش مساحت شکل، دو برابر مساحت مثلث ADC است.



$$\text{افزایش مساحت} = 2S_{ACD} = 2\times\left(\frac{1}{2}AD\times CD\times\sin150^\circ\right)$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{1}{2}=1$$

۸- مساحت مثلث اولیه را پیدا می‌کنیم. $2p=4+5+7=16 \Rightarrow p=8$

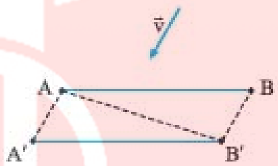
با استفاده از رابطهٔ هرون داریم:

$$S=\sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)}=\sqrt{8\times4\times3\times1}=4\sqrt{6}$$

می‌دانیم تجانس، زاویه را حفظ می‌کند، پس تصویر با خود شکل، متشابه است و چون نسبت تجانس ۴- است، پس مساحت شکل مجانس $(-4)^2=16$ برابر مساحت شکل اولیه است، در نتیجه:

$$\text{مساحت شکل تبدیل‌یافته}=16\times4\sqrt{6}=64\sqrt{6}$$

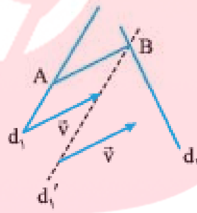
۹- اگر A' و B' به ترتیب انتقال‌یافته‌های A و B تحت بردار $\vec{v}$ باشند، آن‌گاه $BB'=1$ و $\hat{B}=60^\circ$، پس: $S_{ABB'A'}=2S_{ABB'}$



$$=2\left(\frac{1}{2}AB\times BB'\times\sin B\right)$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

۱۰- اگر فرض کنیم مسئله حل شده و پاره‌خط AB جواب مسئله باشد، آن‌گاه چون $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$، پس نقطهٔ B انتقال‌یافتهٔ نقطهٔ A تحت بردار $\vec{v}$ است. برای رسم به صورت زیر عمل می‌کنیم: انتقال‌یافتهٔ d_1 را تحت بردار $\vec{v}$ خط d_1' می‌نامیم. نقطهٔ برخورد d_1' و d_2 را B می‌نامیم. از B خطی موازی با $\vec{v}$ رسم می‌کنیم تا d_1 را در A قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسئله است.



۱۱- اگر در مثلثی مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و محیطی برهم منطبق باشند، آن مثلث متساوی‌الاضلاع است. نیمسازِ زاویه‌های درونی مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع آن نیز می‌باشند، پس:

$$d_a=h_a=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\times5\sqrt{3}=\frac{15}{2}$$

۱۲- اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را r بگیریم، آن‌گاه: $S=\pi r^2=\frac{8\pi}{3}\Rightarrow r=2\sqrt{\frac{2}{3}}$

از طرفی با استفاده از ویژگی مهم تناسب، خواهیم داشت:

$$\frac{p-a}{4}=\frac{p-b}{3}=\frac{p-c}{2}=\frac{3p\overbrace{-a-b-c}^{=-2p}}{4+3+2}=\frac{p}{9}=k$$

در نتیجه: $p=9k$ و همچنین: $\frac{p-a}{4}=k\Rightarrow p-a=4k\Rightarrow a=5k$

$$\frac{p-b}{3}=k\Rightarrow p-b=3k\Rightarrow b=6k$$

$$\frac{p-c}{2}=k\Rightarrow p-c=2k\Rightarrow c=7k$$

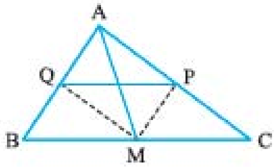
پس: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{9k\times4k\times3k\times2k}=6k^2\sqrt{6}$

$$r=\frac{S}{p}\Rightarrow2\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{6k^2\sqrt{6}}{9k}\Rightarrow\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{k\sqrt{6}}{3}$$

به توان ۲ می‌رسانیم: $\frac{2}{3}=\frac{6k^2}{9}\Rightarrow k^2=1\xrightarrow{k>0}k=1$

پس $S=6\sqrt{6}$.

۱۳- چون MQ نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}B$ است، پس بنا بر ویژگی نیمساز در مثلث AMB داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\frac{AQ}{BQ}=\frac{AM}{MB}\\ PQ\parallel BC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AQ}{BQ}=\frac{AP}{PC}\\ BM=CM\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AP}{PC}=\frac{AM}{CM}$$

بنا بر ویژگی عکس نیمساز زاویه، نتیجه می‌شود MP نیمساز زاویهٔ $A\hat{M}C$ است.

۱۴- با استفاده از هرون مساحت هر یک از مثلث‌ها را پیدا می‌کنیم.

در مثلث ABD داریم $p=\frac{7+9+12}{2}=14$، پس:

$$S_{ABD}=\sqrt{14\times(14-7)(14-9)(14-12)}=14\sqrt{5}$$

در مثلث BCD داریم $p=\frac{6+8+12}{2}=13$، پس:

$$S_{BCD}=\sqrt{13(13-6)(13-8)(13-12)}=\sqrt{455}$$

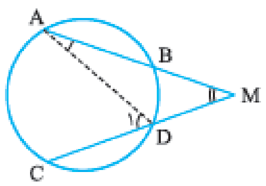
$$S_{ABCD}=14\sqrt{5}+\sqrt{455}$$

۱۵- می‌دانیم $a=2R\sin\hat{A}$ و $b=2R\sin\hat{B}$. از طرفی $S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$، پس:

$$S=\frac{1}{2}\times(2R\sin\hat{A})(2R\sin\hat{B})\sin\hat{C}=2R^2\sin\hat{A}\cdot\sin\hat{B}\cdot\sin\hat{C}$$

آزمون شمارهٔ ۱۰ (نوبت دوم)

۱- از A به D وصل می‌کنیم. $\hat{D}_1$ زاویهٔ خارجی مثلث ADM است، پس:

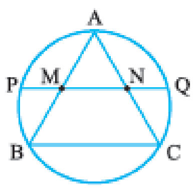


$$\hat{D}_1=\hat{A}+\hat{M}\Rightarrow\hat{M}=\hat{D}_1-\hat{A}$$

اما $\hat{D}_1$ و $\hat{A}$ محاطی هستند، پس $\hat{D}_1=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ و $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$، در نتیجه:

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}-\frac{\overset{\frown}{BD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}}{2}$$

۲- در مثلث ABC پاره‌خط MN میان‌خط است، پس: $MN=\frac{1}{2}BC=1$



اگر فرض کنیم $PM=x$ و $NQ=y$، آن‌گاه چون دو وتر AB و PQ در نقطهٔ M متقاطع هستند، داریم:

$$PM\times MQ=AM\times MB\Rightarrow x(1+y)=1\times1\quad(1)$$

برای دو وتر AC و PQ نیز داریم:

$$QN\times PN=AN\times NC\Rightarrow y(1+x)=1\times1\quad(2)$$

$$(1)\text{ و }(2)\Rightarrow x(1+y)=y(1+x)\Rightarrow x=y$$

$$(1)\Rightarrow x(1+x)=1\Rightarrow x^2+x-1=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

و چون $x>0$ است، پس $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$، در نتیجه:

$$PQ=x+1+y=2x+1=\sqrt{5}-1+1=\sqrt{5}$$