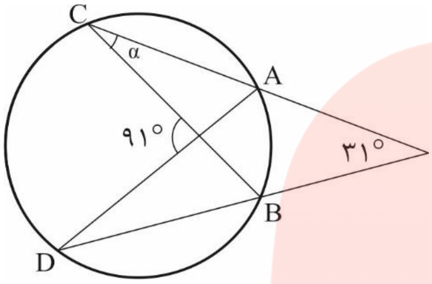
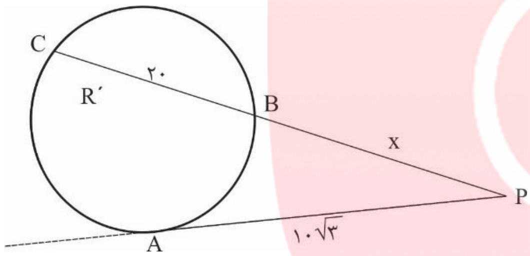
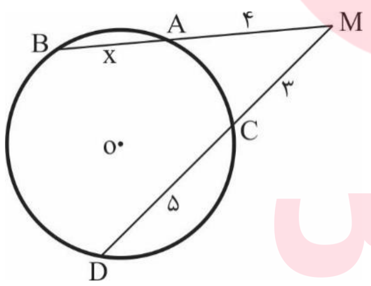
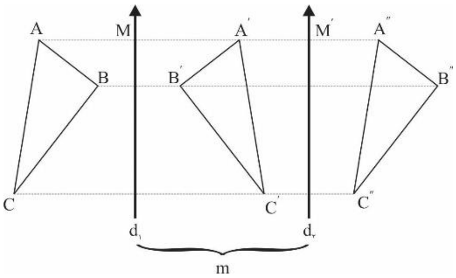
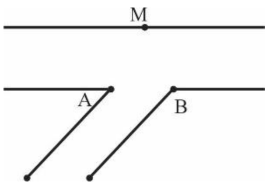
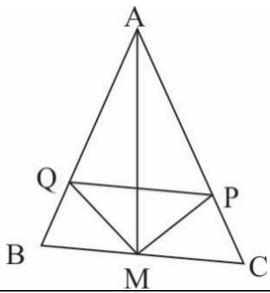
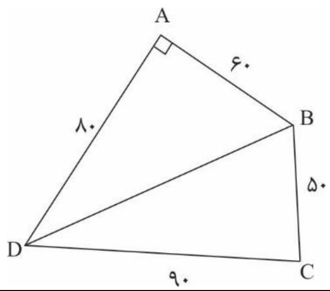
نام درس: هندسه ۲
نام دبیر: آقای مظاهری فرد
تاریخ امتحان: ۱۳۹۷/۰۳/۲۱
ساعت امتحان: ۸ صبح/ عصر
مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: ....
مقطع و رشته: ....
نام پدر: ....
شماره داوطلب: ....
تعداد صفحه سؤال: ۳ صفحه

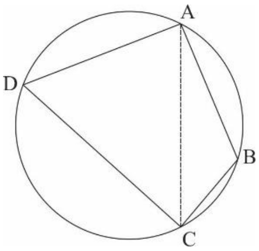
ردیف	سؤالات	محل مهر یا امضاء مدیر	بارم
۱	در شکل مقابل اندازه های خواسته شده را به دست آورید.	الف)  ب) 	۱,۵
۲	مقدار x را بیابید.		۰,۵
۳	ثابت کنید از بین تمام چهارضلعی‌ها، یک چهارضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابل آن مکمل باشند.		۱,۵
۴	طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.		۱
۵	در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB=۱۱cm$. آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع کرده است؟		۱
۶	در مثلثی به طول اضلاع ۳، ۵ و ۷، دایرهٔ محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطهٔ تماس، ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟		۱

۷	در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصلهٔ m از آن قرار دارد و مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ بنامید. الف) نشان دهید $AA''=2m$. ب) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ را تصویر $\overset{\Delta}{ABC}$ دانست؟ 	۲
۸	در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.	۱,۵
۹	مي‌خواهيم كنار رودخانه‌ها ۳ اسكله بسازيم. جاي دو اسكله A و B مطابق شكل مشخص است. اسكلهٔ M را در چه نقطه‌اي از ساحل رودخانه بسازيم كه قايق‌ها هنگام طي مسير MAMB كوتاه‌ترين مسير را طي كنند؟ 	۱,۵
۱۰	ثابت کنید در هر مثلث دلخواه داریم: $\frac{a}{\operatorname{Sin} A}=\frac{b}{\operatorname{Sin} B}=\frac{c}{\operatorname{Sin} C}=2R$ (R شعاع دایره محیطی است.)	۱,۵
۱۱	در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه D که به فاصله ۷ واحد از رأس قرار دارد، از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ نقطه E که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد، از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه زاویه $\overset{\Delta}{AED}$ چند درجه است؟	۱
۱۲	در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید $PQ \parallel BC$ 	۱
۱۳	در مثلث ABC، $AB=7$ و $AC=5$ و است. طول نیمساز زاویه داخلی C را بدست آورید.	۱,۵
۱۴	دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را با کمک دستور هرون به دست آورید.	۱

۱۵	چهارضلعی ABCD که $AB \perp AD$ و طول اضلاع آن مشخص است را داریم. مساحت آن را بدست آورید.  	۱
۱۶	در مثلث ABC، $AB = ۱۰$ ، $AC = ۶$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ اولا طول BC را بدست آورید، ثانیاً مساحت مثلث را تعیین کنید، ثالثاً مقدار SinB را پیدا کنید.	۱٫۵

نام درس: **هندسه ۲**
نام دبیر: **آقای مظاهری فرد**
تاریخ امتحان: ۹۷/۰۳/۲۱
ساعت امتحان: ۸ صبح/ عصر
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

کلید سؤالات پایان ترم نوبت دوم سال تحصیلی ۹۷-۹۶

۱	$۳۱^\circ = \frac{CD-AB}{۲}$ و $۹۱^\circ = \frac{CD+AB}{۲}$ در نتیجه: $۶۲^\circ = CD-AB$ و $۱۸۲^\circ = CD+AB$ پس: $۲CD = ۲۴۴^\circ \Rightarrow CD = ۱۲۲^\circ$ و خواهیم داشت: $AB = ۶۰^\circ$ از طرفی چون زاویهٔ α زاویهٔ محاطی روبه‌روی کمان AB است خواهیم داشت: $\hat{\alpha} = ۳۰^\circ$ $PA^۲ = PB.PC$ $(۱۰\sqrt{۳})^۲ = x.(x+۲۰)$ $۳۰۰ = x^۲ + ۲۰x$ $x^۲ + ۲۰x - ۳۰۰ = ۰$ $(x+۳۰)(x-۱۰) = ۰$ $\begin{cases} x = -۳۰ \\ x = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow PB = ۱۰, PC = ۳۰$
۲	$MA.MB = MC.MD$ $۴ \times (۴ + x) = ۳ \times (۳ + ۵)$ $۱۶ + ۴x = ۲۴$ $۴x = ۸$ $x = ۲$
۳	اثبات: اگر چهارضلعی ABCD محاطی باشد یعنی هر چهار رأس آن روی یک دایره واقع است. با رسم وتر AC (AC لزوماً قطر نیست) از دایرهٔ محیطی خواهیم داشت: $\hat{A} = \frac{۱}{۲}DCB \,,\, \hat{C} = \frac{۱}{۲}DAB$ 

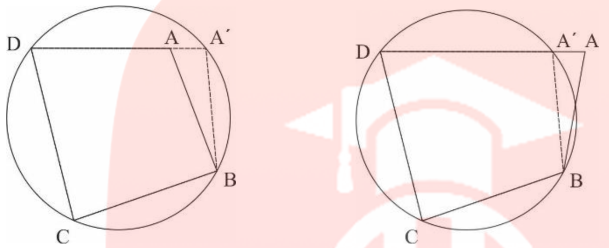
اما DCB و DAB با هم کل دایره را می‌سازند و جمع آنها ۳۶۰° می‌باشد.

بنابراین $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ و $\hat{A}\,,\hat{C}$ مکمل می‌باشند.

به همین ترتیب $\hat{B},\hat{D}$ هم مکمل خواهند بود.

به عکس، فرض کنیم زوایای A و C مکمل یکدیگر باشند. حال برای اثبات باید از برهان خلف کمک بگیریم:

سه نقطهٔ B , C , D از چهارضلعی را می‌توان جداگانه به عنوان رئوس مثلثی در نظر گرفت. از آنجا که هر مثلث یک شکل محاطی است حتماً دایره‌ای از این سه نقطه عبور می‌کند. حال فرض خلف به کمک ما می‌آید، فرض کنید این دایره از نقطهٔ A نگذرد:



پس دایره خط AD یا امتداد آن را در نقطه‌ای همچون A' قطع خواهد نمود. چهارضلعی جدید $A'BCD$ محاطی است و در نتیجه زوایای A',C مکمل‌اند. اما فراموش نکنید در فرض A و C مکمل یکدیگر بودند پس دو زاویهٔ A و A' هم‌اندازه‌اند و این تناقض است، زیرا فرض نمودیم دایره از نقطهٔ A نمی‌گذرد. در نتیجه A' بر A منطبق است.

۴

پاسخ: طول مماس مشترک داخلی:

$$=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲} \Rightarrow \sqrt{۱۵}=\sqrt{۸^۲-(R+R')^۲} \Rightarrow ۱۵=۶۴-(R+R')^۲$$

طول مماس مشترک خارجی:

$$=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲} \Rightarrow ۳\sqrt{۷}=\sqrt{۸^۲-(R-R')^۲} \Rightarrow ۶۳=۶۴-(R-R')^۲$$

$$\begin{matrix}\Rightarrow (R+R')^۲=۴۹ \\ \Rightarrow (R-R')^۲=۱\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} R+R'=۷ \\ R-R'=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R=۴ \\ R'=۳ \end{cases}$$

۵

$$\left.\begin{matrix} MA.MB=MC.MD \\ ۹ \xrightarrow{\text{تقسیم به نسبت ۱ به ۲}} ۳\,,\,۶ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} MA.MB=۳\times۶=۱۸ \\ MA+MB=۱۱ \end{cases}$$

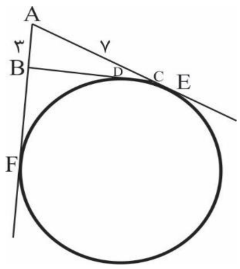
$$MA=۱۱-MB \Rightarrow MB.(۱۱-MB)=۱۸ \Rightarrow MB^۲-۱۱MB+۱۸=\circ \Rightarrow (MB-۲)(MB-۹)=\circ$$

$$MB=۹ \Rightarrow MA=۲$$

۶

$۲P = ۳ + ۵ + ۷ = ۱۵ \Rightarrow P = ۷/۵$

$BD = P - c = ۷/۵ - ۳ = ۴/۵$



$DC = ۵ - ۴/۵ = ۰/۵$

۷

پاسخ:

الف) با توجه به شکل داريم: $m = A'M + A'M'$ ، $A'M = AM$ و $A'M' = A''M'$ در نتيجه:

$AA'' = AM + A'M + A'M' + M'A''$

$\Rightarrow AA'' = ۲m \Rightarrow AA'' = ۲A'M + ۲A'M'$

ب) به‌طريق مشابه اندازهٔ BB'' و CC'' نيز برابر $۲m$ خواهد بود.

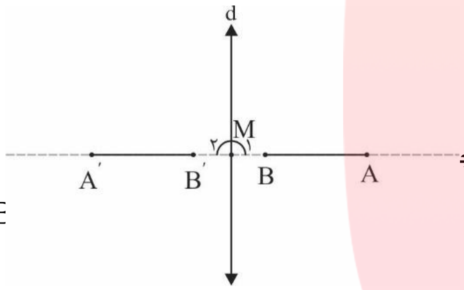
پ) مثلث $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ حاصل انتقال مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ مي‌باشد. مي‌توان گفت ۲ بازتاب محوري با محورهاي موازي شكل را به تصويري هم‌شكل و هم‌جهت با شكل اوليه منتقل مي‌كند.

۸

پاسخ:

پاره‌خط AB را ادامه مي‌دهيم تا در نقطهٔ M محور تقارن را قطع نمايد، حال خواهيم داشت:

بازتاب پاره‌خط AM، برابر $A'M$ و بازتاب پاره‌خط MB برابر $B'M$ است. در نتيجه



AE

۹

حل: بازتاب نقطهٔ A را نسبت به ساحل بالائي در نظر گرفته و A' مي‌ناميم از A' خطي به B وصل نموده حاصل تقاطع را M مي‌ناميم.

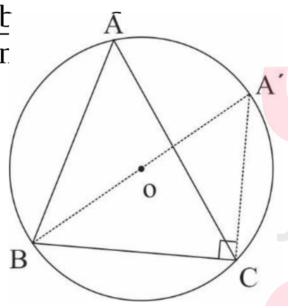
۱۰

ثابت كنيد در هر مثلث دلخواه داريم:

$\frac{a}{\text{Sin A}} = \frac{b}{\text{Sin}}$

در هر مثلث دلخواه ABC با فرض $AC = b$ ، $BC = a$ و $AB = c$ داريم

كه R شعاع دايره محيطي است.



اثبات:

گام ۱: دايره محيطي مثلث ABC كه مركز آن محل برخورد عمودمنصف‌هاي آن است

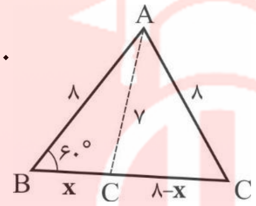
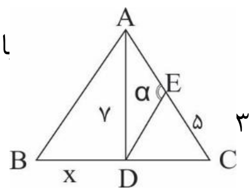
حال رأس B را به مركز دايره وصل نموده امتداد مي‌دهيم تا در نقطهٔ A' دايره را قطع نمايد. چون زاويه $\hat{C}$ در مثلث $A'BC$ رو به قطر دايره محيطي است، سپس قائمه است بنابراين:

$BC = A'B.\text{Sin} A'$

اما زواياي A' و A هر دو رو به كمان BC بوده و با يكديگر برابرند.بنابراين خواهيم داشت:

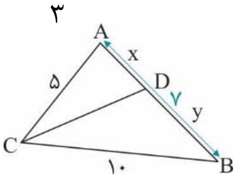
$\Rightarrow BC = ۲R\,\text{Sin}\,\hat{A}$

$\Rightarrow ۲R = \frac{BC}{\text{Sin}\,\hat{A}} = \frac{a}{\text{Sin A}}$

گام ۲: به‌ترتیب فوق در مورد سایر اضلاع هم می‌توان نوشت: $\frac{b}{\operatorname{Sin} B} = ۲R , \frac{c}{\operatorname{Sin} \hat{C}} = ۲R$ در نتیجه خواهیم داشت: $\frac{a}{\operatorname{Sin} A} = \frac{b}{\operatorname{Sin} B} = \frac{c}{\operatorname{Sin} C} = ۲R$	
با کمک قضیه کسینوس‌ها $\overset{\Delta}{ABD}: \; ۷^۲ = ۸^۲ + x^۲ - ۲ \times ۸ \times x \times \operatorname{Cos} ۶۰$  $\Rightarrow ۴۹ = ۶۴ + x^۲ - ۸x$ $\Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰$ $(x-۳)(x-۵) = ۰$ $x = ۳$ ل  چون مثلث متساوی‌الاضلاع است هر دو جواب ۳ و ۵ قابل قبول‌ان. (با توجه به شکل رسم شده ۳ چون $DC = ۵$ پس مثلث $\overset{\Delta}{CED}$ متساوی‌الساقین است و چون زاویه راس آن یعنی $\hat{C}$ برابر $۶۰°$ است پس دو زاویه دیگر مثلث هم $۶۰°$ بوده پس مثلث $\overset{\Delta}{CED}$ متساوی‌الاضلاع می‌باشد در نتیجه $ED = ۵$ و $\hat{E} = ۱۸۰° - ۶۰° = ۱۲۰°$	۱۱
کافیست در دو مثلث $\overset{\Delta}{AMB}$ و $\overset{\Delta}{AMC}$ رابطه $\overset{\Delta}{AMB}: \frac{AQ}{BQ} = \frac{AM}{MB} \quad , \overset{\Delta}{AMC}: \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC}$ M وسط BC است پس $MB = MC$ و خواهیم داشت $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AP}{PC}$ و بنابه عکس قضیه تالس داریم $PQ \parallel BC$	۱۲
ابتدا باید طول قطعه‌های حاصل از رسم نیمساز را بدست آوریم:	۱۳

$x = \frac{cb}{b+a}$ $\quad\quad$ $y = \frac{ca}{b+a}$

$x = \frac{7\times 5}{15} = \frac{7}{3}$ $\quad\quad$ $y = \frac{7\times 10}{15} = \frac{14}{3}$



حال با کمک فرمول $CD^2 = AC.CB - AD.DB$ طول نیمساز را محاسبه می‌کنیم.

$$CD^2 = 5\times 10 - \frac{7}{3}\times\frac{14}{3} = 50 - \frac{98}{9}$$

۱۴

$$P = \frac{3}{2}a$$

$$S = \sqrt{\frac{3}{2}a(\frac{3}{2}a-a)(\frac{3}{2}a-a)(\frac{3}{2}a-a)}$$

$$S = \sqrt{\frac{3}{16}a^4} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

۱۵

$$S = S_{\underset{ABD}{\Delta}} + S_{\underset{BCD}{\Delta}}$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\times 60\times 80 = 2400$$

با کمک قضیه فیثاغورث داریم:

$$BD^2 = 60^2 + 80^2 = 10000 \Rightarrow BD = 100$$

بنابه دستور هرون $S_{\underset{BCD}{\Delta}} = \sqrt{120\times 30\times 20\times 70} = 2244$

$$S = 2400Cm^2 + 2244Cm^2 = 4644Cm^2$$

۱۶

- در مثلث ABC، $AB = 10$، $AC = 6$ و $\hat{A} = 60^\circ$ اولا طول BC را بدست آورید، ثانیاً مساحت مثلث را تعیین کنید، ثالثاً مقدار SinB را پیدا کنید.

با کمک قضیه کسینوس‌ها، می‌دانیم هرگاه طول دو ضلع دو زاویه بین آن‌ها را داشته باشیم، می‌توانیم اندازه ضلع سوم را بدست آوریم. بنابراین:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$a^2 = 100 + 36 - 2\times(10)\times(6)\times\frac{1}{2} = 136 - 60 = 76 \Rightarrow a = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

مساحت هم به سادگی با دانستن طول ضلع و زاویه میان آن‌ها بدست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$$

$$S=\frac{1}{2}\times(10)\times(6)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=15\sqrt{2}$$

حال برای یافتن اندازهٔ زوایای دیگر و یا نسبت‌های مثلثاتی آن‌ها می‌توان از معادله زیر کمک گرفت.

$$S=\frac{1}{2}bc\,\mathrm{Sin}\,\hat{A}=\frac{1}{2}ac\,\mathrm{Sin}\,\hat{B}=\frac{1}{2}ab\,\mathrm{Sin}\,\hat{C}$$

با در نظر گرفتن دو داریم:

$$15\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{76}\times 10\,\mathrm{Sin}\,\hat{B}$$

$$\mathrm{Sin}\,\hat{B}=\frac{2\times 15\sqrt{2}}{\sqrt{76}\times 10}$$