

فصل ۱: عبارت های جبری

درس ۱: چند اتحاد جبری و کاربردها

۱. تساوی های زیر را با استفاده از اتحادها کامل کنید.

- | | |
|---|--|
| ۱) $(a + 4)^2 = a^2 + \dots + \dots$ | ۲) $(x - 5)^2 = \dots - 10x + \dots$ |
| ۳) $(3a - 1)^2 = \dots - 6a + \dots$ | ۴) $(1 - 2x)^2 = 1 - 4x + \dots$ |
| ۵) $(a + \sqrt{2})^2 = a^2 + \dots + 2$ | ۶) $(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}b)^2 = 2 + \dots + \frac{1}{2}b^2$ |
| ۷) $(x - 5)(x + 5) = x^2 - \dots$ | ۸) $(7x + 3)(7x - 3) = \dots - 9$ |
| ۹) $(5x + \dots)(5x - \dots) = \dots - 81$ | ۱۰) $(\frac{x}{2} + 4)(\dots - 4) = \frac{x^2}{4} - 16$ |
| ۱۱) $(\sqrt{3} + \dots)(\sqrt{3} - \dots) = 3 - 2 = 1$ | ۱۲) $(x + 4)(x + 3) = x^2 + (\dots)x + \dots$ |
| ۱۳) $(x + \dots)(x + \dots) = x^2 + 3x + 2$ | ۱۴) $(x + \dots)(x - \dots) = x^2 - 4x - 12$ |
| ۱۵) $(2a + 1)^2 = 4a^2 + \dots + 6a + \dots$ | ۱۶) $(\sqrt{3} + x)^2 = 3\sqrt{3} + \dots + 3\sqrt{3}x^2 + \dots$ |
| ۱۷) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) = a^3 - \dots$ | ۱۸) $(x + 5)(x^2 - \dots + 25) = x^3 + 125$ |
| ۱۹) $(2x - \dots)(4x^2 + 6x + 9) = \dots - 27$ | |
| ۲۰) $(4a - 2b)^2 = \dots - \dots + \dots - 8b^2$ | |
| ۲۱) $(\frac{1}{3}a - 2)^2 = \dots - 3(\frac{1}{3}a)^2(2) + \dots - 8$ | |
| ۲۲) $(\dots + \dots)^2 = 27a^2 + \dots + \dots + \frac{1}{8}$ | |

۲. حاصل عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها بنویسید.

- | | |
|---------------------------|--|
| ۱) $(x + 5)^2$ | ۲) $(x - 1)^2$ |
| ۳) $(2a + 4)^2$ | ۴) $(3a - 2)^2$ |
| ۵) $(y + \frac{1}{4})^2$ | ۶) $(y + \frac{1}{4})^2$ |
| ۷) $(\frac{x}{2} + 5)^2$ | ۸) $(2 - \frac{a}{3})^2$ |
| ۹) $(2z - \frac{1}{2})^2$ | ۱۰) $(2x - 3y)^2$ |
| ۱۱) $(x + 5)(x - 5)$ | ۱۲) $(y - 3)(y + 3)$ |
| ۱۳) $(7 - x)(7 + x)$ | ۱۴) $(5x + 2)(5x - 2)$ |
| ۱۱) $(4x - 2y)(4x + 2y)$ | ۱۲) $(1 - \frac{x}{9})(1 + \frac{x}{9})$ |
| ۱۳) $(4x + y)(4x - y)$ | ۱۴) $(x + 3)(x + 2)$ |
| ۱۵) $(3y + 5)(3y + 2)$ | ۱۶) $(4x - 1)(4x + 5)$ |
| ۱۵) $(2x - 5)(2x - 6)$ | ۱۶) $(5x - 7)(5x + 2)$ |
| ۱۷) $(2x + 6)(2x - 1)$ | ۱۸) $(x + 2)^2$ |

$$۱۹) (y-3)^r$$

$$۲۱) (2x+1)^r$$

$$۲۳) (x+\frac{2}{3})^r$$

$$۲۵) (x-4)(x^r+4x+16)$$

$$۲۷) (y-1)(y^r+y+1)$$

$$۲۹) (10-1)^r$$

$$۳۱) (999)^r$$

$$۳۱) 10.5^r$$

$$۳۵) (99)^r$$

$$۳۷) 10.2 \times 98$$

$$۲۰) (x-1)^r$$

$$۲۲) (2x-3)^r$$

$$۲۴) (\frac{1}{4}+\frac{b}{3})^r$$

$$۲۶) (x+2y)(x^r-2xy+4y^r)$$

$$۲۸) (2+x)(4-2x+x^r)$$

$$۳۰) (998)^r$$

$$۳۲) (10.2)^r$$

$$۳۴) (100-1)^r$$

$$۳۶) 96 \times 10.4$$

تجزیه

۳. عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$۱) x^r + 6x$$

$$۳) \frac{x^r}{3} - 7x$$

$$۵) x^r - x$$

$$۷) x^r - 25 = (x + \dots)(x - \dots)$$

$$۹) 4x^r - 9 = (2x + \dots)(2x - \dots)$$

$$۱۱) 16 - 25y^r$$

$$۱۳) 25x^r - y^r$$

$$۱۵) \frac{x^r}{25} - 16$$

$$۱۷) y^r - 16y$$

$$۱۹) 4x^r - 49x$$

$$۲۱) x^r - 625x^r$$

$$۲۳) x^r - 7x + 6$$

$$۲۵) y^r - 3y - 10$$

$$۲۷) 4x^r - 4x + 1$$

$$۲۹) 4x^r + 14x + 12$$

$$۳۱) 4x^r + 4x - 15$$

$$۳۳) x^r + 14x + 49$$

$$۳۵) y^r - 2y + 1$$

$$۳۷) 9x^r - 6x + 1$$

$$۲) x(a+b) - 2(a+b)$$

$$۴) 6a^r b^r - 18ab^r$$

$$۶) 2x(x+2y)^r - 5(x+2y)^r$$

$$۸) y^r - 49 = (y - \dots)(y + \dots)$$

$$۱۰) 9x^r - 16$$

$$۱۲) 49x^r - 100$$

$$۱۴) x^r - \frac{1}{16}$$

$$۱۶) x^r - 25x$$

$$۱۸) x^r - 16$$

$$۲۰) x^r - 64x^r$$

$$۲۲) x^r + 5x + 6$$

$$۲۴) y^r - 9y + 20$$

$$۲۶) x^r - 7x + 10$$

$$۲۸) 9x^r + 18x + 8$$

$$۳۰) 25x^r + 25x + 6$$

$$۳۲) x^r - 10x + 25$$

$$۳۴) x^r + 4x + 4$$

$$۳۶) x^r + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

$$۳۸) 4x^r + 12xy + 9y^r$$

$$۳۹) x^7 - 8$$

$$۴۰) y^7 + 27$$

$$۴۱) x^7 + 1$$

$$۴۲) 8x^7 - 1$$

$$۴۳) 27a^7 + 8$$

$$۴۴) 8 - t^6$$

$$۴۵) 1 + z^7$$

$$۴۶) t^7 - \frac{1}{8}$$

$$۴۷) x^6 - 1$$

$$۴۸) 12x^6(x^7 + 5)^3 - 10x^6(x^7 + 5)^2$$

$$۴۹) 12x^6(x^7 + 6)^3 - 8x^6(x^7 + 6)^2$$

۴. ابتدا حاصل $11^2, 11^3, 11^4$ را به دست آورده و یک الگو برای به دست آوردن توان‌های طبیعی عدد ۱۱ به دست آورید و با استفاده از آن حاصل $11^5, 11^6$ را حدس بزنید.

درس ۲: عبارتهای گویا

۵. مشخص کنید کدامیک از عبارتهای زیر گویاست و کدامیک گویا نیست؟

$$۱) \sqrt{x^2 + 1}$$

$$۲) \frac{1}{x^4 - \sqrt{2}}$$

$$۳) \frac{x - 3}{2x^2 - 3x + 5}$$

$$۴) \frac{x + y}{3\sqrt{z}}$$

$$۵) \frac{\sqrt{5}x}{x}$$

$$۶) x^2 + 3x + 5$$

$$۷) \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$۸) \sqrt{x}$$

$$۹) \frac{|x|}{x^2 + 2}$$

۶. کدامیک از عبارتهای زیر گویا و کدامیک غیر گویا هستند؟ عبارتهای گویا به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

$$۱) \frac{3z + 5}{3z - 5}$$

$$۲) \frac{x + 9}{\sqrt{x} - 3}$$

$$۳) \frac{4x^2 - 5x + 1}{7\sqrt{2}}$$

$$۴) \frac{a^2 + 3}{a^2 - 4}$$

$$۵) \frac{x\sqrt{x} + 1}{3 - x}$$

$$۶) \frac{5x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

۷. عبارتهای گویای زیر، به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

$$۱) \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$۲) \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 4}$$

$$۳) \frac{5}{x^2 + x}$$

$$۴) \frac{x^2 + 3x^2 + 2x}{x(x+1)(x^2 - 4)}$$

$$۵) \frac{3x^2y + 6xy^2}{x^2}$$

$$۶) \frac{42a^2 - 30a^2m}{am^2 - 25a}$$

$$۷) \frac{x^6 - a^6}{ax^2 - a^2x}$$

$$۸) \frac{b^2x^2 - ab^2x^2}{a^2b^2x^2 - a^2b^2x}$$

۸. کسرهایی زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$۱) \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$$

$$۲) \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$۳) \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$$

$$۴) \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 49}$$

$$۵) \frac{x^r - 1}{x^r - 1} \quad ۶) \frac{4x^r - 9}{4x^r + 10x + 6} \quad ۷) \frac{x^r - 8x}{2x^r - 8x + 8}$$

$$۸) \frac{6x^5(x^r + 4)^r - 4x^r(x^r + 4)^r}{x^4 - 16x^r}$$

کوچک ترین مضرب مشترک چند جمله‌ای‌ها

۹. کوچک ترین مضرب مشترک هر زوج از چند جمله‌ای‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) \begin{cases} P(x) = a^r + 6a + 9 \\ Q(x) = a^r - 9 \end{cases} \quad ۲) \begin{cases} P(x) = x^r + 2x - 15 \\ Q(x) = x^r - 25 \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} P(x) = x^r - 4 \\ Q(x) = x^r + 2x \end{cases} \quad ۴) \begin{cases} P(x) = a^r - b^r \\ Q(x) = a^r - b^r \end{cases}$$

$$۵) \begin{cases} P(x) = 5x^r \\ Q(x) = x^r - x \end{cases} \quad ۶) \begin{cases} P(x) = 5x - 5 \\ Q(x) = x^r - 1 \end{cases}$$

$$۷) \begin{cases} P(x) = a^r + 2a^r - 3a^r \\ Q(x) = a^r + 8a^r + 15a \end{cases} \quad ۸) \begin{cases} P(x) = x(x + 2) \\ Q(x) = 5(x - 2) \end{cases}$$

$$۹) \begin{cases} P(x) = 7x - 7 \\ Q(x) = x^r - 1 \\ R(x) = x^r - 5x - 6 \end{cases} \quad ۱۰) \begin{cases} P(x) = x^r - 81 \\ Q(x) = 9 - x \end{cases}$$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا

۱۰. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) \frac{2}{x-5} + \frac{4}{2x+1} \quad ۲) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \quad ۳) \frac{7}{x^r-4} + \frac{6}{x+2} \quad ۴) \frac{2}{x} + \frac{5}{x+3}$$

$$۵) \frac{x-2}{x-3} + \frac{x+1}{x+2} \quad ۶) \frac{x}{x-2} - \frac{5}{x+1} \quad ۷) \frac{x}{2x+4} - \frac{6}{x-2} \quad ۸) \frac{4}{x^r+x} + \frac{x}{x^r-1}$$

$$۹) \frac{4}{x^r+x} + \frac{1}{(x^r-1)(x+1)} \quad ۱۰) \frac{1}{x^r-8x} - \frac{1+x}{x^r} + \frac{x+2}{x-2}$$

$$۱۱) \frac{y+8}{y^r+y-2} + \frac{y-2}{y^r+2y} \quad ۱۲) \frac{4+x^r-2x}{2+x} - x-2$$

$$۱۳) \frac{x+3}{x^r-6x+9} - \frac{x+2}{x^r-9} - \frac{5}{3-x} \quad ۱۴) \frac{4}{9x} - \frac{5x}{6y^r} + 1$$

$$۱۵) \frac{x+1}{x-1} - 1 \quad ۱۶) \frac{2x}{x^r-y^r} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$$

$$۱۷) \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^r-1} - \frac{2x-3}{2x+2}$$

$$۱۸) \frac{y-3}{y^r-4} - \frac{y+2}{y^r-4y+4} - \frac{2}{2-y}$$



فصل ۲: معادله‌ی درجه‌ی دوم

درس ۱: معادله و مسائل توصیفی

۱. هر یک از عبارتهای زیر را به یک معادله تبدیل کنید.
 - الف) مربع هر عددی، برابر است با همان عدد بعلاوه‌ی یک.
 - ب) عددی را بیابید که پنج برابر آن، بعلاوه‌ی دو، برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.
 - پ) عددی را بیابید که دو برابر آن بعلاوه‌ی عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.
 - ت) عددی را بیابید که مربع آن، سه برابر خود همان عدد باشد.

درس ۲: معادله‌ی درجه‌ی دو و کاربردها

معادله‌ی درجه‌ی اول

۲. معادلات زیر را حل کنید.

۱) $2x - 1 = 9$ ۲) $6x + 2 = 2x - 10$ ۳) $x + 3 = 5x + 10$ ۴) $\frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{3}$

۳. با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه‌ی ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه، هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه، تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

۴. در یک کارخانه، حقوق یک مهندس، دو برابر یک تکنسین و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه، ۳ مدیر، ۸ مهندس و ۱۲ تکنسین دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه $55/5$ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک تکنسین در این کارخانه، ماهیانه چقدر است؟

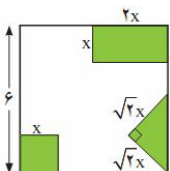
معادله‌ی درجه‌ی دوم

روش اول: تجزیه

۵. معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

۱) $x^2 - 5x = 0$ ۲) $x^2 = -7x$ ۳) $2x^2 - 6x = 0$ ۴) $(x+2)(x-3) = x-3$
 ۵) $\frac{x^2}{3} = x$ ۶) $x^2 - 25 = 0$ ۷) $x^2 = 81$ ۸) $4x^2 = 9$
 ۹) $x^2 - 7 = 0$ ۱۰) $4x^2 - 25 = 0$ ۱۱) $(x-3)^2 = 4$ ۱۲) $5t^2 = 20$
 ۱۳) $(12)2x^2 - 8 = 0$ ۱۴) $x^2 = 5 - x^2$ ۱۵) $2x^2 - 8x = 0$ ۱۶) $x^4 - 2x^2 = 0$
 ۱۷) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ۱۸) $x^2 + x - 20 = 0$ ۱۹) $9 - 6z + z^2 = 0$ ۲۰) $9x^2 + 3x - 2 = 0$
 ۲۱) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ۲۲) $y^2 + 10y + 25 = 0$ ۲۳) $x^2 + 4x + 4 = 0$ ۲۴) $4k^2 - 12k + 8$

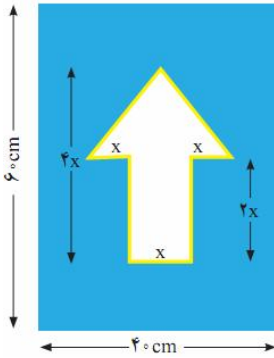
۶. از مربعی به ضلع $6cm$ ، سه شکل زیر بریده شده است. مساحت باقی‌مانده $24cm^2$ است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟



۷. برای ساخت تابلوی راهنمای ((یک طرفه)) روی یک پل، مطابق شکل زیر، از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه ۱cm^2 برچسب سفید، ۳۰ تومان و هزینهی ۱cm^2 برچسب آبی، ۱۰ تومان است. مجموع هزینهی برچسب‌های سفید و آبی ۲۷۰۰۰ تومان شده است.

الف) اندازهی x چقدر است؟

ب) اگر در تابلوی راهنمایی، مطابق شکل زیر، از خطوط برچسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینهی ۱cm^2 آن ۱۰۰ تومان است، هزینهی رنگ‌آمیزی تابلو، ۳۴۸۰۰ تومان می‌شود. در این حالت، اندازهی x چقدر است؟



۸. در معادلهی $(x-1)^2 = k$:

الف) جواب این معادله را در صورت وجود برای $k=2, k=4, k=-9$ به دست آورید.

ب) به ازای چه مقادیری از k ، معادله ریشهی مضاعف دارد؟

پ) به ازای چه مقادیری از k ، معادله دو ریشهی حقیقی دارد؟

ت) به ازای چه مقادیری از k ، معادله ریشهی حقیقی ندارد؟

۹. معادلهی درجهی دومی بنویسید که جواب‌های آن $x=2$ و $x=7$ باشد. آیا این جواب منحصر به فرد است؟

۱۰. معادلهی درجهی دومی بنویسید که جواب‌های آن $x=-3$ و $x=5$ باشد. آیا این جواب منحصر به فرد است؟

۱۱. معادلهی درجهی دومی بنویسید که جواب‌های آن $x=-2$ و $x=-4$ باشد.

۱۲. معادلهی درجهی دومی بنویسید که $x=1$ ریشهی مضاعف آن باشد.

روش دوم: مربع کامل

۱۳. معادلات درجهی دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

۱) $x^2 - 8x = -12$	۲) $x^2 + 2x - 8 = 0$	۳) $x^2 + 6x = -8$	۴) $x^2 - 10x + 21 = 0$
۵) $x^2 + 5x - 14 = 0$	۶) $x^2 - 5x + 6 = 0$	۷) $x^2 + 6x + 9 = 0$	۸) $r^2 + 3r = 3$
۹) $s^2 - 3s + 3 = 0$	۱۰) $x^2 + \frac{1}{4}x = -x$		

روش سوم: دلتا (روش کلی):

۱۴. معادلات زیر را به روش کلی (دلتا) حل کنید.

۱) $2x^2 - 5x + 3 = 0$	۲) $x^2 - 6x = -9$	۳) $4x^2 - 3x - 1 = 0$	۴) $-2x^2 + 7x - 3 = 0$
۵) $2x^2 - 7x + 5 = 0$	۶) $x^2 - x + 1 = 0$	۷) $-2x^2 + x + 3 = 0$	۸) $-x^2 + 4x - 4 = 0$
۹) $x^2 - 3x + 2 = 0$	۱۰) $4x^2 + 7x - 2 = 0$	۱۱) $3x^2 + x + 7 = 0$	۱۲) $r - r^2 = 3$

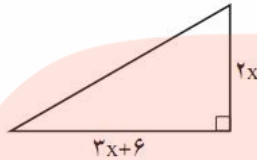
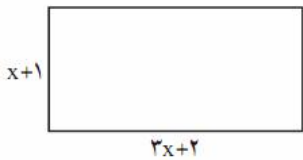
۱۳) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$ ۱۴) $x^2 + 2\sqrt{3}x = 9$

۱۵. معادله‌های زیر را حل کرده و با به دست آوردن ریشه‌های معادله، x_1 و x_2 ، حاصل $x_1 + x_2$ و همچنین $x_1 \times x_2$ ، مشخص کنید چه رابطه‌ای بین مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها و ضرایب a, b, c در معادلات زیر وجود دارد؟

۱) $3x^2 + 5x - 2$ ۲) $4x^2 + 3x - 7 = 0$ ۳) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

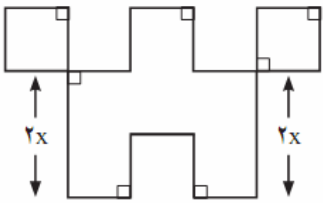
۱۶. نیما از پسرعمویش کیان، سه سال بزرگ‌تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو برابر با ۴۰ باشد، پسر عموی کوچک‌تر چند سال دارد؟

۱۷. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند. طول و عرض مستطیل چقدر است؟

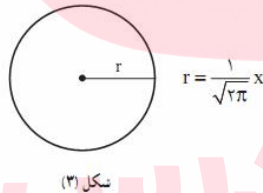
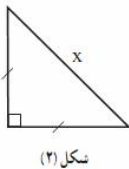
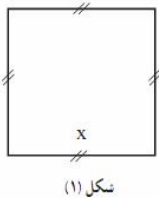


۱۸. طول ضلع مربعی را با به دست آوردن قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد.

۱۹. در شکل زیر، طول تمام پاره‌خط‌ها، به جز دو پاره‌خط مشخص شده در شکل، برابر x است. اگر اندازه‌ی مساحت شکل، برابر با اندازه‌ی محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید.



۲۰. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر، برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



۲۱. اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر ۴- باشد، جواب دیگر این معادله چند است؟

۲۲. اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $3x^2 + mx - 8 = 0$ برابر ۲ باشد، جواب دیگر این معادله چند است؟

۲۳. کدام‌یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a ، همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

۱) $x^2 + ax - 1 = 0$ ۲) $x^2 - x + a = 0$

کاربردی از معادلات درجه‌ی دوم

۲۴. در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر، از رابطه‌ی $p(x) = -0.004x^2 + 8/15x - 100$ به دست می‌آید.

(الف) اگر این کارگاه ۱۰۰ چتر بفروشد، چقدر سود می‌کند؟

(ب) اگر این کارگاه چتری نفروشد، چقدر از دست می‌دهد؟

(پ) به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سربه‌سر خود می‌رسد؟ چندمین تولید چتر برای کارگاه سودآور است؟

۲۵. در یک کارگاه تولید دوچرخه، هزینه‌ی اولیه برای خرید دستگاه و تبلیغات ۷ میلیون تومان است. هزینه‌ی تولید عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه. اگر x قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش از رابطه‌ی $70000 - 200x$ به دست آید:

الف) تابع سود کارخانه را بنویسید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می‌شود؟

درس ۳: معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

۲۶. معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{x+1}{x+2} + \frac{5}{x+2} = 0$$

$$۳) \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$۵) \frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$$

$$۷) \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

$$۹) 1 + \frac{8}{x^2} = \frac{4}{x}$$

$$۱۱) \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$۱۳) \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$۱۵) \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$۲) \frac{10}{x-4} - \frac{2x-6}{x-4}$$

$$۴) \frac{x-3}{x+2} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$۶) \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$$

$$۸) \frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$$

$$۱۰) \frac{3x-5}{x+3} = 1$$

$$۱۲) \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$$

$$۱۴) \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{x-1}{x+2}$$

۲۷. به ازای چه مقدار m معادله‌ی $\frac{m}{x+3} + \frac{x}{x-1} = 1$ دارای جواب ۵ است؟

۲۸. به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x = 2$ است؟

۲۹. به ازای چه مقدار k ، معادله‌ی $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟

۳۰. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۳۱. دو شیر آب A و B به یک استخر متصل‌اند. شیر A استخر را در ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پر می‌کند. چنانچه دو شیر را باهم باز کنیم، آن‌گاه استخر در ۱۲ ساعت پر می‌شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟

۳۲. یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آنها اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه‌ی $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بودند؟

۳۳. هنگامی که دو چاپگر باهم کار می‌کنند، فیش حقوقی کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

فصل سوم: تابع

درس ۱: مفهوم تابع

۱. با توجه به رابطه‌های داده شده، جدول مربوطه را تکمیل کنید.

x	۱	۵	۳	...	$\frac{1}{2}$	۰	...
y	۱	-۷	...	۳	۰

$y = -2x + 3$

x	۱	۲	...	۰	-۱
y	۲	...	$\frac{5}{4}$

$y = x^2 + 1$

۲. قد شخصی ۱۷۷ سانتی‌متر و وزن او ۹۰ کیلوگرم است. نماتوب او را محاسبه کنید.

۳. اگر قد فردی ۱۷۵ سانتی‌متر و وزن او ۸۶ کیلوگرم باشد. مشخص کنید این شخص وزن مناسب دارد یا دارای اضافه وزن یا کمبود وزن است؟

۴. حقوق ماهیانه‌ی یک کارمند از رابطه‌ی $y = 10000t + 2500000$ به دست می‌آید که در آن t تعداد ساعت‌های اضافه کاری ماهانه‌ی شخص است.

الف) متغیر مستقل و وابسته را در رابطه‌ی فوق بیابید.

ب) اگر این کارمند در آبان ماه ۴۰ ساعت اضافه کار داشته باشد، دریافتی کل او را در اردیبهشت ماه حساب کنید.

پ) اگر این کارمند بخواهد در یک ماه ۳۱۰۰۰۰۰ تومان دریافت کند، در آن ماه باید چند ساعت اضافه کار داشته باشد؟

۵. متغیر مستقل و وابسته را در رابطه‌ی $y = 4x^2 + \frac{1}{2}$ بیابید.

۶. می‌دانیم مساحت دایره از رابطه‌ی $S = \pi r^2$ به دست می‌آید. در این رابطه π عددی است ثابت که تقریباً

$\pi = 3/14$ در نظر گرفته می‌شود. و شعاع دایره است.

الف) آیا متغیر S تابعی از شعاع دایره است؟

ب) آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع دایره است؟

پ) کدام متغیر مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟

ت) جدول زیر را کامل کنید.

r (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
S (مساحت)	π	...	4π
P (محیط)	6π	...

۷. اگر $(x - 4, 5) = (9, 2y - 3)$ باشد، مقدار x و y را حساب کنید.

۸. جدول زیر را با توجه به رابطه‌ی داده شده تکمیل کنید.

x	-۱	۲	$y = 3x + 1$
y	-۲	$3\sqrt{2} + 1$...	
(x,y)	(-۱, -۲)	(..., ۱)	($\frac{2}{3}, 3$)	(۱, ...)	(..., ...)	(..., ...)	

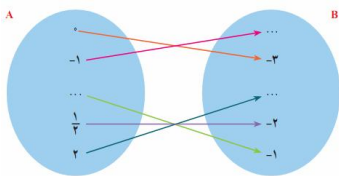
۹. با توجه به رابطه‌ی خطی $y = 2x - 3$ ، اگر فرض کنیم x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه‌ی

$$A = \left\{ -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}$$

الف) جدول زیر را تکمیل کنید.

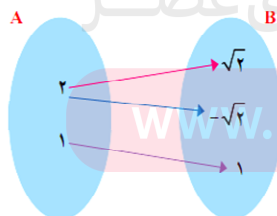
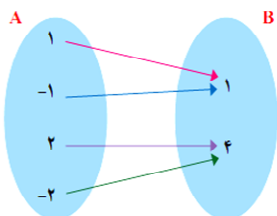
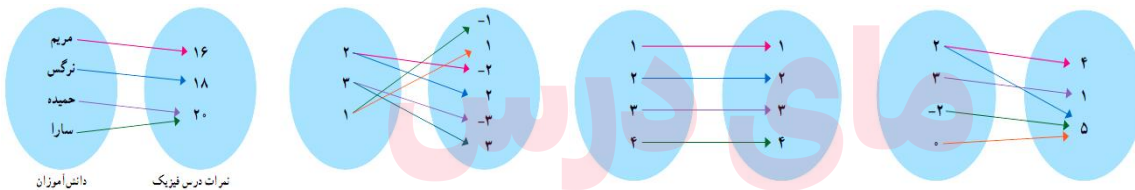
x	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲	$y = 2x - 3$
y	-۵	
(x,y)	(-۱, -۵) C	(۰, ...) D	

ب) در نمودار پیکانی زیر، جای خالی را پر کنید.

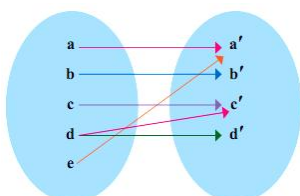


پ) نمودار رابطه‌ی خطی بالا را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

۱۰. کدام یک از رابطه‌های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع اند؟ چرا؟



۱۱. نمودار پیکانی یک رابطه به صورت زیر است. با حذف کدام عضو، این رابطه تابع خواهد شد؟



۱۲. کدامیک از زوجهای مرتب زیر، تابع است؟

۱) $F = \{(2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3)\}$

۲) $G = \{(4, 1), (2, -1), (1, -1), (4, 2)\}$

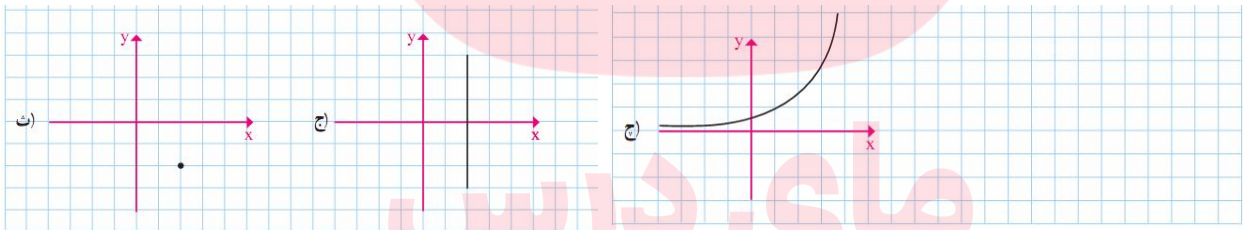
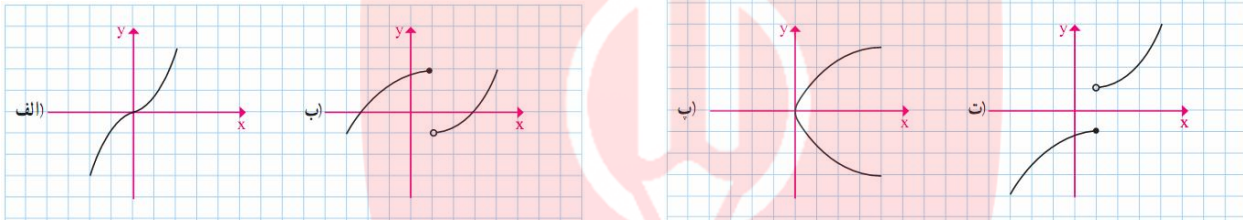
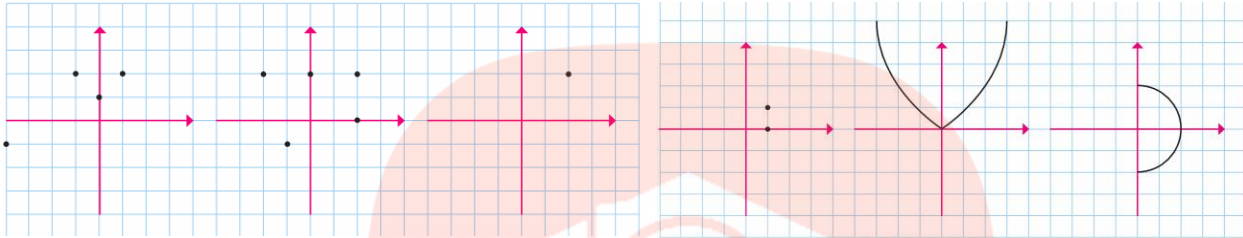
۳) $H = \{(2, 3)\}$

۴) $I = \{(3, 3)\}$

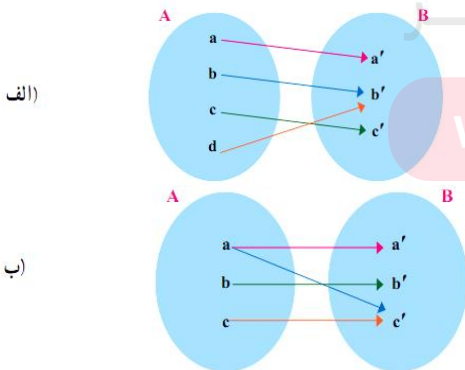
۵) $J = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 4)\}$

۶) $K = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$

۱۳. کدامیک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است؟ تابع اند؟ چرا؟



۱۴. کدامیک از رابطه‌های زیر تابع است؟ برای هر رابطه، نمودار مختصاتی رسم کنید.



پ) $f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$

ت) $g = \{(1, 1)\}$

۱۵. کدامیک از رابطه‌های تعریف شده‌ی زیر، تابع است و کدامیک تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوغاتی آن شهر را نسبت می‌دهد.

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.

پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده‌ی آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله‌ی او را نسبت می‌دهد.

ث) رابطه‌ای که به هر شخص شماره‌ی ملی او را نسبت می‌دهد.

۱۶. اگر A مجموعه‌ای ۳ عضوی و B مجموعه‌ای ۲ عضوی باشد، سه تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تعریف کنید.

۱۷. جدول زیر را کامل کنید.

نمایش بیکانی	نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	توصیفی	جدولی										
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۱</td> <td>۱</td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td>۴</td> </tr> <tr> <td>۳</td> <td>۹</td> </tr> <tr> <td>۴</td> <td>۱۶</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	۱	۱	۲	۴	۳	۹	۴	۱۶
x	y													
۱	۱													
۲	۴													
۳	۹													
۴	۱۶													
			<p>f رابطه‌ای است که به هر عضو مجموعه $A = \{2, 3, 4, 5\}$ توان چهارم آن را نسبت می‌دهد</p>											
		<p>$f = \{(\text{سنا, علی}) \text{ و } (\text{فوتبال, رضا}), (\text{سنا, رضا}) \text{ و } (\text{والیبال, آرش}) \text{ و } (\text{اکتسی, حمید}) \text{ و } (\text{تیراندازی, علی})\}$</p>												

۱۸. در رابطه‌ی زیر، در جاهای خالی اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\}$$

۱۹. مقادیر a و b را چنان بیابید که رابطه‌ی $R = \{(2, 3a), (4, 5), (4, b+2), (2, 6)\}$ یک تابع باشد.

۲۰. مقادیر a و b را چنان بیابید که رابطه‌ی $R = \{(3, a+b), (-1, 14), (3, -2), (-1, 2a-b)\}$ یک تابع باشد.

۲۱. اگر رابطه‌ی f ، تابع باشد، در این صورت حاصل $x^2 + y^2$ را به دست آورید. (مجموعه‌ی f را پس از محاسبه‌ی x و y بنویسید.)

درس ۲: ضابطه‌ی جبری تابع

دامنه و برد تابع

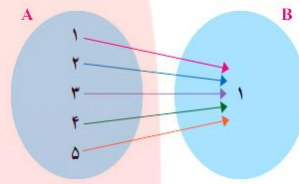
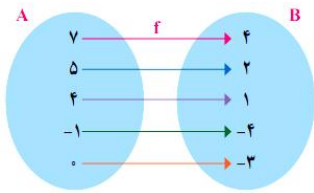
۲۲. در جدول زیر، y تابعی از x است. دامنه و برد این تابع را بنویسید.

x	۲	۳	۴	۵
y	۴	۹	۱۶	۲۵

۲۳. دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.

$$f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$$

$$g = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 0)\}$$



۲۴. با توجه به ضابطه و دامنه‌ی هر تابع، مجموعه‌ی مقادیر یا برد تابع را مشخص کنید.

$$۱) \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = 2x^2 + 1 \end{cases}, A = \{-1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2}\}$$

$$۲) \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases}, A = \{1, -1, 0, 4, \sqrt{3}, \frac{1}{3}, 2\}$$

$$۳) \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \end{cases}, A = \{0, -1, 8, 3, 2\}$$

$$۴) \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{x+1}{x-2} \end{cases}, A = \{-2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\}$$

$$۵) \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x^2 + x + 1 \end{cases}, A = \{0, -1, 1, 2, -2, 3\}$$

$$۶) \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{x+1}{x} \end{cases}, A = \{\frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2, 3\}$$

$$۷) \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = \sqrt{x+1} \end{cases}, A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, 15\}$$

$$۸) \begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(x) = x \end{cases}, A = W\{0, 1, 2, \dots\}$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

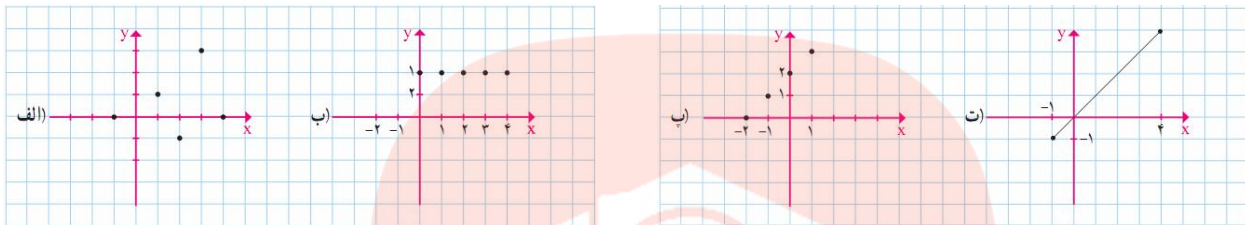


$$۹) \begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(x) = 0 \end{cases}, \quad A = \mathbb{R}$$

۲۵. دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید.

$$\begin{cases} f : A \rightarrow B & R = \{۲, ۳, ۴, ۵, \dots\} \\ f(x) = x + ۴ & A = \{۲, \dots, \dots, \dots\} \end{cases}$$

۲۶. برای هر یک از توابع زیر، دامنه و برد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطه‌ی هر تابع را بنویسید.



۲۷. کدامیک از رابطه‌های زیر تابع است؟ برای هر رابطه، نمودار مختصاتی رسم کنید.

$$۱) \begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = ۲x + ۱ \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = ۲ \end{cases}$$

۲۸. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می‌دهد. ضابطه‌ی f را بنویسید.

درس ۳: نمودار تابع خطی

۲۹. در یک تابع خطی، $f(۰) = ۲$ و $f(۲) = ۳$ می‌باشد.

الف) معادله‌ی خط را به دست آورید.

ب) نمودار خط را رسم کنید.

پ) $f(۶)$ و $f(-۴)$ را به دست آورید.

۳۰. ضابطه‌ی تابع خطی f را که از نقاط $(۲, ۳)$ و $(۴, ۱)$ می‌گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۳۱. اگر نمودار تابع خطی f از مبدا عبور کرده و $f(-۱) = ۲$ باشد، ضابطه‌ی f را نوشته و نمودار آن را رسم کنید.

۳۲. در تابع خطی f داریم $f(۱) = ۵$ و $f(۲) = ۸$ است. مقادیر $f(-۳)$ و $f(۵)$ را بیابید.

۳۳. نمودار یک تابع خطی از مبدا مختصات می‌گذرد و $f(۲) = ۷$ است. در این صورت اختلاف $f(۰/۱)$ و $f(-۰/۱)$ را به دست آورید.

۳۴. نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه‌ی آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \leq x \leq ۱\}$ باشد و از نقطه‌ی $A(۵, ۲)$ بگذرد.

۳۵. مقادیر m و n را چنان بیابید که در تابع با ضابطه $f(x) = mx + n$ داشته باشیم: $f(2) = 4$ و $f(1) = 1$.

۳۶. رابطه‌ی بین درجه‌ی دما برحسب سانتی‌گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم، 20°

درجه‌ی سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارنهایت چقدر افزایش یافته است؟

۳۷. طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده است، ۵ سانتی‌متر است و به ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود.

الف) طول فنر را در حالتی که وزنه‌های ۱، ۲، ۶، ۷ کیلوگرمی به آن آویزان شود، حساب کنید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

اندازه وزنه (برحسب کیلوگرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (برحسب سانتی‌متر)						

پ) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، ابتدا ضابطه‌ی تابع را بنویسید و سپس مقادیر $f(1)$ ، $f(4)$ ، $f(8)$ و $f(10)$ را بر حسب سانتی‌متر محاسبه کنید.

ت) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه محورهای مختصات مشخص کنید و نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

۳۸. یک کارخانه‌ی تولید لوله‌های آبیاری کشاورزی، در هر ساعت ۳/۰ کیلومتر لوله تولید می‌کند.

الف) اگر مترآژ لوله‌ای را که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند، برحسب متر با $f(x)$ نشان دهیم. ابتدا ضابطه‌ی $f(x)$ را بنویسید و سپس جدول زیر را کامل کنید.

x بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
f(x) بر حسب متر					

ب) نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه محورهای مختصات مشخص کنید و نقاط حاصل را به هم وصل کنید.

۳۹. جدول زیر، رابطه‌ی بین عمق و دمای سنگ‌ها را در زیر زمین نشان می‌دهد. x نشان دهنده‌ی عمق برحسب کیلومتر) و y معرف دما (برحسب سانتی‌گراد) است. اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی برحسب عمق باشد:

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

الف) معادله‌ی خط را بنویسید.

ب) در عمق ۶ متری دمای سنگ چه قدر است؟

پ) در چه عمقی دمای سنگ به 440° درجه‌ی سانتی‌گراد می‌رسد؟

۴۰. الف) ضابطه‌ی تابع محیط مستطیل‌هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنهاست، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید تابع خطی است.
ب) آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟

۴۱. یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را ۷۰ تومان می‌فروشد. الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.
ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

درس ۴: نمودار تابع درجه‌ی دو

۴۲. تابع $f(x) = x^2$ را در نظر گرفته و ابتدا جدول زیر را با توجه به ضابطه‌ی تابع کامل کرده و سپس با توجه به جدول، نمودار تابع را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...		9			0					...

۴۳. تابع $f(x) = -x^2$ را در نظر گرفته و ابتدا جدول زیر را با توجه به ضابطه‌ی تابع کامل کرده و سپس با توجه به جدول، نمودار تابع را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...		9			0					...

۴۴. ابتدا مختصات راس سهمی‌های را که معادله‌ی آن‌ها داده شده است، مشخص کنید و سپس نمودار آن‌ها را رسم کنید.

۱) $y = (x-2)^2 + 1$

۲) $y = (x-3)^2 + 2$

۳) $y = (x+1)^2 + 2$

۴) $y = (x+2)^2 - 1$

۵) $y = (x+4)^2 - 2$

۶) $y = (x-1)^2 - 2$

۷) $y = -(x+2)^2 + 2$

۸) $y = -(x-1)^2 + 1$

۹) $y = 2(x-1)^2 + 1$

۱۰) $y = -3(x+1)^2 + 4$

۱۱) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 5$

۱۲) $y = \frac{1}{3}(x-6)^2 - 2$

۱۳) $y = (x+4)^2$

۱۴) $y = -(x-2)^2$

۱۵) $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$

۱۶) $x^2 + 4x - 3$

۱۷) $y = x^2 - 2x + 3$

۱۸) $y = -x^2 + 6x - 2$

۱۹) $-x^2 + 6x - 10$

۲۰) $y = 2x^2 + 4x + 1$

۲۱) $y = 2x^2 - 4x + 1$

۲۲) $y = x^2 + 4x - 2$

۲۳) $y = x^2 + 4x + 1$

۲۴) $y = x^2 + 4x$

۲۵) $y = 2x^2 + 6x$

۲۶) $y = x^2 - 2x$

۲۷) $y = x^2 - 5$

۲۸) $y = 2x^2 + 1$

۲۹) $y = 4 - x^2$

۳۰) $y = -3 + 2x^2$

۴۰۵. نمودار توابع $y = x^2 + 1$ و $y = 2x^2 - 3$ را در یک دستگاه رسم کرده و مختصات نقاط برخورد آن‌ها را به دست آورید.

۴۱۶. نمودار توابع $y = -x^2 + 6x - 1$ و $y = x^2 + 4x - 2$ را در یک دستگاه رسم کرده و مختصات نقاط برخورد آن‌ها را به دست آورید.

۴۷. مقدار ماکسیمم یا می‌نیمم توابع درجه‌ی دو زیر را بیابید.

۱) $y = (x - 2)^2 + 7$

۲) $y = -(x - 2)^2 + 6$

۳) $y = 4x^2 + 8x + 3$

۴) $y = -x^2 + 10x$

۴۸. اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیمم مقدار سود را مشخص کنید.

۴۹. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه‌ی یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با k نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار، مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیمم می‌شود؟

۵۰. اگر $2x + a = 100$ باشد، x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیمم شود.

۵۱. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هر یک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز، x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه‌ی آن برابر $C(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:

الف) تابع سود روزانه‌ی این تولیدی را بنویسید.

ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

پ) بیشترین سود روزانه‌ی این کارگاه چقدر است؟

مای دارس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

شهریور	پایانی دوم	پایانی اول	فصل
۴	۲	۶	فصل ۱
۴	۳	۷/۵	فصل ۲
۵	۲	۶/۵	فصل ۳ تا ص ۷۰
	۴	-	فصل ۳ درس‌های ۳ و ۴
۴	۵/۵	-	فصل ۴
۳	۳/۵	-	فصل ۵
۲۰	۲۰	۲۰	جمع