

سؤالات امتحان نوبت اول درس: ریاضی و آمار	رشته: علوم انسانی	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سال دهم آموزش متوسطه	آزمون میان سال	آزمون شماره (۱)	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید. $(\sqrt{5} + 1)^3$ (آ) 203×197 (ب) $(x-1)(x+1)(x^2+x^2+1)$ (پ)	۱/۵
۲	عبارت‌های زیر را تا حد امکان تجزیه کنید. $27x^2 + 36x + 12$ (آ) $25x^2 + 10x - 3$ (ب) $8 - k^3$ (پ)	۱/۵
۳	به کمک مثلث خیام، حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{5})^4$ را بنویسید. (نیازی به ساده کردن تک تک جملات نیست).	۱
۴	عبارت گویای $\frac{10x-3}{(5x-1)(x+7)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟	۰/۵
۵	عبارت گویای $\frac{x^2-8x}{2x^2-8x+8}$ را تا حد امکان ساده کنید.	۰/۵
۶	حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+4}$	۱
۷	معادلات زیر را حل کنید. $4x^2 - 12x + 8 = 0$ (تجزیه) (آ) $x^2 - 8x - 10 = 0$ (مربع کامل) (پ) $x(x-1) = 2$ (روش کلی یا دلتا) (ب) $(x-1)^2 - 16 = 0$ (ریشه‌گیری) (ت)	۴
۸	معادله گویای $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$ را حل کنید.	۱/۵
۹	در معادله $-10x + x^2 - 1 = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را بدون حل معادله تعیین کنید.	۱
۱۰	معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $0/6$ و $-0/2$ باشد.	۱
۱۱	اگر f بیانگر یک تابع باشد، مقادیر x و y را به دست آورید. $f = \{(3, x-y), (4, 8), (3, 2), (4, x+y)\}$	۱
۱۲	تابع f که دامنه‌اش \mathbb{R} و بردش زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} است به هر عدد، سه برابر مکعب همان عدد به علاوه نصف مربع آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطه f را به طور کامل نوشته و سپس $f(-1)$ را به کمک آن به دست آورید.	۱
۱۳	اگر $f(x) = x^2 - 8x $ و $g(x) = \sqrt{4x-1}$ باشد، حاصل عبارت $3f(1) + [g(1)]^2$ را به دست آورید.	۱
۱۴	دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید: $f: A \rightarrow B$ $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ ، $A = \{2, 3, \sqrt{3}\}$ (ب) 	۱/۵
۱۵	تابع بودن هر یک از موارد زیر را بررسی کنید. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $y^2 - x^2 = 4$ (پ)  $f: \begin{matrix} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ y & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{matrix}$ (ب) (آ)	۲
۲۰	جمع نمره	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	<p>(آ) اتحاد مکعب دوجمله‌ای $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$</p> $\Rightarrow (\sqrt{5}+1)^3 = (\sqrt{5})^3 + 3(\sqrt{5})^2(1) + 3(\sqrt{5})(1)^2 + 1^3 = \sqrt{125} + 15 + 3\sqrt{5} + 1$ $5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 16 = 8\sqrt{5} + 16$ <p>(ب) اتحاد مزدوج $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$</p> $\Rightarrow 203 \times 197 = (200+3)(200-3) = 200^2 - 3^2 = 40000 - 9 = 39991$ <p>(پ) اتحاد چاق و لاغر $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$</p> $\Rightarrow \underbrace{(x-1)(x+1)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x^2+x^2+1) = (x^2-1)(x^2+x^2+1) = (x^2)^3 - 1^3 = x^6 - 1$	۱/۵
۲	<p>(آ) اتحاد مربع دوجمله‌ای $27x^2 + 36x + 12 = 3(9x^2 + 12x + 4) = 3(3x+2)^2$</p> <p>فاکتور از ۳</p> <p>(ب) اتحاد جمله مشترک $25x^2 + 10x - 3 = (\Delta x)^2 + 2(\Delta x) - 3 = (\Delta x + 3)(\Delta x - 1)$</p> <p>(پ) اتحاد چاق و لاغر $8 - k^3 = 2^3 - k^3 = (2-k)(2^2 + 2k + k^2)$</p>	۱/۵
۳	<p>در ردیف پنجم مثلث خیام خواهیم دید که:</p> $(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \Rightarrow (a-b)^4 = 1a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + 1b^4$ $\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{5}\right)^4 = 1\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right) + 6\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^3 + 1\left(\frac{1}{5}\right)^4$ <p>(نیازی به ساده کردن جواب نیست.)</p>	۱
۴	$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow (\Delta x - 1)(x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\Delta} \\ x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases}$	۰/۵
۵	$\frac{x^4 - 8x}{2x^2 - 8x + 8} = \frac{x(x^3 - 8)}{2(x^2 - 4x + 4)} = \frac{x(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{2(x-2)^2} = \frac{x(x^2 + 2x + 4)}{2(x-2)}$	۰/۵
۶	$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+4} = \frac{(x+1)(x^2+4) - (x-1)(x^2+4) + (x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$ $= \frac{x^3 + 4x + x^2 + 4 - x^3 - 4x + x^2 + 4 + x^2 - 1}{(x-1)(x+1)(x^2+4)} = \frac{3x^2 + 7}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$	۱
۷	<p>(آ) می‌توان از ۴ صرف نظر کرد. $4x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow 4(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$</p> <p>(ب) $x(x-1) = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$</p> $\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \begin{cases} \rightarrow x' = \frac{1+3}{2} = 2 \\ \rightarrow x'' = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$	۴

راهنمای تصحیح

ردیف

نمره

(پ) $x^2 - 8x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x = 10$ عدد $\frac{b^2}{4} = \frac{64}{4} = 16$ را به دو طرف می‌افزاییم. اتحاد مربع دو جمله‌ای $x^2 - 8x + 16 = 10 + 16$

$\Rightarrow (x - 4)^2 = 26 \xrightarrow{\text{جذر}} x - 4 = \pm\sqrt{26} \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = \sqrt{26} \Rightarrow x = 4 + \sqrt{26} \\ x - 4 = -\sqrt{26} \Rightarrow x = 4 - \sqrt{26} \end{cases}$

(ت) $(x - 1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 16 \xrightarrow{\text{جذر}} x - 1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 \Rightarrow x = 1 + 4 = 5 \\ x - 1 = -4 \Rightarrow x = 1 - 4 = -3 \end{cases}$

۱/۵ $\frac{24}{10+m} + \frac{1}{1} = \frac{24}{10-m} \Rightarrow \frac{24+10+m}{10+m} = \frac{24}{10-m}$

$\frac{34+m}{10+m} = \frac{24}{10-m} \Rightarrow (34+m)(10-m) = 24(10+m) \Rightarrow m^2 + 48m - 100 = 0$ اتحاد جمله مشترک

$\Rightarrow (m+50)(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -50 \\ m = 2 \end{cases}$ هر دو جواب قابل قبولند، زیرا هیچ مخرجی را صفر نمی‌کنند.

۱ $-10x + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \downarrow a \quad \downarrow b \quad \downarrow c$

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-10)}{1} = 10$, $x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$

۱ $(x - m)(x - n) = 0 \xrightarrow[n=-0/2]{m=0/6} (x - 0/6)(x + 0/2) = 0 \Rightarrow x^2 + 0/2x - 0/12 = 0 \Rightarrow x^2 - 0/4x - 0/12 = 0$

۱ $\begin{cases} (3, x - y) = (3, 2) \\ (4, 8) = (4, x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases}$ جایگزینی در یکی از معادلات $2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow 5 + y = 8 \Rightarrow y = 3$

۱ $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x^3 + \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow f(-1) = 3(-1)^3 + \frac{(-1)^2}{2} = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

۱ $f(x) = |x^2 - 8x| \Rightarrow f(1) = |1^2 - 8(1)| = |-7| = 7$

$g(x) = \sqrt{4x - 1} \Rightarrow g(1) = \sqrt{4(1) - 1} = \sqrt{3} \Rightarrow 3f(1) + [g(1)]^2 = 3(7) + \sqrt{3}^2 = 21 + 3 = 24$

۱/۵ $D_f = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $R_f = \{8\}$ (آ) ۱۴

$f(x) = \sqrt{x^2 - 3} \begin{cases} x=2 \rightarrow f(2) = \sqrt{2^2 - 3} = 1 \\ x=3 \rightarrow f(3) = \sqrt{3^2 - 3} = \sqrt{6} \\ x=\sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{\sqrt{3}^2 - 3} = 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \{2, 3, \sqrt{3}\}$, $R_f = \{0, 1, \sqrt{6}\}$ (ب)

۲ (آ) تابع است، چون عضوهای اول (ها) همگی مختلف هستند.

(ب) تابع نیست، چون از عدد ۱۰ در مجموعه A فلشی خارج نشده است.

(پ) تابع نیست، زیرا اگر مثلاً x را صفر فرض کنیم خواهیم داشت:

(ت) تابع است، چون هر خط عمودی دلخواه که رسم کنیم، نمودار را در ۱ نقطه قطع می‌کند نه بیش تر.

$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$