بسم الله الرّحمن الرّحیم

ریاضی(۱)

رشته‌های ریاضی و فیزیک-علوم تجربی

پایهٔ دهم

دورهٔ دوم متوسطه

تهیه و تنظیم : پریسا استواری
کارشناسی ارشد ریاضی
دبیر ناحیه ۲ استان کرمانشاه

فصل ۱ : مجموعه، الگو و دنباله

درس اوّل: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس دوّم: متمم یک مجموعه

درس سوّم: الگو و دنباله

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

بارم نوبت اول: ۵ نمره

بارم نوبت دوم: ۱/۵ نمره

بارم شهریور: ۲ نمره

درس اوّل: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

انسان در طول تاریخ برحسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است. برخی از مجموعه‌های خاص اعداد به‌صورت زیر است:

مجموعهٔ اعداد طبیعی : $N = \{1،2،3، \dots\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی : $W = \{0. 1،2،3، \dots\}$

مجموعهٔ اعداد صحیح : $Z = \{\dots . -2. -1. 0. 1. 2. \dots\}$

مجموعهٔ اعداد گویا : $Q = \left\{\frac{m}{n} \mid m. n\epsilon Z. n \neq 0\right\}$

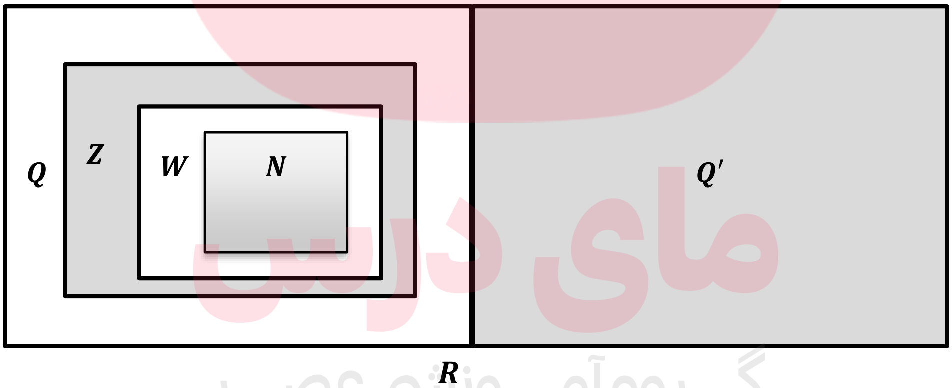
مجموعهٔ اعداد گنگ : $Q' = \{x | x \notin Q\} =$ مجموعهٔ اعدادی که نتوان عضوهای آن را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد

مجموعهٔ اعداد حقیقی : $R = Q \cup Q'$

☑ **نکته:**

۱. رابطهٔ زیر مجموعه بودن بین این مجموعه‌ها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$
$$Q' \subseteq R$$



۲. با توجه به شکل بالا داریم

- $R - Q = Q'$
- $R - Q' = Q$
- $Q \cup Q' = R$
- $Q \cap Q' = \emptyset$

✎ **مثال:**

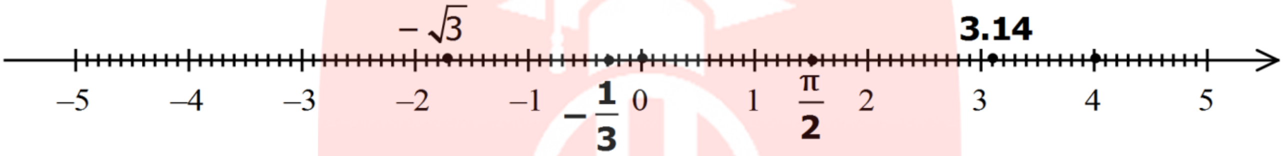
کدامیک از اعداد زیر گویا و کدام‌یک گنگ می‌باشند؟ مکان تقریبی هر یک از آن‌ها را روی محور مشخص کنید.

$$-\frac{1}{3}\,.\,3/14.\frac{\pi}{2}\,.-\sqrt{3}\,.\,6\,.\,0$$

✍ **پاسخ:**

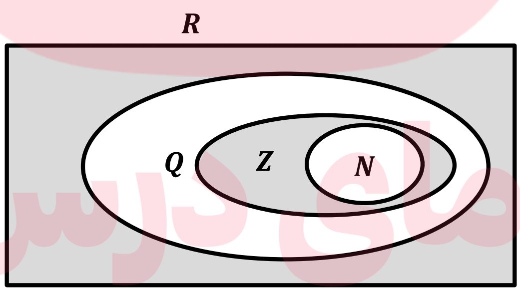
اعداد گویا : $-\frac{1}{3}\,.\,3\cdot 14.\;\;4\,.\,0$

اعداد گنگ : $\frac{\pi}{2}\,.-\sqrt{3}$



◈ **تمرین:**

1- الف) مجموعهٔ R_Q چه نام دارد؟آن را روی شکل زیر هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیهٔ هاشورخورده بنویسید.



ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل بالا در مکان مناسب بنویسید.

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

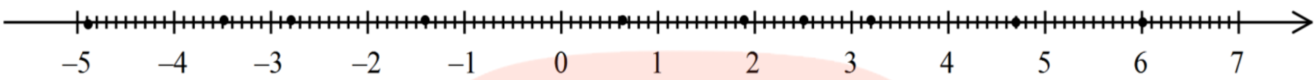
$$\sqrt{17}.\,2.\,200.\frac{\pi}{2}.\frac{2}{6}.\,2\sqrt{5}.-\frac{25}{3}.-9$$

ت) مجموعهٔ اعداد صحیح غیرحسابی را با نمایش اعضا بنویسید.

ث) مجموعهٔ W_N چند عضو دارد؟

2- هر یک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام‌یک از این اعداد گنگ‌اند؟ آنها را مشخص کنید.

$$2 \cdot 45. -\frac{7}{2}. 6. -4 \cdot 9. \pi. -\sqrt{2}$$



بازه(فاصله)

زیرمجموعه‌هایی از R را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص باشد را بازه یا فاصله می‌نامیم.

اگر $a.b$ دو عدد حقیقی باشند، به‌طوریکه $a < b$ ، آنگاه

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a.b)$	$\{x\epsilon R \mid a < x < b\}$	a b
بسته	$[a.b]$	$\{x\epsilon R \mid a \leq x \leq b\}$	a b
نیم باز b (نیم بسته a)	$[a.b)$	$\{x\epsilon R \mid a \leq x < b\}$	a b
نیم باز a (نیم بسته b)	$(a.b]$	$\{x\epsilon R \mid a < x \leq b\}$	a b
نیم باز	$[a.+\infty)$	$\{x\epsilon R \mid x \leq a\}$	a
نیم باز	$(-\infty.a]$	$\{x\epsilon R \mid x \leq a\}$	a
باز	$(a.+\infty)$	$\{x\epsilon R \mid x < a\}$	a
باز	$(-\infty.a)$	$\{x\epsilon R \mid x < a\}$	a

☑ نکته:

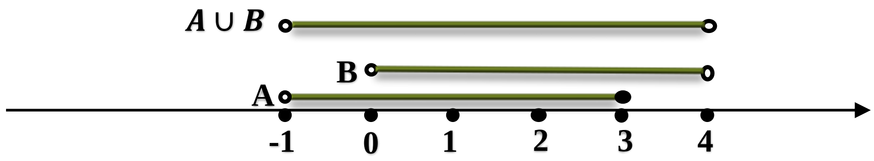
دو نماد $-\infty$ (منفی بینهایت) و $+\infty$ (مثبت بینهایت) **عدد حقیقی نیستند.**

مثال:

اگر $A = \{x\epsilon R \mid -1 < x \leq 3\}$ و $B = (0.4)$ باشند، $A \cup B$ و $A \cap B$ را به‌صورت بازه نوشته و روی محور اعداد مشخص کنید.

پاسخ:

ابتدا مجموعه‌های A و B را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم. $A \cup B$ برابر مجموعه‌ای است که اعضای آن در A یا در B و یا در هر دو باشد.



$A \cup B = (-1.4)$

◈ تمرین:

جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
		(-2.2)	
			
		$[0.2)$	
	$\{x\epsilon R \mid 1 < x \le \sqrt{5}\}$		
			
	$\left\{x\epsilon R \mid x < \frac{1}{2}\right\}$		
	$\{x\epsilon R \mid x \ge -2\}$		

◈ تمرین:

1- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

پ) $0\epsilon(-2.0]$ ب) $-2\epsilon(-2.0]$ الف) $\frac{4}{3}\epsilon[\frac{1}{2}.2)$

د) $\sqrt{2}\epsilon(0.1)$ خ) $[2.5] = (2.5]$ ت) $-2\epsilon\{-2.0\}$

چ) $\{0.1\} \subseteq [-1.2)$ ج) $[-1.2] \subseteq (-1.2)$ ث) $-1\epsilon\{-2.0\}$

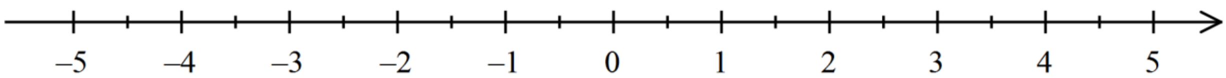
ح) $\emptyset \subseteq (-17.0]$

2- هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.

$0 \cdot 2$ $\qquad 6 \cdot 022 \times 10^{23}$ $\qquad -\frac{5}{2}$ $\qquad -500$ $\qquad \sqrt{3}$ $\qquad -2$

(-2.3) $\qquad \left(-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right]$ $\qquad [3.+\infty)$ $\qquad [-2.0]$ $\qquad (-\infty.-4)$ $\qquad [1.4]$

3- نمایش هندسی دو بازه $A = (-4.2]$ و $B = (-1.3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارتهای زیر را بنویسید.



الف) $A \cap B$

ب) $A \cup B$

پ) $A - B$

ت) $B - A$

4- اگر $A = \{x\epsilon R| -1 \le x + 1 \le 2\}$ و $B = \{x\epsilon R| -3 < x \le 0\}$ باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه نمایش دهید.

الف) A

ب) $A \cup B$

پ) $A - B$

ت) B

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های متناهی:

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی می‌باشد، مجموعه‌های متناهی (باپایان) می‌نامیم.

مجموعه‌های نامتناهی:

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه‌های نامتناهی می‌گوییم.

در واقع مجموعه‌ای که متناهی نباشد را مجموعه متناهی می‌نامیم.

مثال:

مجموعۀ اعداد اول یک رقمی یک مجموعۀ متناهی است. زیرا

مجموعه اعداد اول یک رقمی$=\{2.3.5.7\}$

که یک مجموعۀ چهار عضوی و متناهی است.

☑ **نکته:**

تعداد اعضای بعضی مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد که با صرف وقت کافی و با بعضی امکانات می‌توان تعداد آنها را به‌دست آورد. مانند تعداد ماشین‌های سواری شهر تهران، مجموعه انسان‌های روی زمین، مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب(عدد آووگادرو)، مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی.

درس دوّم: متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع:

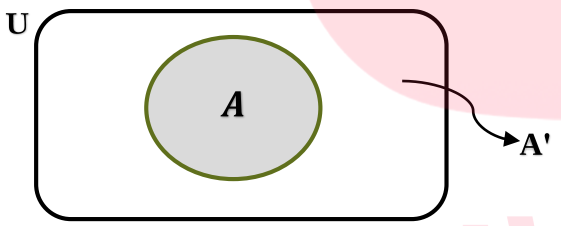
مجموعه‌ای است که تمام اعضای مجموعه‌های مورد بحث از آن انتخاب می‌شوند و آن را با U یا M نشان می‌دهند.

✎ **مثال:**

وقتی می‌گوییم از اعداد طبیعی، مضارب 3 را انتخاب می‌کنیم، اعداد طبیعی مجموعهٔ مرجع است.

مجموعهٔ متمم:

متمم مجموعهٔ A که آن را با A' نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که شامل همهٔ عضوهای U (مجموعهٔ مرجع) به غیر از عضوهای مجموعهٔ A است.



$$\rightarrow \quad A' = \{x | x\epsilon U \,.\, x \notin A\} = U - A$$

✎ **مثال:**

فرض کنید $U = \{1.2.3.4.5.6.7\}$ مجموعهٔ مرجع، $A = \{1.2.4\}$ و $B = \{3.4.5.7\}$ باشند، مجموعه‌های $A' - B$ و $A' \cup B'$ را با اعضا مشخص کنید.

✍ **پاسخ: ابتدا هر یک از مجموعه‌های A' و B' را با اعضا مشخص می‌کنیم.**

$$A' = U - A = \{\cancel{1}.\cancel{2}.3.\cancel{4}.5.6.7\} - \{1.2.4\} = \{3.5.6.7\}$$
$$B' = U - B = \{1.2.\cancel{3}.\cancel{4}.\cancel{5}.6.\cancel{7}\} - \{3.4.5.7\} = \{1.2.6\}$$
$$A' - B = \{\cancel{3}.\cancel{5}.6.\cancel{7}\} - \{3.4.5.7\} = \{6\}$$
$$A' \cup B' = \{3.5.6.7\} \cup \{1.2.6\} = \{1.2.3.5.6.7\}$$

◈ **تمرین:**

فرض کنید A مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از 4 و B مجموعهٔ اعداد صحیح کمتر از 4 باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

ب)A چند عضو دارد؟

پ) درباره تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟

◈ **تمرین:**

1- دو مجموعهٔ متناهی نام ببرید.

2- دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

3- دو مجموعهٔ نامتناهی مانند A و B مثال بزنید که $B \subseteq A$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

☑ **نکته:**

اگر A و B دو زیر مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند، آنگاه روابط زیر برقرار است.

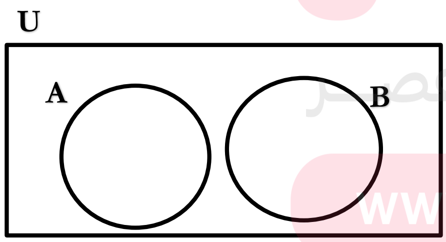
1) $(A')' = A$ 2) $A \cap A' = \emptyset$ 3) $A \cup A' = U$ 4) $\emptyset' = U$

5) $U' = \emptyset$ 6) $A - B = A \cap B'$ 7) $A - B = A - (A \cap B)$

8) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (قانون دمورگان)   9) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (قانون دمورگان)

دو مجموعهٔ جدا از هم:

به هر دو مجموعه که عضو مشترکی نداشته باشند دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.نمودار ونِ دو مجموعهٔ جدا از هم به‌صورت مقابل است.



➔ $A \cap B = \emptyset$

✎ **مثال:**

مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج، دو مجموعهٔ جدا از هم هستند.

مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد : $O = \{1.3.5.\cdots\}$

O و E دو مجموعهٔ جدا از هم هستند . ➔ $O \cap E = \emptyset$ ➔

مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج : $E = \{2.4.6.\cdots\}$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

برای مجموعهٔ متناهی A ، تعداد عضوهای آن را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم.

- اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند، آنگاه تعداد عضوهای مجموعهٔ $A \cup B$ برابر است با

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

- اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند، آنگاه

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

- اگر U مجموعهٔ مرجع و متناهی باشد، آنگاه

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

مثال:

در یک کلاس 30 نفره، 17 نفر عضو تیم فوتبال ، 15 نفر عضو تیم والیبال و 7 نفر عضو هر دو تیم هستند.

الف) چند نفر عضو حداقل یکی از این دو تیم هستند؟

ب) چند نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نمی‌باشند؟

پاسخ:

مجموعهٔ تمام دانش آموزان را با U، مجموعهٔ دانش آموزان تیم فوتبال را با A و مجموعهٔ دانش آموزان تیم والیبال را با B نشان می‌دهیم.

الف)

$$n(A) = 17 \ . \ n(B) = 15 \ . \ n(A \cap B) = 7$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 17 + 15 - 7 = 25$$

ب)

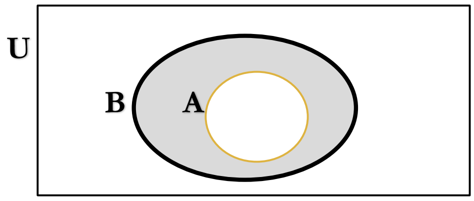
$$n(U) = 30 \ . \ n(A \cup B) = 25 \ \rightarrow \ n((A \cup B)') = 30 - 25 = 5$$

نکته:

1- اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی و U مجموعهٔ مرجع و متناهی باشد، آنگاه

$$1)\ n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$
$$2)\ n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

2- اگر $A \subseteq B \subseteq U$، آنگاه $B' \subseteq A'$.



◈ **تمرین:**

الف) $\frac{1}{3}$ عددی بین 0 و 1 است. چهار عدد گویای دیگر از بازهٔ (0.1) بنویسید.

ب) آیا می‌توان بین 0 و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازهٔ (0.1) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می‌توان گفت؟

◈ **تمرین:**

در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف) مجموعهٔ اعداد صحیح کوچک‌تر از 5- یک مجموعهٔ .... است.(متناهی-نامتناهی)

ب) مجموعهٔ اعداد طبیعی چهار رقمی یک مجموعهٔ .... است.(متناهی-نامتناهی)

پ) اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \emptyset$ باشد، دو مجموعهٔ A و B را دو مجموعهٔ .... می‌نامیم.

ت) اگر A یک مجموعهٔ نامتناهی و B یک مجموعهٔ متناهی باشد، آنگاه $A - B$ یک مجموعهٔ .... است.

ث) اگر A دارای یک زیر مجموعهٔ نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعهٔ .... خواهد بود.

◈ **تمرین:**

1- فرض کنید U مجموعهٔ تمام مضرب‌های طبیعی عدد 5 باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیرمجموعهٔ متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند C و D از U بنویسید به‌طوریکه $C \subseteq D$.

2- متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعۀ اعداد طبیعی.

ب) مجموعۀ شمارنده‌های طبیعی عدد 36.

پ) بازه $(\frac{1}{4}.\frac{1}{2})$.

ت) $A = \{x \epsilon N | 1 < x < 2\}$.

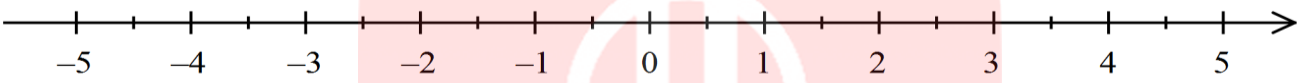
ث) مجموعۀ مضرب‌های طبیعی عدد 100.

ج) مجموعۀ اعداد طبیعی اول و دورقمی.

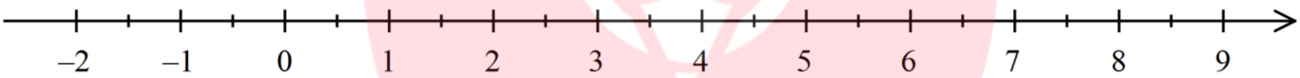
چ) مجموعۀ تمام مربع‌ها.

3- حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به‌دست آورید.

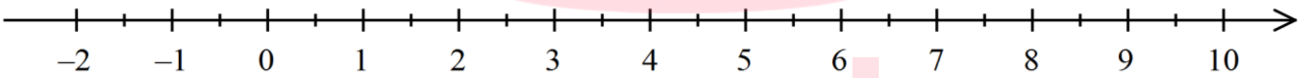
الف) $(-3.0) \cup (-2.5]$



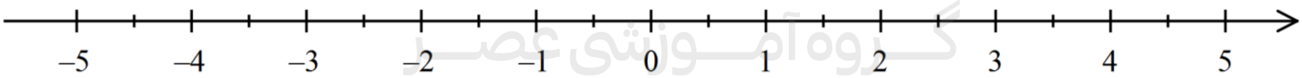
ب) $(-\infty.6] \cap [2.9)$



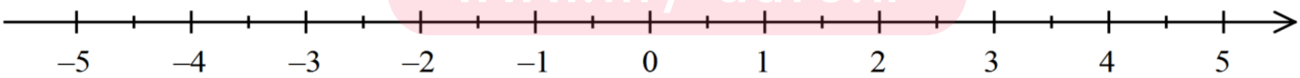
پ) $(3.+\infty) \cap (6.10]$



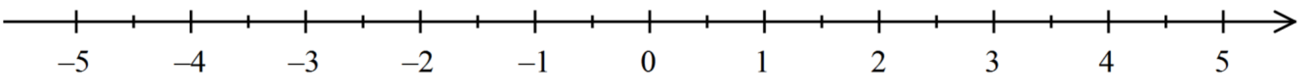
ت) $(-\infty.1) \cup [1.+\infty)$



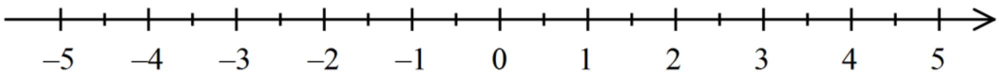
ث) $(3.+\infty) - [2.4)$



ج) $[2.4) - (3.+\infty)$



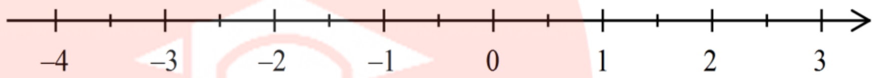
4- مجموعهٔ $R-\{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به‌صورت اجتماع دو بازه بنویسید.



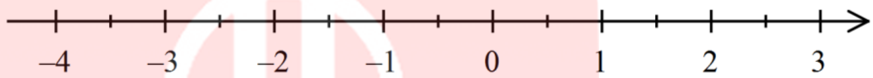
5- اگر $A \subseteq B$ مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

6- الف) دو مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور مشخص کنید.

$A=\{x\epsilon Z|-3<x\leq 2\}$



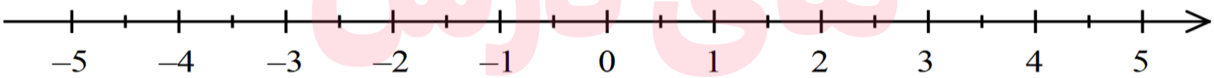
$B=\{x\epsilon R\,|-3<x\leq 2\}$



ب) A را با نمایش اعضا و B را به‌صورت یک بازه بنویسید.

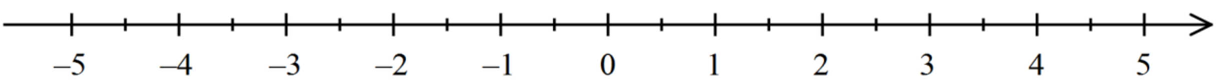
پ) در مورد A، اگر مجموعهٔ مرجع را Z در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

ت) در مورد B با فرض اینکه R مجموعهٔ مرجع باشد، B' را روی محور مشخص کنید.



7- الف) اگر Z مجموعهٔ مرجع باشد، آنگاه N' را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

ب) اگر R مجموعهٔ مرجع باشد، در این‌صورت N' را روی محور نمایش دهید.



8- فرض کنیم $U=\{1.2.3.4.5\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A=\{1.2.3\}$ و $B=\{2.4\}$.جدول زیر را کامل کنید.

$A-(A\cap B)$	$A-B$	$A'\cap B'$	$(A\cup B)'$	$(A')'$

9- یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت21 فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها 7 فیلم کارتونی و 8 فیلم طنز وجود دارد، بطوریکه 3 تا از فیلم‌های کارتونی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوبست تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) کارتونی یا طنزند.

ب) غیرکارتونی و غیرطنزند.

10- اگر $n(A)=15$ ، $n(A\cap B)=5$ و $n(A\cup B)$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

11- در یک نظرسنجی از 110 مشتری یک فروشگاه، مشخص شد که 70 نفر آنها در یم ماه گذشته از محولات شرکت A و 57 نفشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین 32 نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این 110 نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

درس سوّم: الگو و دنباله

الگو:

الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرارشونده، رشدکننده یا ترکیبی از این دو باشند. در این کتاب ما با الگوهای عددی و شکلی کار می‌کنیم.

در هر الگوی عددی جملهٔ اوّل را با a_1 ، جملهٔ دوّم را با a_2 و به‌همین ترتیب جملهٔ n ام این الگو را با a_n نمایش می‌دهیم. a_n را جملهٔ عمومی الگو می‌نامیم. با داشتن جملهٔ عمومی الگو، می‌توان مقدار هر جمله از یک الگو را به‌دست آورد.

مثال:

جملات عمومی یک الگو به‌صورت $a_n = \frac{2n+1}{n+4}$ است.

الف) مقدار جملهٔ دهم الگو را مشخص کنید.

$$n = 10 \ . \ a_n = \frac{2n+1}{n+4} \ . \ a_{10} = \frac{2\times10+1}{10+4} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

ب) جملهٔ چندم الگو برابر $\frac{7}{4}$ است؟

$$a_n = \frac{7}{4} \ . \ \frac{2n+1}{n+4} = \frac{7}{4} \rightarrow 4(2n+1) = 7(n+4) \rightarrow 8n+4 = 7n+28 \rightarrow$$

$8n - 7n = 28 - 4 \rightarrow n = 24 \rightarrow$ جملهٔ 24 ام

مثال:

اگر جملهٔ عمومی یک الگو به‌صورت $a_n = 2n^2 + 1$ باشد، سه جملهٔ اوّل آن را به‌دست آورید.

پاسخ:

جملهٔ اوّل الگو: $a_1 = 2(1^2) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

جملهٔ دوّم الگو: $a_1 = 2(2^2) + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9$

جملهٔ سوّم الگو: $a_1 = 2(3^2) + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19$

الگو: $3.9.19.\cdots$

الگوی خطی:

الگوهایی که جملهٔ عمومی آنها به‌صورت $t_n = an + b$ باشد را با توجه به شباهت آن به معادلهٔ خط، الگوی خطی می‌نامیم. که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. t_n یک عبارت دوجمله‌ای از درجهٔ یک بر حسب n می‌باشد.

☑ نکته:

اختلاف هر دو جملهٔ متوالی در الگوهای خطی، برابر ضریب n می‌باشد. که همان شیب در معادلهٔ خط است.

✎ مثال:

در یک الگوی خطی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب 9 و 23 می‌باشند. جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

✍ پاسخ:

فرض می‌کنیم جملهٔ عمومی الگو $t_n = an + b$ باشد. داریم

$$t_5 = a(5) + b = 9$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5a + b = 9 \\ 12a + b = 23 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -5a - b = -9 \\ 12a + b = 23 \end{cases} \rightarrow 7a = 14 \rightarrow a = 2$$

$$t_{12} = a(12) + b = 23$$

$$\xrightarrow{t_n = an + b} 5(2) + b = 9 \rightarrow b = 9 - 10 = -1 \rightarrow t_n = 2n - 1$$

الگوی غیرخطی:

هر الگویی که جمله عمومی آن به‌صورت $t_n = an + b$ نباشد را الگوی غیرخطی می‌نامیم.

✎ مثال:

آیا الگویی با جملات $5 . 8 . 11 . 14 .\cdots$ خطی است؟

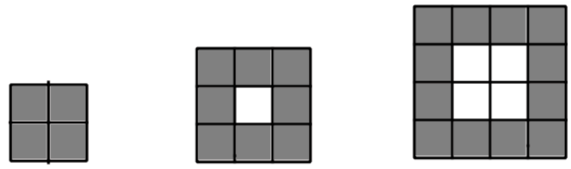
پاسخ:

بله، زیرا اختلاف هر دو جملهٔ متوالی آن، مقدار ثابت 3 است.

$$\overset{+3}{\frown}\ \overset{+3}{\frown}\ \overset{+3}{\frown}$$
$$5 \;.\; 8 \;.\; 11 \;.\; 14 \;.\cdots$$

◈ تمرین:

الف) شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



شکل 1 — 4 مربع رنگی

شکل 2 — 8 مربع رنگی

شکل 3 — 12 مربع رنگی

شمارهٔ شکل : n	1	2	3	4	5
تعداد مربع‌های رنگی : b_n	4	8	....	....	....
رابطهٔ بین n و b_n	$b_1 = 4$	$b_2 =$....	....	....	....

ب) چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می‌شود؟

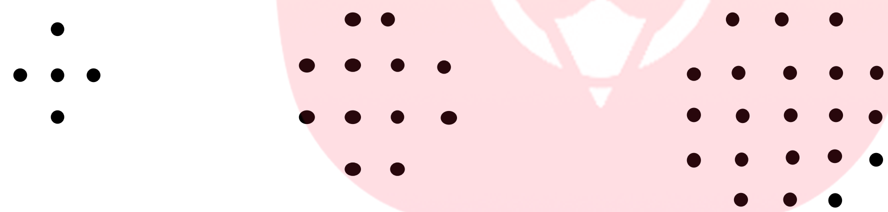
پ) با توجه به جملات الگو، مقدار a در رابطهٔ $t_n = an + b$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار b، حاصل t_n را به‌دست آورید.

ت) شکل شمارهٔ 250 دارای چند مربع رنگی است؟

ث) در چه مرحله‌ای از الگوی بالا، تعداد مربع‌های رنگی برابر 144 است؟

◈ تمرین:

الف) در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم و جدول را کامل کنید.



شکل 1 — 5 نقطه

شکل 2 — 12 نقطه

شکل 3 — .... نقطه

شمارهٔ شکل : n	1	2	3	4	5
تعداد نقطه‌ها : b_n	5	12	....	....	....
رابطهٔ بین n و t_n	$t_1 = 5$	$t_2 =$....	....	....	....

ب) آیا این الگو یک الگوی خطی است؟چرا؟

پ) آیا شما روشی برای یافتن t_n می‌شناسید؟

دنباله:

هر تعداد عدد که پشت سرهم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند. توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند.

◈ تمرین:

جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف) $a_n = n^2 - 1 \quad : \quad 0.3.\cdots.15.24$

ب) $b_n = -n + 4 \quad : \quad 3.2.1.0.\cdots.-2$

پ) $c_n = -13 + 2n \quad : \quad -11.\cdots.-1.\cdots.-3$

◈ تمرین:

در هر سطر جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جملهٔ بعدی را بنویسید و جملهٔ عمومی دنباله را حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-1	-2	-3	-4					$-n$	
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$						
1	4	9	16						
0.1	0.01	0.001	0.0001						
-1	8	-27	64						

دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله‌های حسابی:

دنباله‌ای که در آن هر جمله(به جز جملهٔ اوّل) با اضافه شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به‌دست می‌آید، یک دنبالهٔ حسابی می‌نامیم و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گوییم و آن را با d نمایش می‌دهیم.

نکته:

1- اگر جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی t_n باشد، آنگاه

$$d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \cdots = t_n - t_{n-1}$$

2- جملهٔ n ام یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اوّل t_1 و قدر نسبت d به‌صورت زیر است.

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

3- شکل دنبالهٔ حسابی، به‌صورت الگوی خطی است.

4- اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه $2b = a + c$ و عدد b را واسطهٔ حسابی دو عدد a و c می‌گوییم.

مثال:

در دنبالهٔ حسابی زیر، جملهٔ بیست و پنجم را مشخص کنید.

$-5. -2. 1. \cdots$

پاسخ:

$t_1 = -5 \ . \ d = t_2 - t_1 = -2 - (-5) = 3 \ . \ t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow t_{25} = -5 + 24 \times 3 = 67$

مثال:

بین دو عدد 11 و 41 با جملهٔ اوّل 11، پنج واسطهٔ حسابی درج کنید.

پاسخ:

می‌خواهیم بین دو عدد 11 و 41 پنج عدد قرار دهیم به‌طوریکه هفت عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند.

$t_1 = 11 \ . \ t_7 = 41 \rightarrow t_1 + 6d = 41 \rightarrow 11 + 6d = 41 \rightarrow 6d = 30 \rightarrow d = 5$

بنابراین هفت عدد حاصل به‌صورت زیر است.

$11. 16. 21. 26. 31. 36. 41$

تمرین:

در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جملهٔ بعدی را بنویسید و سپس جملهٔ عمومی هر کدام را به‌دست آورید.

الف) $5. 10. 15. 20. \cdots. \cdots. \cdots$ $\quad . d = \cdots$ $\quad . a_n = \cdots$

ب) $1. 3. 5. 7. \cdots. \cdots. \cdots$ $\quad . d = \cdots$ $\quad . b_n = \cdots$

پ) $5. 9. 13. 17. \cdots. \cdots. \cdots$ $\quad . d = \cdots$ $\quad . c_n = \cdots$

ت) $13. 7. 1. -5. \cdots. \cdots. \cdots$ $\quad . d = \cdots$ $\quad . d_n = \cdots$

تمرین:

A و B دو شرکت عرضه کنندهٔ سیم‌کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.

سیم‌کارت‌های شرکت A	سیم‌کارت‌های شرکت B
هزینه ثابت ماهانه: 2000تومان	هزینه ثابت ماهانه: 3000تومان
هزینه هر دقیقه مکالمه: 30تومان	هزینه هر دقیقه مکالمه: 20تومان

فرض کنیم a_n نشان‌دهندهٔ هزینهٔ کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم‌کارت شرکت A و b_n هزینه مشابه برای استفاده از سیم‌کارت شرکت B باشد.

الف) مقدار a_n و b_n را برحسب n بنویسید.

ب) جدول زیر را کامل کنید.

n : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	0	40	80	120	160
a_n : هزینه سیم‌کارت A	2000	3200	....	....	....
b_n : هزینه سیم‌کارت B	...	3800	....	....	....

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می‌توانند جملهٔ عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ چرا؟

اگر جواب مثبت است قدر نسبت هر یک را مشخص کنید.

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً 150 دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آنها کدام سیم‌کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

دنباله‌های هندسی:

دنباله‌ای که در آن هر جمله(به جز جمله اوّل) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم آن را با r نمایش می‌دهیم.

نکته:

1- در دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی t_n داریم

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_3}{t_2}=\cdots=\frac{t_n}{t_{n-1}}=r$$

2- جملهٔ n ام یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اوّل t_1 و قدر نسبت d به‌صورت زیر است.

$$t_n=t_1r^{n-1}$$

3- اگر $t_1.r>0$ ، جملات دنبالهٔ هندسی مثبت و اگر $r<0$ ، آنگاه جملات دنبالهٔ هندسی، یک در میان مثبت و منفی و اگر $t_1<0$ و $r>0$ ، جملات دنبالهٔ هندسی منفی هستند.

4- اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $b^2=ac$ ، اعداد $b=\pm\sqrt{ac}$ را واسطهٔ هندسی دو عدد a و c می‌گوییم.

✎ **مثال:**

در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دوّم $\frac{1}{3}$ و جملهٔ پنجم 9 است. جملهٔ اوّل و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

پاسخ:

$$t_2 = t_1 r = \frac{1}{3} \quad . \quad t_5 = t_1 r^4 = 9 \quad \rightarrow \quad \frac{t_5}{t_2} = \frac{t_1 r^4}{t_1 r} = \frac{9}{\frac{1}{3}} \quad \rightarrow \quad r^3 = 27 = 3^3$$

$$r = 3 \quad . \quad t_1 r = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad 3t_1 = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{9}$$

✎ **مثال:**

بین دو عدد 3 و 48 واسطهٔ هندسی درج کنید.

پاسخ:

$$b^2 = ac \quad \rightarrow \quad b^2 = 3 \times 48 = 144 = 12^2 \quad \rightarrow \quad b = \pm\sqrt{12}$$

✎ **تمرین:**

در دنباله‌های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جملهٔ بعدی را بنویسید. سپس جملهٔ عمومی هر دنباله را به‌دست آورید.

الف) $2.6.18.54.\cdots.\cdots$ $\qquad a_n = \cdots$

ب) $5.10.20.40.\cdots.\cdots$ $\qquad b_n = \cdots$

پ) $6.-60.600.-6000.\cdots.\cdots$ $\qquad c_n = \cdots$

ت) $4.2.1.\frac{1}{2}.\cdots.\cdots$ $\qquad d_n = \cdots$

✎ **تمرین:**

جملات سوّم و ششم یک دنبالهٔ هندسی به‌ترتیب 12 و 96 می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

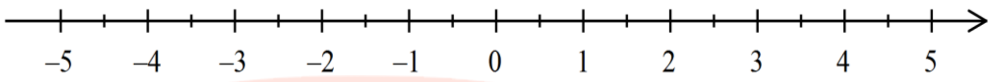
✎ **تمرین:**

چند دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت $\frac{4}{5}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

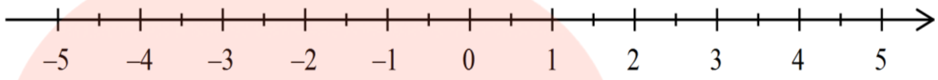
تمرینات تکمیلی فصل 1

1- R را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

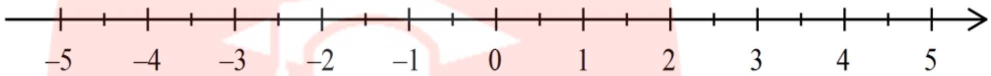
الف) $A = [-2.3)$



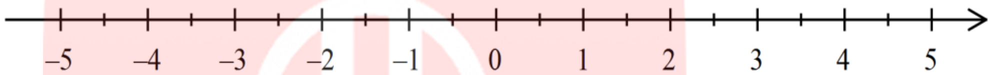
ب) $B = \{0.1.2.3.4.\cdots\}$



پ) $C = (0.+\infty)$



ت) $D = (-\infty.1]$



2- فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به‌طوری‌که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوبست:

الف) $n(A \cup B)$

ب) $n(A \cap B')$

پ) $n(A' \cap B)$

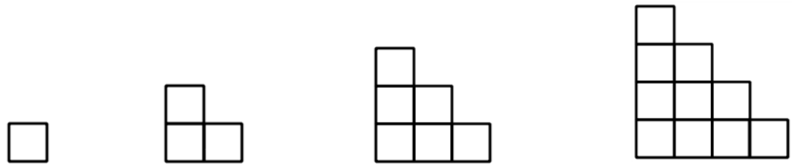
ت) $n(A' \cap B')$

3- در یک کلاس 31 نفری، تعداد 14 نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و 19 نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر 5 نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوبست:

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

4- الگوی مقابل را در نظر بگیرید.



شکل1 — 1 مربع | شکل2 — 3 مربع | شکل3 — 6 مربع | شکل4 — 10 مربع

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به‌صورت یک دنباله تا جملهٔ ششم آن بنویسید.

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

پ) a_n را بر حسب n به‌دست آورید.

ت) به کمک مرحلهٔ قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$$1+2+3+\cdots+n=$$

5- جملهٔ عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اوّل دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $a_n=4n$

ب) $b_n=3n+1$

پ) $c_n=n^2+2$

ت) $d_n=n^2+n$

6- برای دنباله‌های درجهٔ دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جملهٔ عمومی دنباله را بیابید.

الف) $5.8.13.20.29.\cdots$

ب) $5.12.22.35.51.\cdots$

7- بین 20 و 80 به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطهٔ حسابی درج کنید.

20		80

20			80

20				80

20					80

8- از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدر نسبت، جملهٔ بیست و یکم را بیابید.

الف) $3.\,10.\,17.\,24.\cdots$

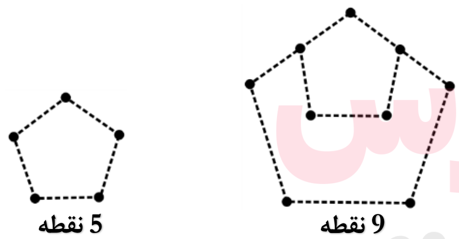
ب) $1.\,2.\,4.\,8.\cdots$

پ) $\sqrt{3}.\,2\sqrt{3}.\,3\sqrt{3}.\,4\sqrt{3}.\cdots$

9- در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوّم و هفتم به‌ترتیب 20 و 56 است. دنباله را مشخص کنید.

10- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع سه جملهٔ اوّل 3 و مجموع سه جملهٔ بعدی آن 39 است. دنباله را مشخص کنید.

11- الف) دو جملهٔ بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



ب) جملهٔ عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جملهٔ چندم این دنباله 397 است؟

12- الف) واسطهٔ حسابی بین 5 و 11 چه عددی است؟

ب) واسطهٔ حسابی بین 20 و 30 چه عددی است؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

13- الف) بین 3 و 48 سه واسطهٔ هندسی درج کنید. آیا جواب یکتا است؟

48				3

ب) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنبالهٔ هندسی حاصل شود.

4000		10

80000			10

972					4

14- یک کوه یخی هزار تنی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد. پس از گذشت 5 روز کدام گزینه درست است؟

الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند.

ب) حدوداً $\frac{1}{3}$ آن باقی می‌ماند.

پ) تقریباً نصف آن آب می‌شود.

ت) حدود $\frac{2}{3}$ آن باقی می‌ماند.

15- از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $7.28.112.448.\cdots$ $\quad .d=\cdots$

ب) $5.5.5.5.\cdots$ $\quad .d=\cdots$

پ) $1.-\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.-\frac{1}{8}.\cdots$ $\quad .d=\cdots$

ت) $2\sqrt{5}.4\sqrt{5}.6\sqrt{5}.8\sqrt{5}.\cdots$ $\quad .d=\cdots$

16- علی دوچرخه‌ای را به قیمت 500 هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخهٔ دست دوّم، در هر سال 20درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از 3 سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

17- حاصلضرب بیست جملهٔ اوّل دنبالهٔ هندسی مقابل را محاسبه کنید.

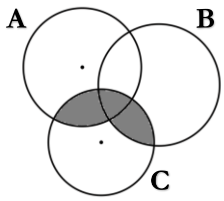
$2.4.8.\cdots$

تست‌های فصل 1

1- اگر $A=\{2.3.6.7.8\}$ و $B=\{2.4.5.6\}$ باشند. مجموعهٔ $[A-(A\cap B)]-(A\cup B)$ چند عضو دارد؟

1) 2   2) 3   3) 4   4) 5

2- کدام مجموعه، قسمت سایه خورده را نشان می‌دهد؟



1) $A\cap(B\cup C)$ 2) $A\cup(B\cap C)$

3) $C\cup(A\cap B)$ 4) $C\cap(A\cup B)$

3- اگر $A=(-\infty.-1)\cup(4.+\infty)$ و $B=(-\infty.5)\cap[-4.+\infty)$ باشد، کدام گزینه زیر مجموعهٔ $A\cap B$ است؟

1) (-1.4) 2) $[4.5)$ 3) $[-4.-2)$ 4) $[-4.5)$

4) مجموعهٔ $A=\{x\epsilon R \mid x>-2$ یا $x\leq 3\}$ برابر است با:

1) $(-2.3]$ 2) R 3) $R-[-2.3)$ 4) Q

5) کدام مجموعه دارای کوچکترین عضو می‌باشد؟

1) (1.7) 2) $\{x\epsilon R.x\geq 7\}$ 3) $\{\cdots.-2.-1.0.1.2.3\}$ 4) گزینه‌های (1) و (2)

6) تعداد مسافرین در یک هتل 72 نفرند که 32 نفر آنها تاجر و 12 نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. 8 نفر از این تاجرین، برای اولین بار سفر کرده‌اند. چند نفر از مسافرین نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

1) 32   2) 40   3) 45   4) 54

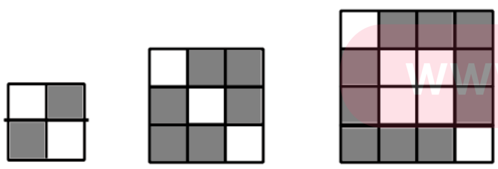
7) اگر $n(U)=200$، $n(A')=140$ ، $n(B)=50$ و $n(A\cup B)=98$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

1) $n(A\cap B)=12$ 2) $n(A\cap B')=48$ 3) $n(A'\cap B')=98$ 4) $n(A'\cup B')=188$

8) در الگوی مقابل، در مرحله‌ای که تعداد قطعه‌های مربعی رنگی کوچک 50 است، تعداد قطعه‌های سفید کوچک کدام است؟

1) 119   2) 146

3) 169   4) 196



(1)   (2)   (3)

9) جملهٔ عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n=\frac{2n+1}{n+3}$ است. کدام جملهٔ این دنباله برابر $\frac{5}{3}$ است؟

1) جملهٔ دوّم   2) جملهٔ دوازدهم   3) جملهٔ هفتم   4) جملهٔ نهم

10) جملهٔ هشتم یک دنبالهٔ حسابی غیر ثابت دو برابر جملهٔ سیزدهم آن است. جملهٔ دوّم آن چند برابر جملهٔ دهم آن است؟

1) 1.5 برابر　　2) 2.5 برابر　　3) 3 برابر　　4) 2 برابر

11) در یک دنبالهٔ حسابی مجموع دو جملهٔ اوّل برابر 7.5 و مجموع جملات سوّم و چهارم برابر 5.5 است. قدر نسبت آن کدام است؟

1) $-\frac{3}{4}$　　2) $-\frac{1}{2}$　　3) $\frac{1}{2}$　　4) $\frac{3}{4}$

12) در دنبالهٔ هندسی $4.6.9.\cdots$ مجموع جملات چهارم و پنجم چقدر است؟

1) $\frac{27}{2}$　　2) $\frac{135}{2}$　　3) $\frac{135}{4}$　　4) $\frac{81}{4}$

13) در یک دنبالهٔ هندسی افزایشی، جملهٔ سوم 10 و جملهٔ هفتم 40 است. جملهٔ اوّل کدام است؟

1) $\sqrt{5}$　　2) 25　　3) 5　　4) $\frac{5}{4}$

14) واسهٔ هندسی بین جمله‌های هشتم و چهاردهم دنبالهٔ هندسی $4.8.16.\cdots$ کدام است؟

1) 2^{10}　　2) 2^{11}　　3) 2^{12}　　4) 2^{13}

15) جملهٔ پنجم یک دنبالهٔ هندسی 2 و جملهٔ دوّم آن 54 می‌باشد. قدر نسبت این دنباله چند است؟

1) $\frac{2}{3}$　　2) $\frac{1}{3}$　　3) $-\frac{2}{3}$　　4) $-\frac{1}{3}$

فصل ۲ : مثلثات

درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی

درس دوّم: دایره مثلثاتی

درس سوّم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

بارم نوبت اول: ۵ نمره

بارم نوبت دوم: ۱/۵ نمره

بارم شهریور: ۲ نمره

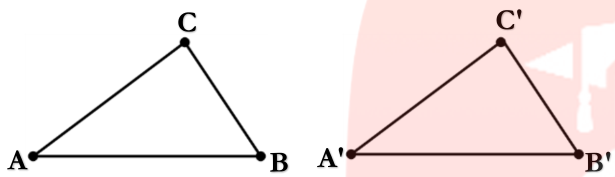
درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی

تشابه:

دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند.

قضیه:

هر گاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

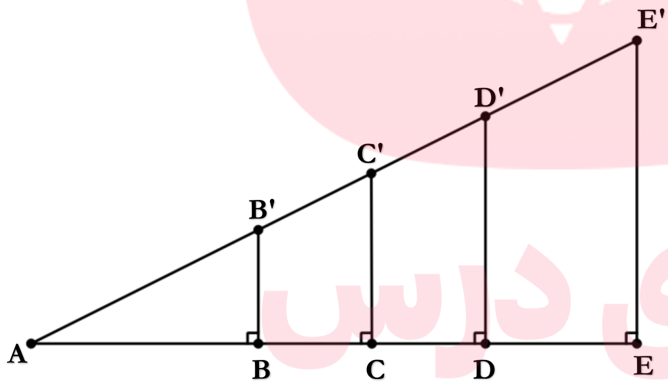


$\widehat{B} = \widehat{B'}\ ,\ \ \widehat{C} = \widehat{C'} \ \Rightarrow\ \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{A'B'C'}$

$\Rightarrow\ \widehat{A} = \widehat{A'}\ ,\ \ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

نتیجه:

در دو مثلث قائم‌الزاویه، برابری تنها یک زاویهٔ حاده از مثلث اوّلی با یک زاویهٔ حاده از مثلث دوّمی برای تشابه دو مثلث کافی است.(چرا؟)



در شکل بالا داریم $\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = 90^\circ$. بنابراین مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در رأس A مشترکند متشابه هستند. بنابراین

$\overset{\Delta}{ABB'} = \overset{\Delta}{ACC'} = \overset{\Delta}{ADD'} = \overset{\Delta}{AEE'}$

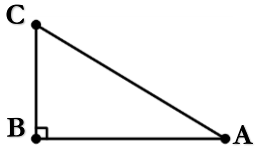
حال اگر نسبت تشابه را در این مثلث‌ها بنویسیم داریم:

$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC} = \frac{DD'}{AD} = \frac{EE'}{AE}$

بنابراین برای زاویهٔ A همهٔ این نسبت‌ها مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می‌نامیم و آن را با $\tan A$ نشان می‌دهیم.

تانژانت و کتانژانت:

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\widehat{B}=90^{\circ}$)، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ حاده A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:



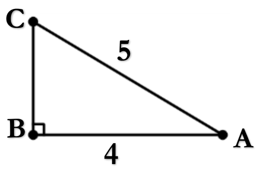
$$tan\,A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}=\frac{BC}{AB}$$

$$cot\,A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}=\frac{AB}{BC}$$

مثال:

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\widehat{B}=90^{\circ}$)، $AB=4$ و $AC=5$ می‌باشند. مقدار $tan\,A$ و $cot\,A$ را به‌دست آورید.

پاسخ:



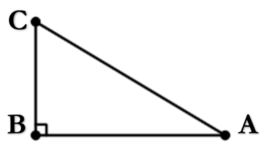
با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع BC را به‌دست می‌آوریم:

$$AC^2=AB^2+BC^2 \rightarrow BC^2=AC^2-AB^2=25-16=9 \rightarrow BC=3$$

$$\tan A=\frac{3}{4} \quad . \quad \cot A=\frac{4}{3}$$

سینوس و کسینوس:

در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\widehat{B}=90^{\circ}$)، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ حاده A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

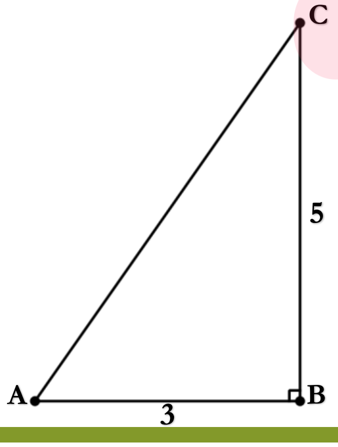


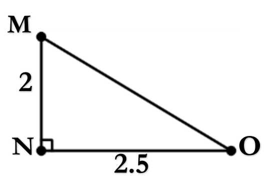
$$sin\,A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول وتر}}=\frac{BC}{AC}$$

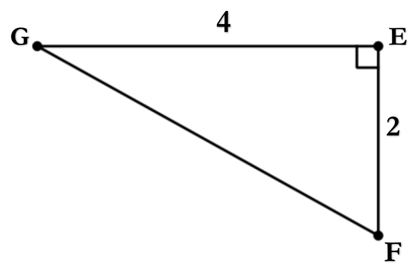
$$cos\,A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{طول وتر}}=\frac{AB}{AC}$$

مثال:

در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.







✍پاسخ:

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3} \qquad \cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2} \qquad \cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2\cdot 5}{2} \qquad \cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2\cdot 5}$$

☑نکته:

1- در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

2- رابطهٔ بین $\tan A$ و $\cot A$ با $\sin A$ و $\cos A$ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\widehat{B} = 90^\circ$)، به‌صورت زیر است:

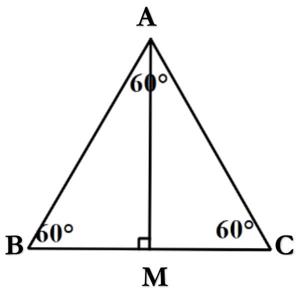
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad . \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

3- رابطهٔ بین $\tan A$ و $\cot A$ به‌صورت زیر است:

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} \quad \rightarrow \quad \tan A \cdot \cot A = 1$$

◈تمرین:

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به طول 2 واحد را در نظر بگیرید.



الف) محل برخورد نیمساز زاویهٔ A با پاره‌خط BC را M بنامید.

با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM .... ضلع BC است.

بنابراین

$BM = MC =$........

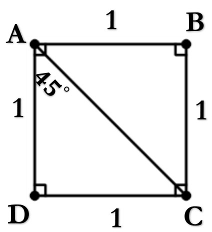
ب) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول AM را به‌دست آورید.

پ) حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید.

$$\sin 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \cdots \qquad \cos 30^\circ = \frac{AM}{AB} = \cdots \qquad \tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \cdots \qquad \cot 30^\circ = \frac{AM}{BM} = \cdots$$

◈تمرین:

مربعی با اضلاع 1 واحد را در نظر بگیرید.



الف) قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را به‌دست آورید.

ب) حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید.

$sin45^{\circ} = \frac{DC}{AC} = \cdots$ $\quad cos45^{\circ} = \frac{AD}{AC} = \cdots$ $\quad tan45^{\circ} = \frac{DC}{AD} = \cdots$ $\quad cot45^{\circ} = \frac{AD}{DC} = \cdots$

مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° ، 45° و 60°

مقدار	30°	45°	60°
$sinA$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cosA$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tanA$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$cotA$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال:

مقدار عددی عبارت $3sin30^{\circ} + 4\sqrt{2}cos45^{\circ} - \sqrt{3}tan60^{\circ}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$3 \cdot \frac{1}{2} + 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}$$

تمرین:

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{2}cos45^{\circ} + 2\sqrt{3}sin60^{\circ} - \sqrt{3}tan30^{\circ}$

ب) $4\sqrt{2}sin45^{\circ} + 5cot45^{\circ} - 3cos60^{\circ}$

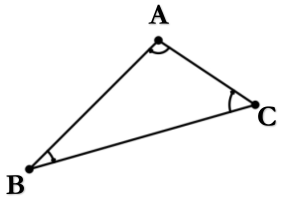
پ) $6sin30^{\circ} + \sqrt{3}(cot60^{\circ} + tan60^{\circ})$

ت) $-sin60^{\circ} + 2cos30^{\circ} + 4cot30^{\circ} - 2tan45^{\circ}$

☑نکته:

مساحت مثلث دلخواه ABC برابر است با حاصل‌ضرب طول دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین آنها.

یعنی:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin B = \frac{1}{2} CA \times CB \times \sin C$$

✎مثال:

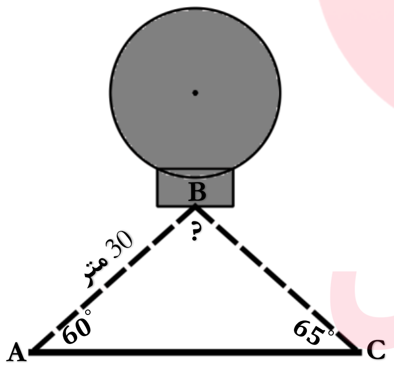
در مثلث ABC، $AC = 4$ ، $BC = 6$ و $\widehat{C} = 25^{\circ}$ می‌باشند. با فرض $\sin 25^{\circ} = 0 \cdot 42$ ، مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

✍پاسخ:

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin C = \frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin 25^{\circ} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 0 \cdot 42 = 5 \cdot 04$$

◈تمرین:

در راه‌پیمایی 22 بهمن، یک بالن اطلاع رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها 30 متر است. می‌خواهیم طول طناب دوّم را پیدا کنیم.



الف) ابتدا اندازهٔ زاویهٔ B را به‌دست آورید.

سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن‌را BH بنامید.

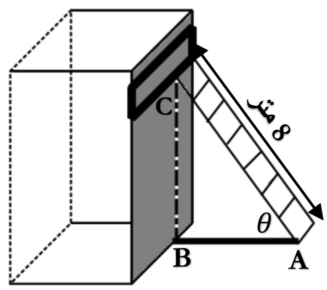
ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به‌دست آورید.

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ 65°، طول طناب دوّم را پیدا کنید.

◈تمرین:

نردبانی به طول 8 متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین $\theta = 30^{\circ}$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید.

فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

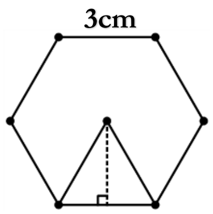


تمرین:

نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایهٔ آن 3 متر است، حساب کند. قد نسرین 1.5 متر و طول سایهٔ او در همان لحظه 0.5 متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

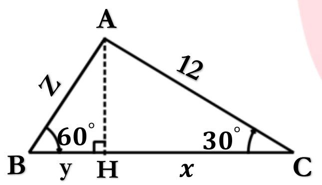
تمرین:

مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به‌دست آورید.



تمرین:

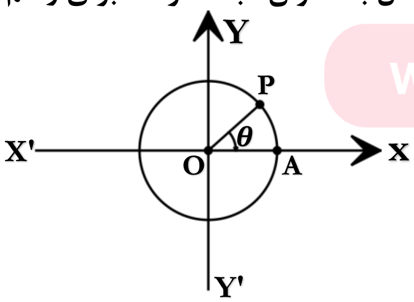
در مثلث روبرو، مقادیر x، y و z را به‌دست آورید.



درس دوّم: دایرهٔ مثلثاتی

دایرهٔ مثلثاتی:

دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک که در آن نقطهٔ A مطابق شکل به عنوان مبدأ حرکت برای رسم زاویه در نظر گرفته شده است را دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم.



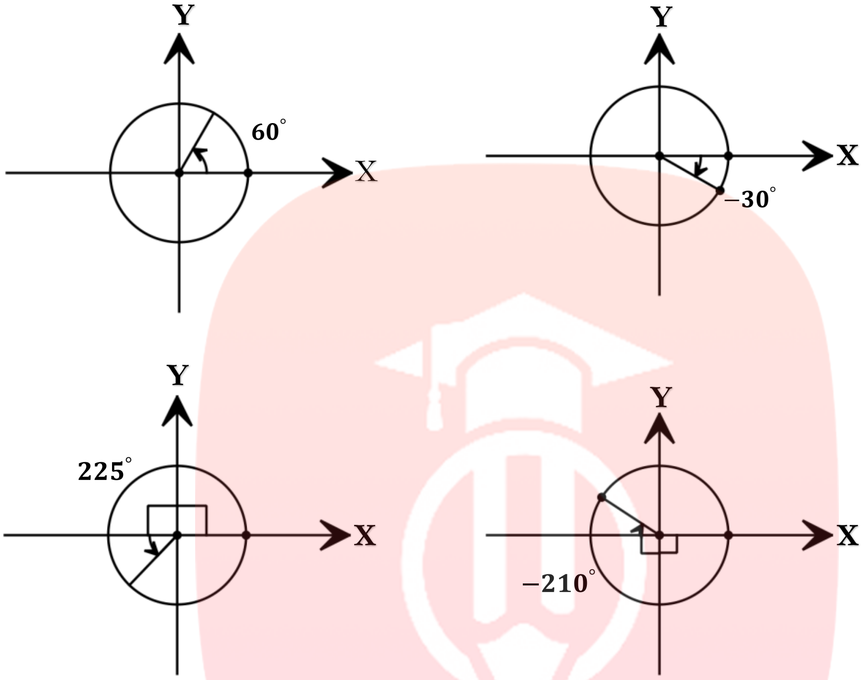
نکته:

اگر نقطهٔ P روی دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویهٔ AOP مثبت و با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، زاویهٔ AOP منفی است.

مثال:

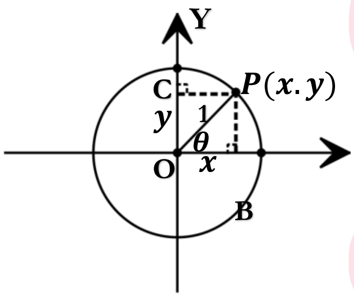
هر یک از زاویه‌های 60° ، -30° ، 225° و -210° را روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

پاسخ:



نسبت‌های مثلثاتی در دایرهٔ مثلثاتی:

فرض کنیم $P(x.y)$ نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی (دایره‌ای که شعاع آن یک است) بوده و θ زاویه‌ای باشد که نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. از نقطهٔ P، خطوط PB و PC را برمحورهای Ox و Oy عمود می‌کنیم. دراینصورت:



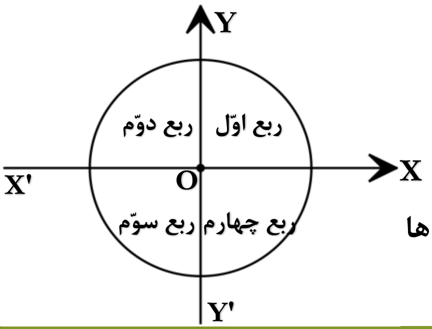
$$\sin\theta = \frac{PB}{OP} = PB = y \quad . \quad \cos\theta = \frac{OB}{OP} = OB = x$$

$$\tan\theta = \frac{PB}{OB} = \frac{y}{x} \quad . \quad \cot\theta = \frac{OB}{PB} = \frac{x}{y}$$

بنابراین داریم:

$$P(x.y) = (\cos\theta . \sin\theta)$$

نکته:



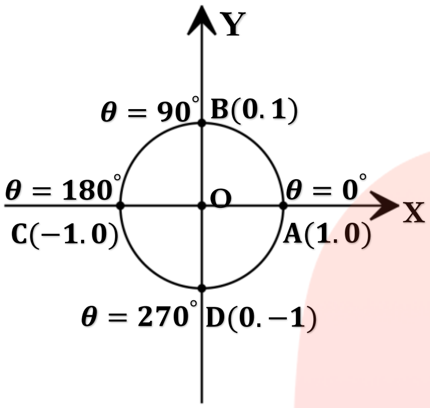
1- برای هر زاویهٔ دلخواه θ، داریم

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1 \quad . \quad -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

2- محور $X'OX$ یا محور X ها را محورکسینوس‌ها و محور $Y'OY$ یا محور Y ها را محورسینوس‌ها می‌نامیم.

3- دو محور عمود بر هم $X'OX$ و $Y'OY$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند که هر یک از آنها را یک ربع مثلثاتی می‌گوییم. با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، ناحیهٔ XOY را ربع اوّل، ناحیهٔ $X'OY$ را ربع دوّم، ناحیهٔ $X'OY'$ را ربع سوّم و ناحیهٔ XOY' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

4- زاویه‌های 0°، 90°، 180°، 270° و 360° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.



مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای 0° ، 90° ، 180°، 270° و 360°

مقدار	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot\theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

جدول زیر علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایرهٔ مثلثاتی نشان می‌دهد.

مقدار	ربع اوّل $x > 0 . y > 0$	ربع دوّم $x < 0 . y > 0$	ربع سوّم $x < 0 . y < 0$	ربع چهارم $x > 0 . y < 0$
$\sin\theta$	+	+	-	-
$\cos\theta$	+	-	-	+
$\tan\theta$	+	-	+	-
$\cot\theta$	+	-	+	-

مثال:

اگر $\sin\theta > 0$ و $\tan\theta > 0$ ، آن‌گاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

پاسخ:

با توجه به جدول فوق، θ در ربع اوّل قرار دارد.

تمرین:

فرض کنید نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به‌طوری‌که $cos\ \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. می‌دانیم θ در ربع سوّم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $y = sin\ \theta = \cdots$.

الف) مختصات نقطهٔ P را به‌دست آورید.

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به‌دست آورید.

تمرین:

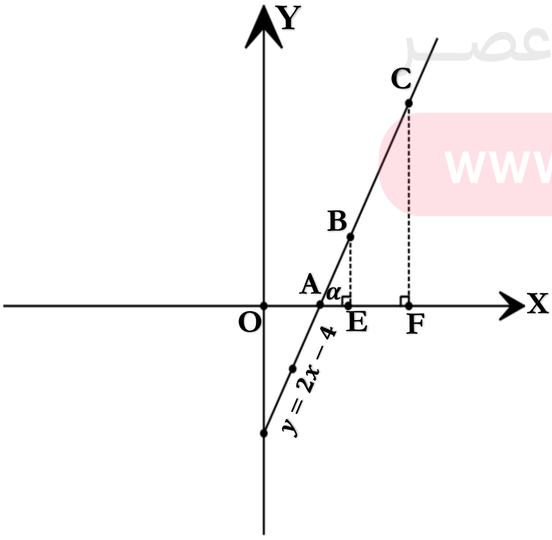
اگر $cos\alpha = \frac{-2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرارمی‌گیرد، بحث کنید.

تمرین:

زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

تمرین:

نمودار خط $y = 2x - 4$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.دو نقطهٔ B و C روی این خط درنظر بگیرید وخطی از آنها به محور x ها عمود کنید.پای عمودها را به‌ترتیب E و F بنامید.



الف) تانژانت زاویهٔ α را به‌دست آورید.

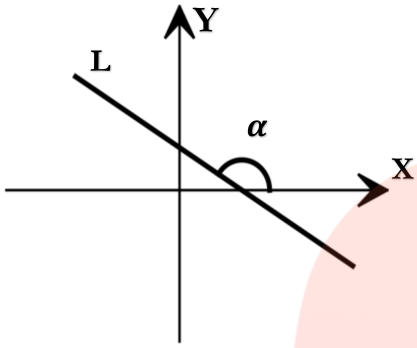
ب) شب این خط را پیدا کنید.

پ) از مقایسهٔ قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه:

شیب هر خطی که محور افقی را قطع می‌کند، برابر تانژانت زاویهٔ بین خط و جهت مثبت محور افقی و در جهت مثلثاتی است. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

$$tan\,\alpha = \text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$$



✍مثال:

معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور Xها 45° است و از نقطهٔ $(2.-1)$ می‌گذرد.

✍پاسخ:

$m = tan\,45^{\circ} = 1\ .\ \ A(2.-1)$

$\rightarrow\ y + 1 = 1(x-2)\ \rightarrow\ y = x - 3$

یادآوری

معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $A(x_1.y_1)$ می‌گذرد و شیب آن m باشد، به‌صورت $y - y_1 = m(x - x_1)$ است.

☑نکته:

1- درحالتی‌که شیب خط عددی منفی شود، زاویه را منفرجه در نظر می‌گیریم.

2- درحالتی‌که خط موازی محور Yها است، زاویه 90° و شیب تعریف نمی‌شود.

3- درحالتی‌که خط موازی محور Xها است، زاویه 0° و شیب صفر است.

تمرین:

شیب خط‌های زیر را با استفاده از تانژانت زاویه به‌دست آورید.

الف) $2y - 3x = 5$

ب) $x + y = 2$

تمرین:

معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور Xها 30° است و از نقطهٔ (1.0) می‌گذرد.

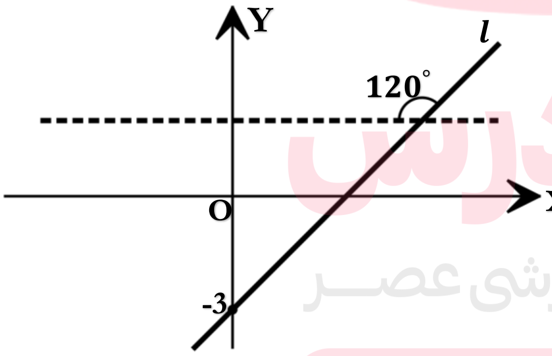
تمرین:

هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) 270° ب) -135° پ) 185° ت) -240°

تمرین:

با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط l را به‌دست آورید.



تمرین:

مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام‌یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

الف) -30° ب) 65° پ) 182° ت) -95°

تمرین:

معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور Xها 45° است و نقطهٔ (0.2) روی آن قرار دارد.

درس سوّم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

قرارداد:

اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

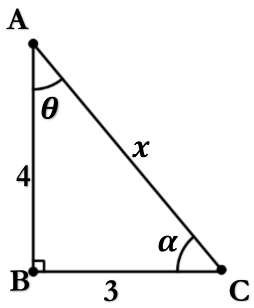
$$(\sin\alpha)^n = \underbrace{\sin\alpha \times \sin\alpha \times \cdots \times \sin\alpha}_{n \text{ بار}} = \sin^n\alpha$$

به همین ترتیب داریم:

$$(\cos\alpha)^n = \cos^n\alpha \qquad (\tan\alpha)^n = \tan^n\alpha \qquad (\cot\alpha)^n = \cot^n\alpha$$

تمرین:

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر بگیرید.



الف) اندازهٔ وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویهٔ θ و α به‌دست آورید.

$$\sin\alpha = \frac{AB}{AC} = \cdots \qquad \cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \cdots \qquad \tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \cdots \qquad \cot\alpha = \frac{BC}{AB} = \cdots$$

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \cdots \qquad \cos\theta = \frac{AB}{AC} = \cdots \qquad \tan\theta = \frac{BC}{AB} = \cdots \qquad \cot\theta = \frac{AB}{BC} = \cdots$$

ب) با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ و $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ را به‌دست آورید.

پ) درستی رابطهٔ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \cdots$$

ت) مشابه قسمت (پ) درستی رابطهٔ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ را بررسی کنید.

روابط مهم مثلثاتی:

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم:

$$1)\ \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ .\quad \cos\alpha \neq 0$$

$$2)\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ .\quad \sin\alpha \neq 0$$

$$3)\ \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \quad \text{یا} \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1$$

$$4)\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \begin{cases}\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha\\ \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\ \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$5)\ 1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\ .\quad \cos\alpha \neq 0$$

$$6)\ 1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ .\quad \sin\alpha \neq 0$$

☑**نکته:**

در رابطه‌هایی که به‌دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویهٔ α، با توجه به ناحیه‌ای که زاویهٔ α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

مثال:

اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوّم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$، آن‌گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

پاسخ:

در ناحیهٔ دوّم مثلثاتی، $\sin\alpha$ عددی مثبت است. بنابراین

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

اتحاد مثلثاتی:

هر یک از تساوی‌های $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ و $\cos\alpha \neq 0$. $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ و ... را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

☑نکته:

هر گاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را نوشته و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم.

مثال:

درستی اتحاد مثلثاتی $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$ را بررسی کنید.

پاسخ:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$$
$$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (1)$$

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$$
$$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (2)$$

(1) و (2) ➔ $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=$
$$=(1+2\sin\alpha\cos\alpha)+(1-2\sin\alpha\cos\alpha)=2$$

تمرین:

با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

ب) $\frac{1}{\cos\alpha}+\cot\alpha=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

تمرین:

کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha$

ب) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

تمرین:

با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $1 + tan^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$ در $cot\ \alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید. سپس درستی آن را اثبات کنید.

تمرینات تکمیلی فصل 2

1- فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوّم مثلثاتی باشد و $cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

2- اگر $tan\ \alpha = -\frac{4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

3- اگر $sin\ 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ 135° را به‌دست آورید.

4- اگر $tan\ 240^\circ = \sqrt{3}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ 240° را به‌دست آورید.

5- در هر یک از موارد زیر، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

الف) $cos\ \alpha = \frac{3}{7}$ (α در ربع چهارم)

ب) $sin\,\beta = -\frac{1}{2}$ (β در ربع سوّم)

6- اگر $cot\,\alpha = \frac{2}{5}$، مقدار $\frac{3sin^2\alpha+5cos^2\alpha}{2sin^2\alpha}$ را به‌دست آورید.

7- اگر $tan\,\theta$ و $sin\,\theta$ هم‌علامت باشند، آنگاه θ درکدام ربع مثلثاتی قراردارد؟

8- اگر $sin\,\alpha + cos\,\alpha = \frac{3}{4}$ باشد، حاصل $sin\,\alpha cos\,\alpha$ را به‌دست آورید.

9- اگر $sin\,\alpha cos\,\alpha < 0$، آنگاه α در کدام‌یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟

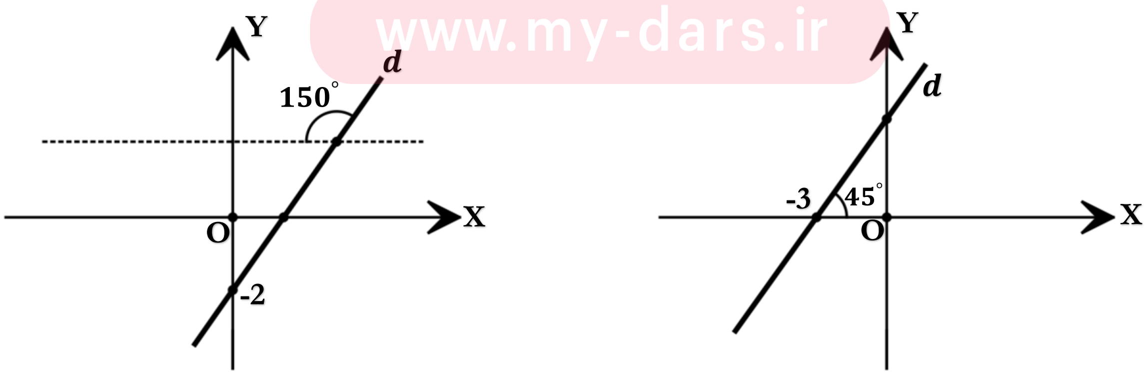
10- حدود زاویهٔ θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $sin\,\theta > 0$. $cos\,\theta > 0$

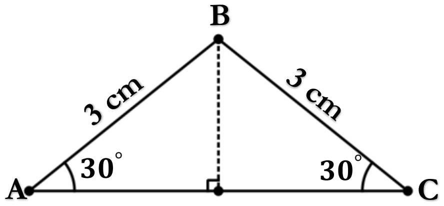
ب) $sin\,\theta < 0$. $cos\,\theta > 0$

11- فرض کنیم α زاویه‌ای است که خط $2y + x = 4$ با جهت مثبت محور Xها می‌سازد. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

12- با توجه به شکل‌های داده شده، معادلهٔ خط d را بنویسید.

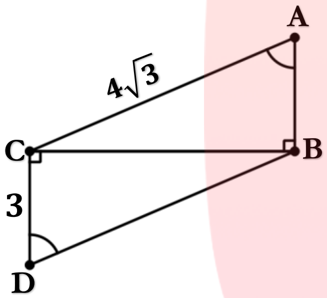


13- مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



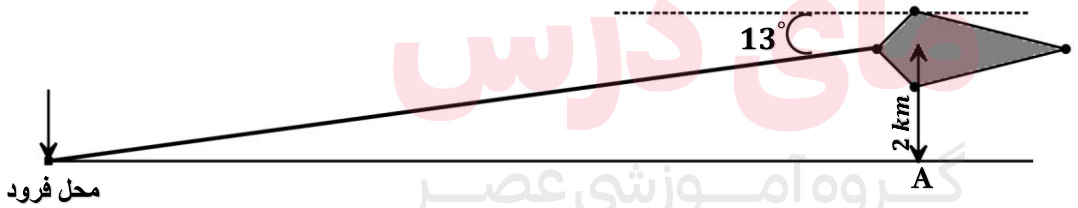
14- فرض کنید $sin\ 75^{\circ} \simeq 0 \cdot 96$، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید.

15- در شکل روبرو نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ D را به‌دست آورید.



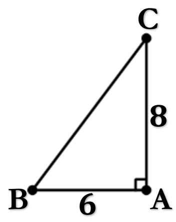
16- یک هواپیما در ارتفاع $2\ km$ از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A فرود می‌آید؟

$(tan\ 13^{\circ} \simeq 0 \cdot 23)$



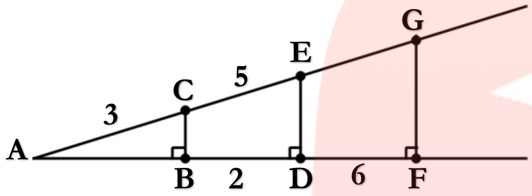
تست‌های فصل 2

1) در شکل مقابل، حاصل $sin\ B + cos\ C$ کدام است؟



1) $1\cdot6$
2) $1\cdot8$
3) $1\cdot4$
4) $1\cdot2$

2) با توجه به شکل مقابل، $sin\ G$ کدام است؟

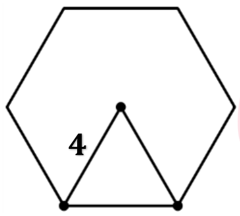


1) $\frac{5}{6}$
2) $\frac{2}{3}$
3) $\frac{3}{5}$
4) $\frac{2}{5}$

4) شخصی با قد 180 سانتی‌متر در فاصلهٔ $2\cdot5$ متری یک تیر چراغ برق به ارتفاع 3 متر ایستاده است. این شخص چند سانتی‌متر به تیر نزدیک شود تا سایه‌اش 2 برابر قدش شود؟

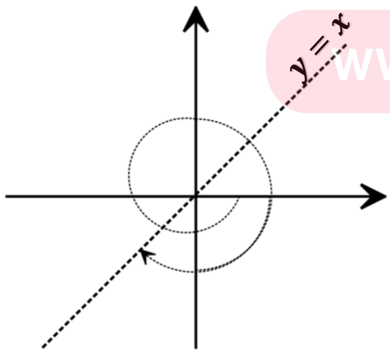
1) 10
2) 20
3) 30
4) 40

5) مساحت شش ضلعی منتظم مقابل کدام است؟



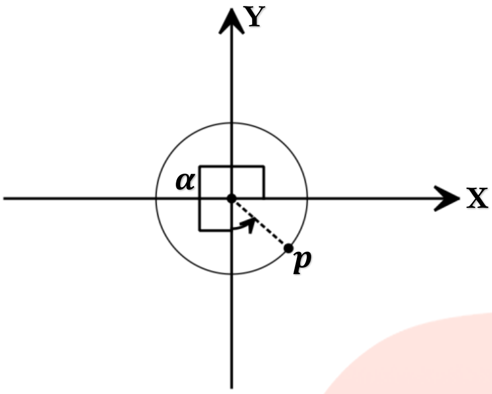
1) $16\sqrt{3}$
2) $20\sqrt{3}$
3) $24\sqrt{3}$
4) $28\sqrt{3}$

6) شکل مقابل بیانگر کدام زاویه است؟



1) 135°
2) -135°
3) 495°
4) -495°

7) اگر $p(\frac{1}{\sqrt{5}}.-\frac{2}{\sqrt{5}})$ روی دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟



1) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$
2) $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$
3) $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$
4) $\cot\alpha = -\frac{1}{2}$

8) اگر $\cos\theta = \frac{1}{5}$ و انتهای کمان θ در ربع چهارم باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

1) $2\sqrt{6}$
2) $2\sqrt{5}$
3) $-2\sqrt{6}$
4) $-2\sqrt{5}$

9) اگر $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان α در ناحیهٔ سوّم دایرهٔ مثلثاتی باشد، $\cot\alpha$ کدام است؟

1) -3
2) $-\frac{1}{2}$
3) $\frac{1}{3}$
4) 3

10) عبارت $\tan^2 x - \sin^2 x$ برابر است با:

1) $\tan^2 x\sin^2 x$
2) $\tan^2 x\cos^2 x$
3) $\cot^2 x\sin^2 x$
4) $\cot^2 x\cos^2 x$

11) حاصل عبارت $\frac{\cot x}{1+\tan x} - \frac{\tan x}{1+\tan x}$ برابر کدام است؟

1) $1-\tan x$
2) $1-\cot x$
3) $1-\sin x$
4) $1-\cos x$

12) ساده شدهٔ عبارت $(1-\sin^2 x)\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)-(1-\cos x)^2$ کدام است؟

1) $\sin^2 x$
2) $\cos^2 x$
3) $-\cos^2 x$
4) $2\cos x$

فصل ۳: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس اوّل: ریشه وتوان

درس دوّم: ریشه nام

درس سوّم: توان‌های گویا

درس چهارم: عبارت‌های جبری

بارم نوبت اول: ۵ نمره

بارم نوبت دوم: ۲ نمره

بارم شهریور: ۲/۵ نمره

درس اوّل: ریشه و توان

ریشهٔ دوّم:

فرض کنیم a یک عدد حقیقی و b یک عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی صفر باشد. اگر $a^2 = b$ باشد، آن‌گاه a را ریشهٔ دوّم عدد b می‌گوییم.

☑نکته:

1- هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشهٔ دوّم می‌باشد. اگر $a^2 = b$ و $b > 0$ ، آن‌گاه $\pm\sqrt{b}$ ریشه‌های دوّم عدد b هستند. یعنی

$$a^2 = b \overset{b>0}{\Leftrightarrow} a = \pm\sqrt{b}$$

2- عدد حقیقی صفر فقط یک ریشهٔ دوّم برابر صفردارد و اعداد منفی ریشهٔ دوّم ندارند.

3- علامت $(\Rightarrow)$ را «نتیجه می‌دهد» و علامت $(\Leftrightarrow)$ را «معادل است با» می‌خوانیم. به عبارتی علامت $(\Leftrightarrow)$ به معنای آن است که سمت چپ، سمت راست و سمت راست، سمت چپ را نتیجه می‌دهد.

مثال:

$(0\cdot1)^2 = 0\cdot01 \Leftrightarrow \sqrt{0\cdot01} = 0\cdot1$ به معنای آن است که از تساوی $(0\cdot1)^2 = 0\cdot01$ می‌توان تساوی $\sqrt{0\cdot01} = 0\cdot1$ و از تساوی $\sqrt{0\cdot01} = 0\cdot1$ می‌توان تساوی $(0\cdot1)^2 = 0\cdot01$ را نتیجه گرفت.

ریشهٔ سوّم:

اگر a و b دو عدد حقیقی و $a^3 = b$ باشد، a را ریشهٔ سوّم عدد b می‌گوییم و آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می‌دهیم.

☑نکته:

تمام اعداد حقیقی ریشهٔ سوّم دارند و هر عدد حقیقی فقط یک ریشهٔ سوّم دارد که علامت آن با علامت خود عدد یکی است.

ریشه‌های چهارم و پنجم:

مانند ریشه‌های دوّم و سوّم می‌توان ریشه‌ها چهارم و پنجم اعداد را تعریف کرد.

مثال:

ریشه‌های چهارم عدد $0 \cdot 0016$، برابر با $\pm 0 \cdot 2$ می‌باشند، زیرا $(-0 \cdot 2)^2 = 0 \cdot 0016$ و $(0 \cdot 2)^2 = 0 \cdot 0016$.

هم‌چنین:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$$

تمرین:

مانند نمونه کامل کنید.

$9^2 = 81 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{81} = 9$ $\sqrt[3]{27} = -3 \quad \Leftrightarrow \quad (-3)^3 = -27$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow \quad (-5)^3 = -125$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{-8} = -2$ $\Leftrightarrow \quad 2^4 = 16$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{100} = 10$ $\Leftrightarrow \quad 11^2 = 121$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow \quad (0 \cdot 25)^2 = 0 \cdot 0625$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow \quad (0 \cdot 5)^3 = 0 \cdot 25$

تمرین:

در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

عدد	8	27	-27				1000	729
ریشهٔ سوّم			-3	5	-10	15		

تمرین:

حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر 25 متر مکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید.

یادآوری

هر گاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر a^3 متر مکعب است.

مقدار تقریبی:

اعدادی مانند $\sqrt[3]{42}$ ، اعدادی اعشاری هستند که هیچ‌گاه مقدار دقیق آن‌ها به‌صورت اعشاری قابل نمایش نیست. البته با ماشین حساب‌های قوی می‌توان تعداد ارقام بیشتری به‌دست آورد و عدد دقیق‌تری برای ریشهٔ سوّم 42 پیدا کرد.

در مثال زیر، مقدار تقریبی عدد $\sqrt[3]{42}$ را می‌بینید که از همین روش می‌توانید برای به‌دست آوردن مقدار تقریبی سایر عددها نیز استفاده کنید.

مثال:

مقدار تقریبی عدد $\sqrt[3]{42}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

می‌خواهیم مقدار تقریبی $\sqrt[3]{42}$ را با یک رقم اعشار به‌دست آوریم. با توجه به اینکه عدد 42 بین دو عدد $3^3 = 27$ و $4^3 = 64$ قرار دارد، بنابراین عدد $\sqrt[3]{42}$ بین دو عدد 3 و 4 قرار می‌گیرد و چون عدد 42 به عدد 27 نزدیک‌تر است، پس عدد $\sqrt[3]{42}$ به 3 نزدیک‌تر است تا به عدد 4. با محاسبهٔ $(3\cdot 1)^3$ ، $(3\cdot 2)^3$ و... مقدار تقریبی $\sqrt[3]{42}$ را پیدا می‌کنیم:

$$(3\cdot 1)^3 = 3\cdot 1 \times 3\cdot 1 \times 3\cdot 1 = 29\cdot 791$$
$$(3\cdot 2)^3 = 3\cdot 2 \times 3\cdot 2 \times 3\cdot 2 = 32\cdot 768$$
$$(3\cdot 3)^3 = 3\cdot 3 \times 3\cdot 3 \times 3\cdot 3 = 35\cdot 937$$
$$(3\cdot 4)^3 = 3\cdot 4 \times 3\cdot 4 \times 3\cdot 4 = 39\cdot 304$$
$$(3\cdot 5)^3 = 3\cdot 5 \times 3\cdot 5 \times 3\cdot 5 = 42\cdot 875$$

بنابراین عدد $(3\cdot 5)^3$ ، نزدیک‌ترین عدد با یک رقم اعشار به 42 است. یعنی $\sqrt[3]{42} \simeq 3\cdot 5$.

توجه کنید که $\sqrt[3]{42}$ به جای مقدار دقیق ریشهٔ سوّم عدد 42 به‌کار می‌رود، امّا در عمل با مقادیر تقریبی آن کارمی‌کنیم.

تمرین:

جاهای خالی را کامل کنید.

الف) اعداد 4 و .... ریشه‌های چهارم عدد .... می‌باشند.

ب) هر عدد مثبت دارای .... ریشهٔ چهارم است که .... یک‌دیگرند.

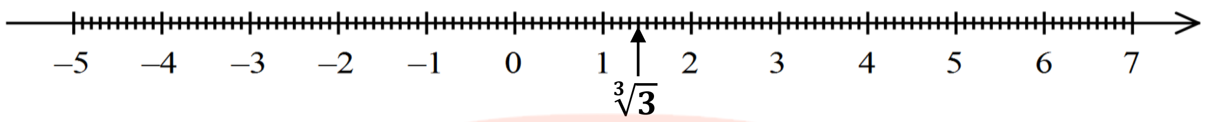
پ) هر عدد مثبت یا منفی دارای .... ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن............. و اگر عدد .... باشد، ریشهٔ پنجم آن منفی است.

ت) $\sqrt[3]{-4}$ یک عبارت .... است.

◈تمرین:

مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید.

$\sqrt[3]{-8} = \cdots$ $\qquad$ $\sqrt[3]{125} = \cdots$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4} \simeq \cdots$ $\qquad$ $\sqrt[3]{3} \simeq 1 \cdot 4$ $\qquad$ $\sqrt[3]{1} = \cdots$



◈تمرین:

مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است:

الف) چون $25 < 30 < 36$ پس $5 < \sqrt{30} < 6$. همچنین چون $8 < 5 < 1$ پس $1 < \sqrt[3]{5} < 2$.

ب) $\cdots < \sqrt{7} < \cdots$

پ) $\cdots < \sqrt{10} < \cdots$

ت) $\cdots < \sqrt[3]{-17} < \cdots$

ث) $\cdots < \sqrt[3]{20} < \cdots$

◈تمرین:

در جای خالی عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی برقرار باشد.

الف) $4 < \sqrt{\cdots} < 5$ $\qquad$ ب) $9 < \sqrt[3]{\cdots} < 10$

◈تمرین:

جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	16		625		10000		3125			
ریشه‌های چهارم	2	-2	5	-5			$5\sqrt[3]{5}$			

◈تمرین:

جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-32		71	-243			19	
ریشهٔ پنجم	-2	5			-1	-10		

تمرین:

نظیر هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی و نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید.

1) $(0\cdot15)^2=0\cdot0225$

2) $(-0\cdot1)^3=-0\cdot001$

3) $(\frac{3}{2})^4=\frac{81}{16}$

4) $\sqrt{\frac{49}{4}}=3\cdot5$

5) $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

تمرین:

الف) ریشهٔ پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟

ب) اگر $a=\sqrt[4]{16}$ باشد، در این‌صورت حاصل عبارت a^3+5 را بیابید.

تمرین:

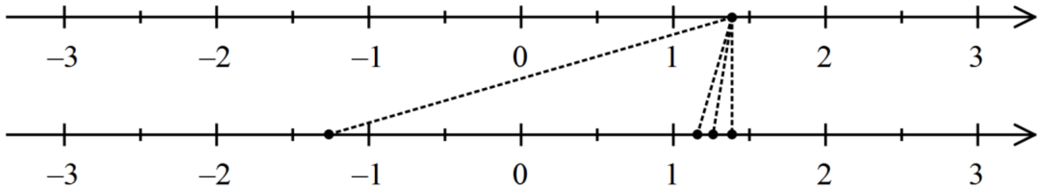
برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این‌صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$\sqrt{20}$	$\sqrt{16}$
$\sqrt{75}$	$\sqrt[5]{-32}$
$\sqrt[3]{20}$	$\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$
$\sqrt[3]{-90}$	$-\sqrt{35}$
$\sqrt[5]{-0\cdot00032}$	$\sqrt[3]{250}$
$-\sqrt[4]{120}$	$-\sqrt[4]{20}$
$\sqrt[4]{400}$	$\sqrt[5]{400}$

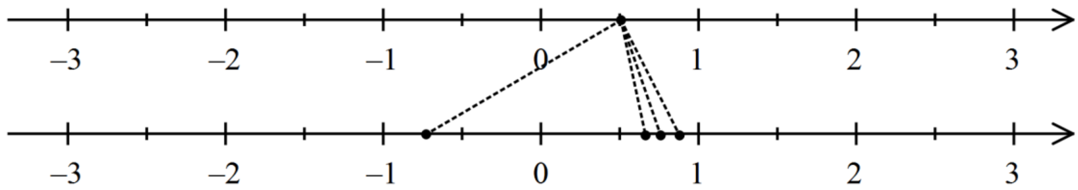
تمرین:

در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوّم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر نقطه در محور پایین مربوط به کدام ریشه است؟

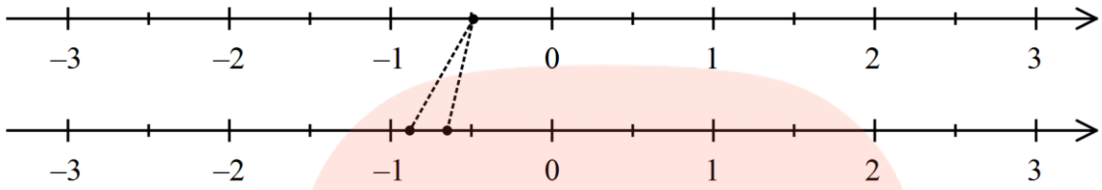
الف)



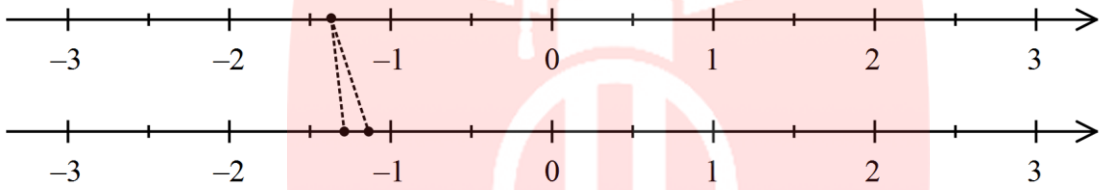
ب)



پ)



ت)



تمرین:

مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید.

$\sqrt[3]{7 \cdot 25}$ $\sqrt[3]{25}$ $\sqrt{10}$

$\sqrt[4]{90}$ $\sqrt[5]{64}$ $\sqrt[5]{16}$

تمرین:

در جاهای خالی یکی از علامت‌های « > »، « < » یا « = » را قرار دهید.

$2^5 \bigcirc 2^2$ $(0 \cdot 1)^5 \bigcirc (0 \cdot 1)^3$ $(-0 \cdot 1)^5 \bigcirc (-0 \cdot 1)^3$

$\sqrt[5]{0 \cdot 00001} \bigcirc 0 \cdot 1$ $(-2)^5 \bigcirc (-2)^3$ $(-2)^5 \bigcirc (-2)^4$

تمرین:

می‌دانیم $\sqrt[5]{161051} = 11$، $\sqrt[5]{170000}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

درس دوّم: ریشه nام

ریشه nام:

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ ام عدد a می‌نامیم، هرگاه $b^n = a$.

☑نکته:

1- اگر a یک عدد حقیقی مثبت و n یک عدد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه a دارای دو ریشهٔ nام به‌صورت $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است.

2- اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه a دارای یک ریشهٔ nام به‌صورت $\sqrt[n]{a}$ است.

3- اگر a یک عدد حقیقی منفی باشد، آن‌گاه

الف) اگر n زوج باشد، آن‌گاه a ریشهٔ nام ندارد.

ب) اگر n فرد باشد، آن‌گاه a فقط یک ریشهٔ nام منفی دارد.

4- اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه ریشهٔ nام عدد صفر برابر صفر است.

قرارداد

هرگاه n زوج باشد و بنویسیم $\sqrt[n]{a}$، آن‌گاه a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.(ریشه‌های زوج برای اعداد منفی بی‌معنی هستند)

تمرین:

جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد 64 است، کامل کنید.

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوّم	ریشه‌های دوّم
			$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[4]{64}$ $-\sqrt[4]{64}$		$\sqrt{64} = 8$ $-\sqrt{64} = -8$

تمرین:

جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد 64- است، کامل کنید.

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوّم	ریشه‌های دوّم
			$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64} = -4$	وجود ندارد

تمرین:

حاصل هر عبارت را به‌دست آورید.

$\sqrt[8]{256} =$ $\quad$ $\sqrt[7]{128} =$ $\quad$ $\sqrt[5]{-32} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{125} =$

$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} =$ $\quad$ $-\sqrt[4]{16} =$ $\quad$ $\sqrt[4]{625} =$ $\quad$ $\sqrt[9]{-1} =$

$\sqrt[6]{0} =$ $\quad$ $-\sqrt{1} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{-0 \cdot 001} =$ $\quad$ $\sqrt[7]{-128} =$

تمرین:

الف) یکی از علامت‌های $<$ یا $>$ را در $\bigcirc$ قرار دهید.

$\sqrt[3]{0 \cdot 125} \bigcirc \sqrt{0 \cdot 125}$ $\qquad$ $(0 \cdot 5)^3 \bigcirc (0 \cdot 5)^2$

ب) وقتی   است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\bigcirc$ قرار دهید.

$\sqrt[3]{a} \bigcirc \sqrt{a}$ $\qquad$ $a^3 \bigcirc a^2$

قواعد ریشه:

1- اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

-2

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

(وقتی n زوج است، a و b نباید اعداد منفی باشند و در حالتی که n فرد است، a و b می‌توانند هر عدد حقیقی دلخواه باشند.)

-3

$$\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$$

-4

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad ; \qquad \begin{cases} k \text{ زوج} \quad . \quad a > 0 \\ k \text{ فرد} \quad . \quad a \in R \end{cases}$$

5- اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، آن‌گاه:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

مثال:

الف) $\sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{24 \times 9} = \sqrt[3]{2^3 \times 3 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6$

ب) $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \frac{\sqrt[5]{-1}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{\sqrt[5]{(-1)^5}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{-1}{2}$

پ) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$

ت) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -\sqrt[5]{2^5} = -2$

☑تمرین:

آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر 3، 4 یا 5 بگیرید و به‌جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

☑تمرین:

آیا $(\sqrt[3]{2})^5$ و $\sqrt[3]{2^5}$ با هم برابرند؟ دربارهٔ $(\sqrt[4]{-2})^4$ و $\sqrt[4]{(-2)^4}$ چه می‌توان گفت؟

☑تمرین:

حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{48} \times \sqrt{12}$

ب) $\sqrt[3]{-4} \times \sqrt[3]{54}$

پ) $\sqrt[4]{\frac{1}{32}} \times \sqrt[4]{2}$

ت) $\sqrt[5]{-27} \times \sqrt[5]{-288}$

ث) $\sqrt[6]{180} \times \sqrt[6]{5^5 \times 1296}$

ج) $\sqrt[3]{90} \times \sqrt[3]{300}$

چ) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} + \sqrt[5]{(2-\sqrt{2})^5}$

ح) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \times \sqrt{3+\sqrt{5}}$

درس سوّم: توان‌های گویا

تعریف:

برای هر عدد طبیعی n، $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

تعریف:

هرگاه $a \geq 0$ ، برای هر دو عدد طبیعی m و n ، توان کسری و غیرصحیح $\frac{m}{n}$ عدد a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

تذکر مهم

عبارت‌هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{5}}$ ، $(-3)^{\frac{2}{8}}$ و... که در آن‌ها پایهٔ a منفی است، تعریف نشده‌اند.

☑تمرین:

توان‌های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$5^{\frac{1}{2}} =$ $\quad$ $5^{\frac{2}{5}} =$ $\quad$ $4^{\frac{1}{4}} =$ $\quad$ $3^{\frac{2}{7}} =$ $\quad$ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

$(-5)^{\frac{1}{4}} =$ $\quad$ $(81)^{\frac{1}{4}} =$ $\quad$ $(-6)^{\frac{2}{7}} =$ $\quad$ $(-3)^{\frac{2}{5}} =$ $\quad$ $2^{\frac{7}{2}} =$

☑تمرین:

کدام درست است؟

الف) $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$

ب) $\sqrt[5]{-32} = -2$

قواعد توان:

قواعد توان، برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار است. اگر r و s دو عدد گویا و $a>0$ باشد، آن‌گاه

1) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ 2) $a^r \times b^r = (ab)^r$ 3) $a^r \div a^s = a^{r-s}$

4) $a^r \div b^r = (\frac{a}{b})^r . b>0$ 5) $(a^r)^s = a^{rs}$ 6) $1^r = 1$ 7) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

مثال:

عبارت زیر را به‌صورت یک عبارت رادیکالی بنویسید.

$$\frac{2^{\frac{4}{5}} \times 6^{\frac{2}{3}}}{12^{\frac{2}{3}}}$$

پاسخ:

$$\frac{2^{\frac{4}{5}} \times 6^{\frac{2}{3}}}{12^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{4}{5}} \times \frac{6^{\frac{2}{3}}}{12^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{4}{5}} \times (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{5}} \times \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{4}{5}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{2^2} = \sqrt[15]{4}$$

تمرین:

تساوی‌های زیر را به‌صورت رادیکالی بنویسید.

$4^{\frac{1}{5}} =$ $\quad 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} =$ $\quad 4^{\frac{7}{5}} =$ $\quad (4\times 2)^{\frac{1}{3}} =$

$5^{\frac{4}{3}} =$ $\quad (16^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}} =$ $\quad 6^{\frac{3}{8}} =$ $\quad 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} =$

$32^{\frac{2}{5}} =$ $\quad 32^{-\frac{1}{5}} =$ $\quad 17^{-\frac{1}{2}} =$ $\quad a^{\frac{2}{7}} =$

تمرین:

رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$\sqrt[7]{3^2} =$ $\quad \sqrt{2^5} =$ $\quad \sqrt[3]{7^2} =$ $\quad \sqrt[3]{-1} =$

$\sqrt[5]{19} =$ $\quad \sqrt[5]{64} =$ $\quad \sqrt[3]{-27} =$ $\quad \sqrt[5]{2^5} =$

$\sqrt[7]{a} =$ $\quad \sqrt[4]{a^3} =$ $\quad \sqrt[n]{a^2} =$ $\quad \sqrt[5]{2^{10}} =$

نکته:

1- اگر a و b دو عدد مثبت و k، n و m سه عدد طبیعی باشند، آن‌گاه

1) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

2) $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

3) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$

☑تمرین:

عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$\sqrt{\sqrt{81}} =$ $\quad$ $\sqrt{\sqrt[3]{64}} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{\sqrt{5}} =$

$\sqrt[3]{625} =$ $\quad$ $\sqrt[5]{\sqrt{2}} =$ $\quad$ $\sqrt[4]{\sqrt[3]{32}} =$

$\sqrt[5]{3\sqrt{2}} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{\sqrt[3]{4}} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} =$

$\sqrt[3]{\sqrt{27}} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{-2\sqrt[5]{2}} =$ $\quad$ $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{2}}} =$

$\dfrac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt{5}} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{8} =$

☑تمرین:

عبارت‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{7}{3}} =$ $\quad$ $(5^{-\frac{3}{2}})^{\frac{6}{5}} =$

درس چهارم: عبارت‌های جبری

اتحاد جبری:

اگر دو عبارت به‌گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آن‌ها را اتحاد جبری می‌نامیم.

نام اتحاد	اتحاد اصلی	اتحاد فرعی
اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$
اتحاد مربع سه‌جمله‌ای	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
اتحاد مزدوج	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	
اتحاد جملهٔ مشترک	$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)b + xy$	
اتحاد مکعب مجموع دو جمله‌ای	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای	$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	
اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای	$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	

مثال:

حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(2x-5y)^2=(2x)^2-2(2x)(5y)+(5y)^2=4x^2-20xy+25y^2$

ب) $(2-x+y)^2=2^2+(-x)^2+y^2+2(2)(-x)+2(2)(y)+2(-x)(y)$

$=4+x^2+y^2-4x+4y-2xy$

پ) $(x-0\cdot 1)(x+0\cdot 1)=x^2-(0\cdot 1)^2=x^2-0\cdot 01$

ت) $(2y-x)(2y+x)=(2y)^2+(-x+5y)(2y)+(-x)(5x)=4y^2+8xy-5x^2$

ث) $(2x+1)^3=(2x)^3+3(2x)^2(1)+3(2x)(1)^2+(1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$

ج) $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3=x^3+8$

تمرین:

حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(4xy+3)^2=$

ب) $(x-2y+1)^2=$

پ) $(x+5y^2)(x-5y^2)=$

ت) $(x^2+y)(x^2-3y)=$

ث) $(4x+y^2)^3=$

ج) $(x-1)(x^2+x+1)=$

چ) $(x^2-3)(x^4+3x^2+9)=$

ح) $(5x-1)^3=$

تجزیه:

عمل تبدیل یک چندجمله‌ای به حاصل‌ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای را تجزیه می‌گوییم.

تجزیهٔ عبارت‌های جبری می‌تواند با روش فاکتورگیری یا استفاده از اتحادها و یا دسته‌بندی مناسب جملات انجام شود.

مثال:

عبارت‌های $4x^3-5x^2$ و x^2-4y^2 را تجزیه کنید.

پاسخ:

$$4x^3-5x^2 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } x^2} x^2(4x-5)=x\times x\times(4x-5)$$
$$x^2-4y^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-2y)(x+2y)$$

مثال:

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $5x^2+11x+6$

ب) $2x^3-6x+yx^2-3y$

پ) $2x^2+11x+15$

پاسخ:

الف) $11x$ را به‌صورت $5x+6x$ می‌نویسیم و داریم:

$$5x^2+11x+6=(5x^2+5x)+(6x+6)=5x(x+1)+6(x+1)=(x+1)(5x+6)$$

ب) $\underline{2x^3}-\underline{6x}+\underline{\underline{yx^2}}-\underline{\underline{3y}}=2x(x^2-3)+y(x^2-3)=(x^2-3)(2x+y)$
$$=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(2x+y)$$

ب) با قرار دادن $A=2x^2+11x+15$ و ضرب دو طرف تساوی در عدد 2 داریم:

$$2A=4x^2+11(2x)x+30=(2x)^2+11(2x)+30=(2x+6)(2x+5)=2(x+3)(2x+5)$$
$$A=(x+3)(2x+5)$$

عامل یا شمارنده:

هر یک از عبارت‌های ضرب در تجزیه را یک عامل یا شمارندهٔ عبارت تجزیه شده می‌نامیم.

مثال:

در تجزیهٔ $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$، عبارت‌های $(x+y)$ و $(x-y)$ عامل‌های x^2-y^2 می‌باشند.

مضرب:

مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چندجمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر و یا هر دو به‌دست می‌آیند.

مثال:

x^2-y^2 هم مضرب $(x+y)$ و $(x-y)$ هم مضرب است.

هم‌چنین

مضرب‌های $a-b$: $a-b$. $5(a-b)$. $(a-b)(a^2+b^2)$. $3(a-b)(a^2+4ab)$. $\cdots$

تذکر

عبارت $\sqrt{5}(a-b)$ یک مضرب $(a-b)$ محسوب نمی‌شود، چون ضرایب عددی باید عدد صحیح باشند.

تمرین:

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) x^3+1

ب) $8x^3-27$

پ) x^6-y^6

ت) x^4-y^4

ث) x^2+y^2

تمرین:

به کمک اتحادها، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) 105^2

ب) 1007^2

پ) 43×37

ت) 28×32

ث) 99^2

تمرین:

عبارت $27x^3-1$ مضرب کدام‌یک از عبارت‌ها است؟

1) $a-1$ 2) $3a-1$ 3) $9a^2+3a+1$ 4) $3a+1$

عبارت‌های گویا:

هر کسری که صورت و مخرج آن چندجمله‌ای باشد را عبارت گویا می‌گوییم.

مثال:

$\frac{2x+\sqrt{5}}{x+y}$ یک عبارت گویا است، امّا عبارت $\frac{\sqrt{x}}{x+4}$ گویا نیست، زیرا $\sqrt{x}$ یک جمله‌ای نمی‌باشد.

نکته:

یک عبارت گویا به‌ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد.

مثال:

عبارت گویای $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$ به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

پاسخ:

$x-2=0 \rightarrow x=2\ ,\quad x-1=0 \rightarrow x=1$

بنابراین عبارت گویای داده شده فقط به ازای $x=2$ و $x=1$ تعریف نمی‌شود.

تمرین:

کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

1) $\frac{3x-\sqrt{7}}{x^2}$ 2) $\frac{x^3-1}{x^3+1}$ 3) $\sqrt[3]{x}-1$ 4) $\sqrt[3]{x^2}+x-1$

تمرین:

عبارت‌های گویای زیر به‌ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

1) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+4}$

2) $\frac{4x}{x-2}$

ساده کردن عبارت‌های گویا:

برای ساده کردن عبارت‌های گویا، صورت و مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم و با حذف عامل‌های مشترک در صورت و مخرج، سادهٔ شدهٔ کسر به‌دست می‌آید.

مثال:

عبارت گویای $\frac{x^3+1}{x^2+6x+5}$ را ساده کنید.

پاسخ:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$
$$x^2+6x+5=(x+1)(x+5)$$
$$\frac{x^3+1}{x^2+6x+5}=\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}(x+5)}=\frac{x^2-x+1}{x+5}$$

تمرین:

کسرهای گویای زیر را ساده کنید.

1) $\frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$

2) $\frac{x^2+4}{x^4-16}$

3) $\frac{2x^2+5x+3}{x^2-x-2}$

ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا:

برای ضرب و تقسیم عبارت‌های گویا، ابتدا هر یک از عبارت‌های گویا را ساده کرده و سپس از قوانین زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\quad (b.d\neq 0)$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}\quad (b.c.d\neq 0)$$

مثال:

عبارت گویای $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}\times\frac{x^2+x}{x-1}$ را ساده کنید.

پاسخ:

$$\frac{x^2+x}{x-1}\times\frac{x^3-1}{x^2+x+1}=\frac{x(x+1)}{x-1}\times\frac{(x-1)(\cancel{x^2+x+1})}{\cancel{x^2+x+1}}=\frac{x(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=x(x+1)$$

تمرین:

حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

1) $\frac{x^2-2x}{x^2+2x}\times\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

2) $\frac{2x^3-8x^2}{x^3}\div\frac{x^2-3x-4}{x^3+1}$

جمع و تفریق عبارت‌های گویا:

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا، پس از ساده کردن هر یک از عبارت‌های گویا، کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها را به‌دست می‌آوریم(اگر مخرج همهٔ کسرها را تجزیه کرده و سپس عامل‌های موجود با بزرگترین توان را در هم ضرب کنیم، کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها به‌دست می‌آید)، سپس کسرهایی با کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها می‌نویسیم و آن‌ها را با استفاده از دستور زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$$

مثال:

حاصل کسر $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

هیچ یک از کسرهای $\frac{1}{x+1}$ و $\frac{2}{x-1}$ ساده نمی‌شوند. کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج دو کسر، $(x-1)(x+1)$ می‌باشد. پس داریم:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{1(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x+1)+x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x+2+x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{3x+1}{x^2-1}$$

◈تمرین:

حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

1) $\frac{1}{x+3}+\frac{6}{x^2-9}$

2) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{5x}{x^2-1}$

گویا کردن مخرج کسرها:

برای گویا کردن مخرج کسر عبارت $\frac{A}{\sqrt[m]{x^m}}$ ، $(n>m)$ ، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

✍مثال:

مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$ را گویا کنید.

✍پاسخ:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\times\frac{\sqrt[3]{x^{3-2}}}{\sqrt[3]{x^{3-2}}}=\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}$$

☑نکته:

اگر در مخرج کسر، رادیکال‌هایی با فرجهٔ زوج داشته باشیم و مخرج کسر فقط یک رادیکال نباشد، برای گویا کردن مخرج از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. به این روش که صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم(مزدوج $a-b$ ، عبارت $a+b$ و مزدوج $a+b$ ، عبارت $a-b$ می‌باشد)، سپس با استفاده از اتحاد مزدوج، حاصل مخرج را که یک عبارت بدون رادیکال است، به‌دست می‌آوریم.

✍مثال:

مخرج کسر $\frac{x}{\sqrt{2}+3}$ را گویا کنید.

✍پاسخ:

$$\frac{x}{\sqrt{2}+3}=\frac{x}{\sqrt{2}+3}\times\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-3}=\frac{x(\sqrt{2}-3)}{(\sqrt{2})^2-3^2}=\frac{x(\sqrt{2}-3)}{2-9}=\frac{x(\sqrt{2}-3)}{-7}$$

☑**نکته:**

اگر در مخرج کسر، رادیکال‌هایی با فرجهٔ 3 داشته باشیم و مخرج کسر فقط یک رادیکال نباشد، برای گویا کردن مخرج از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

مثال:

مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}$ را گویا کنید.

پاسخ:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\times\frac{(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}+1}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^3+(1)^3}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$$

تمرین:

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

ب) $\frac{1}{\sqrt[5]{16}}$

پ) $\frac{3}{4-\sqrt{7}}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

ث) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+2}$

ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-3}$

چ) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$

تمرینات تکمیلی فصل 3

1- برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این‌صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$-\sqrt{125}$ | $\sqrt{69}$

$\sqrt{\frac{8}{9}}$ | $\sqrt[3]{400}$

$\sqrt[3]{0\cdot001}$ | $\sqrt[4]{81}$

$\sqrt[3]{-80}$ | $-\sqrt{0\cdot04}$

$\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}$ | $\sqrt[5]{0}$

$-\sqrt[4]{100}$

2- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{49}-\sqrt{100}$

ب) $2\sqrt[3]{-8}+5\sqrt{16}$

پ) $\sqrt[3]{-32}\times\sqrt{\frac{1}{4}}$

ت) $\sqrt{2\sqrt[3]{27}+3\sqrt[4]{1}}$

ث) $\sqrt[3]{1+\sqrt{49}}$

3- فرض کنیم $a=-1$ است، در $\square$ علامت مناسب قرار دهید.

$\sqrt[5]{a}\ \square\ \sqrt[11]{a}$ | $\sqrt[3]{a}\ \square\ \sqrt[5]{a}$

$a^3\ \square\ a^5$ | $a^2\ \square\ a^3$

4- به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) اگر $a=\sqrt[3]{4}$ باشد، حاصل عبارت a^3-2 را به‌دست آورید.

ب) اگر $a=\sqrt[3]{11}$ باشد، حاصل عبارت a^6+15 را به‌دست آورید.

پ) اگر $\sqrt[4]{x}=9$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt[8]{x}$ را به‌دست آورید.

5- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

پ) $\frac{3}{4-\sqrt{7}}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

ث) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

ج) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

چ) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}-\frac{5x}{x-1}$

ح) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\frac{1}{\sqrt[8]{x}-1}$

6- عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $2x^2+12x$

ب) x^2-16y^2

پ) x^2+7x+6

ت) $27x^4-xy^3$

ث) x^5-xy^4

تست‌های فصل 3

1) یکی از ریشه‌های چهارم عدد 256، با کدام گزینهٔ زیر می‌تواند برابر باشد؟

1) ریشهٔ پنجم 512   2) یکی از ریشه‌های دوّم 36   3) ریشهٔ سوّم -64   4) 2

2) کدام گزینه نادرست است؟

1) $\sqrt[4]{\frac{162}{32}} = 1 \cdot 5$ 2) $\sqrt[5]{32000} = 2$ 3) $\sqrt[4]{0 \cdot 0081} = 0 \cdot 3$ 4) $\sqrt[6]{0} = 0$

3) با توجه به جدول مقابل، حاصل $a+b$ کدام است؟

عدد	-3125	b
ریشهٔ پنجم	a	$2\sqrt[5]{3}$

1) 101   2) 91   3) 81   4) 92

4) عدد $\sqrt[3]{-300}$ بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد. مجموع این دو عدد صحیح کدام است؟

1) -11   2) -13   3) -15   4) -17

5) اگر $\sqrt[4]{x} = 27$ باشد، حاصل $\sqrt[12]{x}$ کدام است؟

1) 3 2) $\sqrt{3}$ 3) $\sqrt[3]{3}$ 4) 1

6) حاصل $3\sqrt[6]{9} - 3\sqrt[3]{24}$ برابر است با:

1) $2\sqrt[3]{3}$ 2) $6\sqrt[3]{3}$ 3) $3\sqrt[3]{3}$ 4) $21\sqrt[3]{3}$

7) در تجزیهٔ $xy^5 - yx^5$ کدام عامل وجود ندارد؟

1) xy 2) $x+y$ 3) $x+2y$ 4) $-x+y$

8) حاصل کسر $\frac{2x^2-8x+8}{2x-4}$ کدام است؟

1) $2x+4$ 2) $x+2$ 3) $x-2$ 4) $2x-4$

9) حاصل عبارت $\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right) \times \left(\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)$ کدام است؟

1) $\frac{1}{x+1}$ 2) $\frac{1}{x-1}$ 3) -1   4) 1

فصل ۴: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس اوّل: معادله درجه دوّم و روش‌های مختلف حل آن

درس دوّم: سهمی

درس سوّم: تعیین علامت

بارم نوبت اول: ۵ نمره

بارم نوبت دوم: ۲ نمره

بارم شهریور: ۳/۵ نمره

درس اوّل: معادلهٔ درجهٔ دوّم و روش‌های مختلف حل آن

معادلهٔ درجهٔ دوّم:

هر معادله به شکل $(a \neq 0)$. $ax^2 + bx + c = 0$ را که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند، یک معادلهٔ درجهٔ دوّم می‌نامیم. در واقع باید بعد از ساده کردن یک معادله، بزرگترین توان متغیر آن 2 باشد.

مثال:

معادلهٔ $2x^2 - 8x + 1 = 0$ ، یک معادلهٔ درجهٔ دوّم است.امّا معادلهٔ $(x+1)^2 - (x-3)^2 = x$ یک معادلهٔ درجهٔ دوّم نمی‌باشد زیرا:

$$(x+1)^2 - (x-3)^2 = (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 6x + 9) = \cancel{x^2} + 2x + 1 - \cancel{x^2} + 6x - 9 = 8x - 8 = x$$

که معادله به‌صورت $8x - 8 = x$ درمی‌آید که یک معادلهٔ درجهٔ یک می‌باشد.

نکته

ویژگی حاصل‌ضرب صفر:

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ ، آن‌گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است. یعنی:

$AB = 0 \rightarrow A = 0$ یا $B = 0$

حل معادلهٔ درجهٔ دوّم به روش تجزیه:

اگربتوان عبارت درجهٔ دوّم $ax^2 + bx + c$ را به کمک فاکتورگیری یا اتحادها تجزیه کرد، آنگاه می‌توان از ویژگی حاصل‌ضرب صفر برای حل معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ استفاده کرد.

مثال:

معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^2 - 4x + 3 = 0$

ب) $3t^2 - t = 0$

پ) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

✍پاسخ:

الف) $x^2-4x+3 \overset{\text{اتحاد جمله مشترک}}{=} (x-1)(x-3)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-1=0 & \Rightarrow \quad x=1 \\ x-3=0 & \Rightarrow \quad x=3 \end{cases}$

آزمایش جواب‌ها:

$$\begin{cases} x=1 & \Rightarrow \quad x^2-4x+3=(1)^2-4(1)+3=1-4+3=0 \quad \checkmark \\ x=3 & \Rightarrow \quad x^2-4x+3=(3)^2-4(3)+3=9-12+3=0 \quad \checkmark \end{cases}$$

ب) $3t^2-t \overset{\text{فاکتورگیری}}{=} t(3t-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t=0 \\ 3t-1=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{1}{3} \end{cases}$

آزمایش جواب‌ها:

$$\begin{cases} x=0 & \Rightarrow \quad 3t^2-t=3(0)^2-(0)=0 \quad \checkmark \\ x=\dfrac{1}{3} & \Rightarrow \quad 3t^2-t=3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}=0 \quad \checkmark \end{cases}$$

پ) $3x^2-4x+1=0 \overset{\text{روش A}}{\Rightarrow} A=3x^2-4x+1$

$$3A=9x^2-4(3x)+3=(3x-1)(3x-3)$$
$$\cancel{3}A=(3x-1)\cancel{3}(x-1)$$
$$A=(3x-1)(x-1)$$

$$(3x-1)(x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x-1=0 & \Rightarrow \quad x=\frac{1}{3} \\ x-1=0 & \Rightarrow \quad x=1 \end{cases}$$

آزمایش جواب‌ها:

$$\begin{cases} x=1 & \Rightarrow \quad 3x^2-4x+1=3(1)^2-4(1)+1=3-4+1 \quad \checkmark \\ x=\dfrac{1}{3} & \Rightarrow \quad 3x^2-4x+1=3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-4\left(\dfrac{1}{3}\right)+1=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}+1=\dfrac{1-4+3}{3}=0 \quad \checkmark \end{cases}$$

تمرین:

معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2-3x=10$

ب) $9x^2 - 4 = 0$

پ) $5x^2 + 7x - 6 = 0$

ت) $5a^2 - 7a = 2a(a-3)$

ث) $5t^2 = 20$

حل معادلهٔ درجهٔ دوّم به کمک ریشه‌گیری:

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوّم $x^2 = a$ عبارت‌اند از:

$x = -\sqrt{a}$. $x = \sqrt{a}$

زیرا

$$x^2 = a \Rightarrow x^2 - a = 0 \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{\Rightarrow} (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{a} = 0 & \Rightarrow & x = \sqrt{a} \\ x + \sqrt{a} = 0 & \Rightarrow & x = -\sqrt{a} \end{cases}$$

مثال:

جواب هر یک از معادلات زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به‌دست آورید.

الف) $5x^2 = 20$

ب) $x^2 + 4 = 0$

پ) $(r-2)^2 = 16$

پاسخ:

الف) $5x^2 = 20 \overset{\div 5}{\Rightarrow} x^2 = 4 \overset{4>0}{\Rightarrow} x = 2 \ . x = -2$

ب) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \overset{-4<0}{\Rightarrow}$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد

پ) $(r-2)^2 = 16 \overset{16>0}{\Rightarrow} r - 2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} r-2 = 4 & \Rightarrow & r = 6 \\ r-2 = -4 & \Rightarrow & r = -2 \end{cases}$

◈ تمرین:

معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

الف) $2x^2 = 50$

ب) $t^2 + 7 = 0$

پ) $3 - 3k = 3k(2k - 1$

ت) $(2x + 1)^2 = 25$

ث) $4(2b - 1)^2 = 9$

نکته

عبارت مربع کامل:

اگر a یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه با اضافه کردن $(\frac{a}{2})^2$ به دو جمله‌ای $x^2 + ax$ ، این دوجمله‌ای به شکل مربع کامل درمی‌آید.(a ضریب x است.) توجه می‌کنیم که در این روش ضریب x^2 باید عدد یک باشد.

به‌عنوان مثال، اگر بخواهیم دو جمله‌ای $x^2 + 8x$ را به‌صورت مربع کامل بنویسیم، کافیست عبارت $(\frac{8}{2})^2 = 16$ را به دوجمله‌ای اضافه کنیم. یعنی:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

حل معادلهٔ درجهٔ دوّم به روش مربع کامل:

ابتدا اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک باشد، با تقسیم طرفین معادله بر ضریب x^2 ، به یک معادلهٔ درجهٔ دوّم به‌صورت $x^2+ax+b=0$ می‌رسیم. سپس معادله را به‌صورت $x^2+ax=-b$ می‌نویسیم و با اضافه کردن $(\frac{a}{2})^2$ به دو طرف معادله، در سمت چپ معادله مربع کامل به‌دست می‌آید. حال به ریشه‌گیری از دو طرف معادله، ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

مثال:

معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2-4x-5=0$

ب) $2t^2+5t+3=0$

پ) $x^2+2x=24$

پاسخ:

الف) $x^2-4x-5=0 \Rightarrow x^2-4x=5 \xRightarrow{(\frac{-4}{2})^2=4} x^2-4x+4=5+4 \Rightarrow (x-2)^2=9$

$$\xRightarrow{9>0} x-2=\pm3 \Rightarrow \begin{cases} x-2=3 & \Rightarrow \quad x=5 \\ x-2=-3 & \Rightarrow \quad x=-1 \end{cases}$$

ب) $2t^2+5t+3=0 \Rightarrow t^2+\frac{5}{2}t+\frac{3}{2}=0 \xRightarrow{(\frac{\frac{5}{2}}{2})^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}} t^2+\frac{5}{2}t+\frac{25}{16}=-\frac{3}{2}+\frac{25}{16}$

$$\Rightarrow \left(t+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{-24+25}{16} \Rightarrow \left(t+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{1}{16} \Rightarrow t+\frac{5}{4}=\pm\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t+\frac{5}{4}=\frac{1}{4} & \Rightarrow \quad t=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}=-1 \\ t+\frac{5}{4}=-\frac{1}{4} & \Rightarrow \quad t=-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

پ) $x^2+2x=24 \xRightarrow{(\frac{2}{2})^2=1} x^2+2x+1=24+1 \Rightarrow (x+1)^2=25 \Rightarrow x+1=\pm5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=5 & \Rightarrow \quad x=4 \\ x+1=-5 & \Rightarrow \quad x=-6 \end{cases}$$

تمرین:

معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2-5x+1=0$

ب) $t^2 + 3t = 3$

پ) $n^2 - 4n + 5 = 0$

ت) $2r^2 + r - 2 = 0$

ث) $2x^2 + 3x = 0$

حل معادلهٔ درجهٔ دوّم به روش فرمول کلی:

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجه دوّم یفرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادلهٔ درجه دوّم $ax^2 + bx + c = 0$ که در $a \neq 0$ است، پیدا کنیم.

ابتدا معادلهٔ درجه دوّم $ax^2 + bx + c = 0$ را با استفاده از روش مربع کامل حل می‌کنیم. داریم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\text{طرفین بر } a \text{ تقسیم}} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

☑نکته:

در روش فرمول کلی مقدار $b^2 - 4ac$ را برابر Δ (دلتا) قرار می‌دهیم. با توجه به مقدار Δ یکی از سه حالت زیر به وجود می‌آید:

1) $\Delta > 0$، در این‌صورت معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی به‌صورت زیر است:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad . \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2) $\Delta = 0$، در این‌صورت معادله دارای ریشهٔ مضاعف (ریشهٔ مکرر مرتبه دوم) به‌صورت زیر است:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3) $\Delta < 0$، در این‌صورت معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

مثال:

معادلات زیر را به روش فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2 - x + 1 = 0$

ب) $4t^2 - 7t + 1 = 0$

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

پاسخ:

الف) $x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \ . \ b = -1 \ . \ c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 < 0$$

$\Delta < 0$ و معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب) $4t^2 - 7t + 1 = 0 \Rightarrow a = 4 \ . \ b = -7 \ . \ c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(4)(1) = 49 - 16 = 33 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{33}}{2(4)} = \frac{7 + \sqrt{33}}{8}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{33}}{2(4)} = \frac{7 - \sqrt{33}}{8}$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است.

پ) $-x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow a = -1 \ . \ b = 4 \ . \ c = -4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-1)(-4) = 16 - 16 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$\Delta = 0$ و معادله دارای ریشهٔ مضاعف (ریشهٔ مکرر مرتبه دوم) است.

تمرین:

معادلات زیر را به روش فرمول کلی حل کنید.

الف) $2x^2 - x - 5 = 0$

ب) $t^2 + 3t = 3$

پ) $-2x^2 + x + 3 = 0$

ت) $r - r^2 = 3$

ث) $4x^2 - 13x + 3 = 0$

تمرین:

مجموع مربعات دو عدد طبیعی متوالی 265 است. این دو عدد را پیدا کنید.

تمرین:

محیط و مساحت مستطیلی به ترتیب 20 و 24 می‌باشد. ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

تمرین:

اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر 4 سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آنها 60 شود، سن هر کدام چقدر است؟

تمرین:

هر یک از معادلات زیر را به روش دلخواه حل کنید.

الف) $2x^2 = 250$

ب) $4a^2 + 3a = 1$

پ) $9 - 6z + z^2 = 0$

ت) $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$

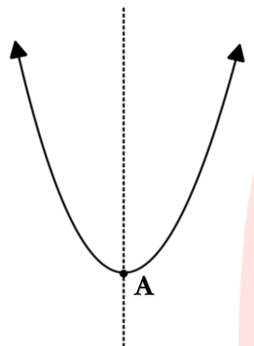
ث) $2a^2 + 5a - 3 = 0$

ج) $8 - x = 3x(x-1)$

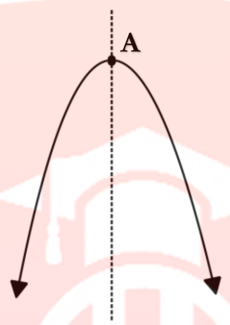
درس دوّم: سهمی

سهمی:

نمودار هر سهمی به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت زیر است:



$a > 0$



$a < 0$

نقطهٔ A را در شکل‌های بالا رأس سهمی می‌گوییم. اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطهٔ سهمی و اگر $a > 0$ باشد، A بالاترین نقطهٔ سهمی است. همچنین خط عمودی را که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی می‌نامیم.

رسم سهمی:

برای رسم سهمی باید رأس سهمی و دو نقطهٔ کمکی در دو طرف رأس مشخص کنیم. با توجه به علامت a و با وصل کردن این نقاط، نمودار را رسم می‌کنیم. (می توان از محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات نیز به عنوان نقاط کمکی استفاده کرد.)

☑نکته:

معادلهٔ هر سهمی به یکی از دو صورت زیر داده می‌شود:

1) اگر معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، داده شود، رأس سهمی نقطهٔ $A(h.k)$ و خط به معادلهٔ $x = h$، خط تقارن سهمی است.

2) اگر معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0$ است، داده شود، ابتدا با استفاده از روش مربع کامل، سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل می‌نویسیم. یعنی:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right) + c$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2\right) + c - a(\frac{b}{2a})^2 = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

در نتیجه معادلهٔ سهمی به‌صورت

$$y = a\Big(x+\overbrace{\frac{b}{2a}}^{=-h}\Big)^2 + \overbrace{\frac{4ac-b^2}{4a}}^{k}$$

نوشته می‌شود که در آن طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ و عرض رأس سهمی برابر $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ می‌باشد و هم‌چنین معادلهٔ محور تقارن، $x = -\frac{b}{2a}$ است. توجه می‌کنیم که عرض رأس سهمی را می‌توان با قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادلهٔ سهمی به‌دست آورد.

مثال:

رأس سهمی به معادلهٔ $y = 2x^2 + 4x - 1$ را مشخص کنید. معادلهٔ خط تقارن آن را بنویسید.

پاسخ:

$$a = 2 \ .\ b = 4 \ .\ c = -1$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2(2)} = -1 \\ y = \dfrac{4ac-b^2}{4a} = \dfrac{4(2)(-1)-4^2}{4(2)} = \dfrac{-8-16}{8} = \dfrac{-24}{8} = -3 \end{cases} \rightarrow A(-1.-3)$$ رأس سهمی

معادلهٔ خط تقارن سهمی $x = -1$ است.

مثال:

سهمی به معادلهٔ $y = -2x^2 + 1$ را رسم کنید.

پاسخ:

ابتدا رأس سهمی را مشخص می‌کنیم.

$$a = -2 \ .\ b = 0 \ .\ c = 1$$

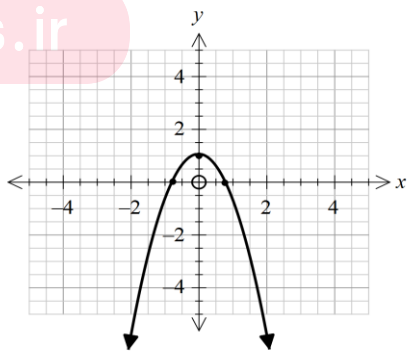
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(-2)} = 0 \ .\ y = -2(0)^2 + 1 = 1 \rightarrow A(0.1)$$ رأس سهمی

برای مشخص کردن دو نقطهٔ کمکی، محل تلاقی نمودار با محور Xها را مشخص می‌کنیم.

$$y = 0 \Rightarrow -2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}.0\right) \ .\ C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}.0\right)$$



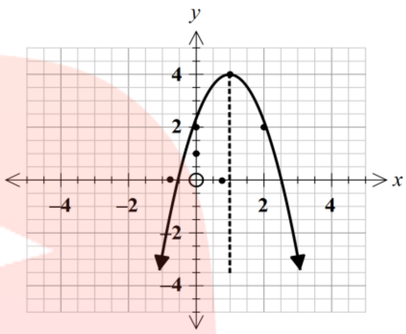
مثال:

سهمی به معادلهٔ $y = -2(x-1)^2 + 4$ را رسم کنید.

پاسخ:

رأس سهمی نقطهٔ $A(1.4)$ است. دو نقطهٔ کمکی در دو طرف رأس مشخص می‌کنیم:

x	y	
0	2	
1	4	← رأس سهمی
2	2	



تمرین:

مختصات رأس و معادلهٔ خط تقارن هر یک از سهمی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $y = 3(x+2)^2 - 4$

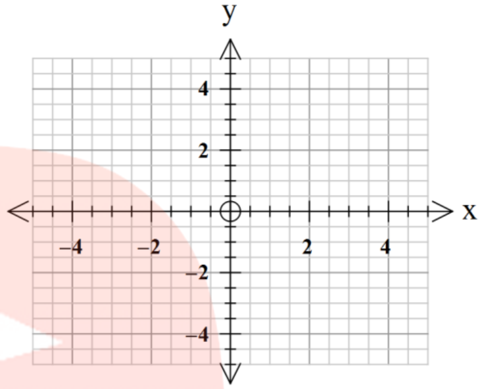
ب) $y = x^2 - 4x$

پ) $y = -2x^2 + 10x + 7$

ت) $y = (x+1)^2 - 2$

تمرین:

سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، محورYها را در نقطه‌ای به عرض 10 و محورXها را در نقاط 2 و 5 قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.



تمرین:

اگر (-2.5) و (0.5) دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به‌دست آورید.

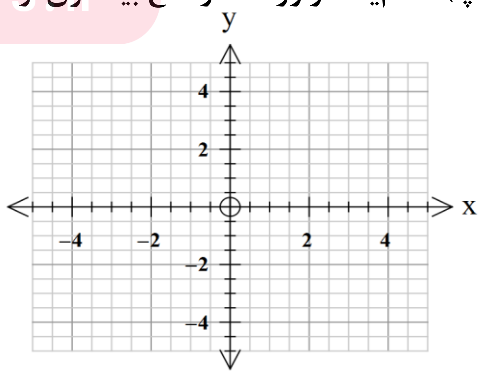
تمرین:

دو پرتابگر وزنه در یک مسابقهٔ ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A ، زاویهٔ α را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطهٔ $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ به‌دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویهٔ β را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطهٔ $y = -2x^2 + 3x + 2$ به‌دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور X ها در چه نقاطی است؟ کدام‌یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام‌یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازهٔ آنها را مشخص کنید.



درس سوّم: تعیین علامت

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه اوّل:

برای تعیین علامت $y = ax + b$ ابتدا ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم. (معادلهٔ $ax + b = 0$ را حل می‌کنیم).
$x = -\frac{b}{a}$ ریشهٔ این معادله است، سپس از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

مثال:

عبارت $y = -3x + 6$ را تعیین علامت کنید.

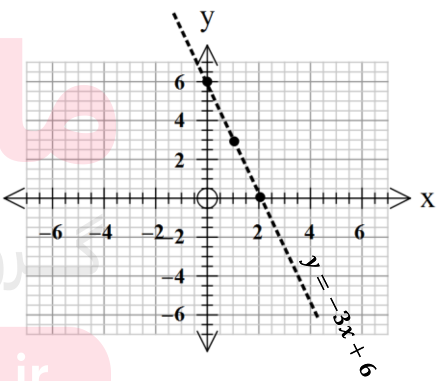
پاسخ:

ابتدا ریشه‌های معادله $y = -3x + 6$ را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور معادلهٔ درجه اوّل $y = 0$ را حل می‌کنیم.

$y = 0 \rightarrow -3x + 6 = 0 \rightarrow -3x = -6 \rightarrow x = 2$ ریشهٔ معادله

با توجه به اینکه ضریب x $(a = -3)$ عددی منفی است، جدول تعیین علامت y به‌صورت زیر است:

x	$x < 2$	2	$x > 2$
$y = -3x + 6$	+	0	-



تعیین علامت چندجمله‌ای درجه دوّم:

چندجمله‌ای درجه دوّم $P(x) = ax^2 + bx + c$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ است را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادلهٔ $P(x) = 0$ را حل می‌کنیم. سپس بر حسب اینکه معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی $(\Delta > 0)$ یا فقط یک ریشهٔ مضاعف $(\Delta = 0)$ و یا فاقد ریشهٔ حقیقی $(\Delta < 0)$ باشد، علامت P را تعیین می‌کنیم.

1) اگر معادله $P(x)=0$ دو ریشهٔ متمایز x_1 و x_2 ، $(x_1<x_2)$ داشته باشد $(\Delta>0)$، جدول تعیین علامت P به‌صورت زیر است:

x		x_1		x_2	
P	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

مثال:

عبارت $P(x)=2x^2-x-3$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ:

ابتدا ریشه‌های معادله $P(x)=2x^2-x-3$ را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم. برای این منظور معادلهٔ درجه دوّم $P=0$ را به روش فرمول کلی حل می‌کنیم.

$$a=2 \ . \ b=-1 \ . \ c=-3$$

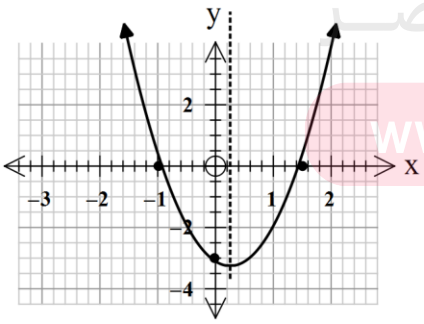
$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)(-3)=1+24=25>0$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2(2)}=\dfrac{1+5}{4}=\dfrac{3}{2} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2(2)}=\dfrac{1-5}{4}=-1 \end{cases}$$

با توجه به اینکه $a=2$ و مثبت است، بنابراین علامت P به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

x		-1		$\frac{3}{2}$	
P	+	0	-	0	+

نمودار سهمی $y=2x^2-x-3$ در شکل زیر رسم شده است.



به کمک نمودار نیز می‌توان علامت y را برای xهای مختلف تعیین کرد.

برای $x>\frac{3}{2}$ و $x<-1$ ، نمودار بالای محور X هاست،

پس y علامت مثبت دارد و برای $-1<x<\frac{3}{2}$ ،

نمودار پایین محور Xهاست، پس y علامت منفی دارد.

برای $x=\frac{3}{2}$ و $x=-1$ نمودار محور X ها را قطع کرده است پس مقدار y برابر صفر است.

تمرین:

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $y = x^2 - 4x$

ب) $y = x^2 + 4x - 21$

2) اگر معادله $P(x) = 0$ ریشهٔ مضاعفی برابر $x = -\frac{b}{2a}$ داشته باشد ($\Delta = 0$)، جدول تعیین علامت P به‌صورت زیر است:

x		$-\frac{b}{2a}$	
P	موافق علامت a	0	موافق علامت a

مثال:

عبارت $P(x) = -x^2 + 6x - 9$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ:

ابتدا ریشه‌های معادله $P(x) = -x^2 + 6x - 9$ را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم. برای این منظور معادلهٔ درجه دوّم $P = 0$ را به روش فرمول کلی حل می‌کنیم.

$a = -1 \ . \ b = 6 \ . \ c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-1)(-9) = 36 - 36 = 0$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$

با توجه به اینکه $a = -1$ و منفی است، بنابراین علامت P به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

x		3	
P	-	0	-

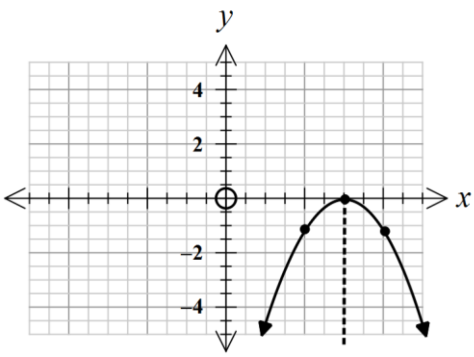
نمودار سهمی $y = -x^2 + 6x - 9$ در شکل زیر رسم شده است.

به کمک نمودار نیز می‌توان علامت y را برای xهای مختلف تعیین کرد.

برای $x > 3$ و $x < 3$ ، نمودار پایین محور Xهاست،

پس y علامت منفی دارد و برای $x = 3$ ،

نمودار مماس با محور Xهاست، پس y برابر صفر است.



تمرین:

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = 2x^2 - 4x + 2$

ب) $P = -(x-5)^2$

3) اگر معادله $P(x) = 0$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد ($\Delta < 0$)، آن‌گاه جدول تعیین علامت P به‌صورت زیر است:

x	به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x
P	موافق علامت a

مثال:

$P(x) = x^2 + 5x + 7$ را تعیین علامت کنید.

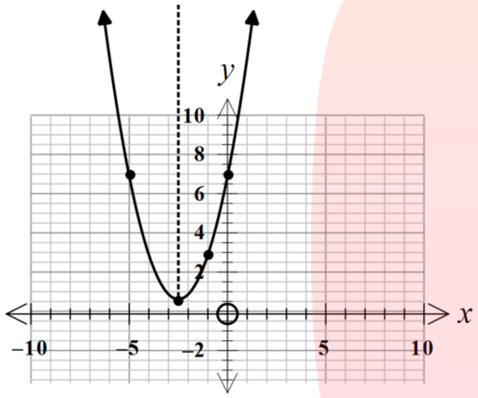
پاسخ:

ابتدا ریشه‌های معادله $P(x) = x^2 + 5x + 7$ را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور معادلهٔ درجه دوّم $P = 0$ را حل می‌کنیم.

$$a = 1 \;.\; b = 5 \;.\; c = 7$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(1)(7) = 25 - 28 = -3 < 0$$

Δعددی منفی است، پس معادلهٔ $P = 0$ ریشه ندارد و با توجه به اینکه $a = 1$ و مثبت است، عبارت $P(x) = x^2 + 5x + 7$ همواره مثبت است و جدول تعیین علامت P به‌صورت زیر است:

x	به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x
P	+



نمودار سهمی $y = x^2 + 5x + 7$ در شکل روبرو رسم شده است.

به کمک نمودار نیز می‌توان علامت y را برای xهای مختلف تعیین کرد.

به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x، نمودار بالای محور Xهاست، پس y علامت مثبت دارد.

تمرین:

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $A = -x^2 + 4x - 9$

ب) $P = 2x^2 + x + 3$

☑نکته:

- اگر $\Delta=0$ و $a>0$ ، آن‌گاه همواره داریم $ax^2+bx+c\geq 0$.
- اگر $\Delta=0$ و $a<0$ ، آن‌گاه همواره داریم $ax^2+bx+c\leq 0$.
- اگر $\Delta<0$ و $a>0$ ، آن‌گاه همواره داریم $ax^2+bx+c>0$.
- اگر $\Delta<0$ و $a<0$ ، آن‌گاه همواره داریم $ax^2+bx+c<0$.

✎مثال:

به ازای هر $x\epsilon R$، ثابت کنید:

الف) $x^2+7x+21>0$

ب) $-x^2+3x-5<0$

پ) $2x^2-8x+9>0$

ت) $-x^2+mx-m^2-5>0$

✍پاسخ:

الف) $a=1\ .\ b=7\ .\ c=21$

$$\Delta=b^2-4ac=(7)^2-4(1)(21)=49-84=-35<0$$

چون $\Delta<0$ و $a>0$ (ضریب x^2)، پس به ازای هر $x\epsilon R$، عبارت $x^2+7x+21$ همواره مثبت است.

ب) $a=-1\ .\ b=3\ .\ c=-5$

$$\Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(-1)(-5)=9-20=-11<0$$

چون $\Delta<0$ و $a<0$ (ضریب x^2)، پس به ازای هر $x\epsilon R$، عبارت $x^2+7x+21$ همواره منفی است.

پ) $a=2\ .\ b=-8\ .\ c=9$

$$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4(2)(9)=64-72=-8<0$$

چون $\Delta<0$ و $a>0$ (ضریب x^2)، پس به ازای هر $x\epsilon R$، عبارت $x^2+7x+21$ همواره مثبت است.

ت) $a=-1\ .\ b=m\ .\ c=-m^2-5$

$$\Delta=b^2-4ac=(m)^2-4(-1)(-m^2-5)=m^2-4m^2-20=-3m^2-20<0$$

چون $\Delta<0$ و $a<0$ (ضریب x^2)، پس به ازای هر $x\epsilon R$، عبارت $x^2+7x+21$ همواره منفی است.

تذکر

برای تعیین علامت عبارت‌هایی که به‌صورت حاصل‌ضرب و یا تقسیم چند عبارت دیگر باشد، باید هر یک از عبارت‌ها را جداگانه تعیین علامت کرده و نتیجه را در یک جدول مشخص کنیم، سپس علامت عبارت اوّلیه را از ضرب و تقسیم علامت‌ها به‌دست می‌آوریم.

مثال:

عبارت $P=\frac{-x(x+2)}{x^2-5x+6}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ:

برای تعیین علامت، ابتدا ریشهٔ هر یک از عبارت‌ها را به‌دست می‌آوریم. عبارت داده شده، از سه عبارت $-x$ ، $x+2$ و x^2-5x+6 تشکیل شده است.

$$-x=0 \rightarrow x=0$$
$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$
$$x^2-5x+6=0 \rightarrow (x-2)(x-3)=0 \rightarrow x=2\ .\ x=3$$

عبارت فوق دارای چهار ریشهٔ 0 ، -2 ، 2 و 3 می‌باشد. برای هر عبارت یک سطر در نظر می‌گیریم و با توجه به ریشه یا ریشه‌های هر عبارت، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

x		-2		0		2		3	
$-x$	+		+	0	−		−		−
$x+2$	−	0	+		+		+		+
x^2-5x+6	+		+		+	0	−	0	+
P	−	0	+	0	−	تعریف نشده	+	تعریف نشده	−

$$\Rightarrow \begin{cases} P>0 \ ; \ -2<x<0\ .\ 2<x<3 \\ P<0 \ ; \ x<-2\ .\ 0<x<2\ .\ x>3 \\ P=0 \ ; \ x=-2\ .\ x=0 \end{cases}$$

تمرین:

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $y = -x^2 + x + 2$

ب) $A = (x^2 - 9)(3x - 1)$

پ) $B= \frac{-x^2+6x-9}{x^2+x+3}$

ت) $A = (x^2 - 9)(3x - 1)$

ث) $B= \frac{x^3+x}{(x^2+4)(x-2)}$

ج) $y = (x + 3)(2x - 1)$

چ) $A= 3x + 7$

ح) $A = x^3(4 - x)$

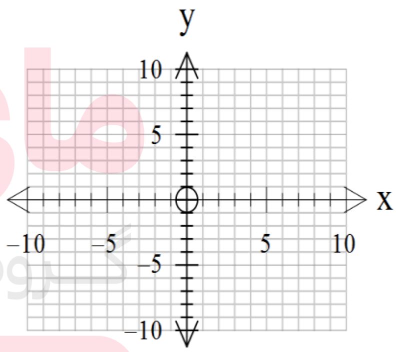
خ) $y = \frac{-x^2-1}{x^2+x-12}$

د) $A = (-x^2 + 2x)(x + 2)^2$

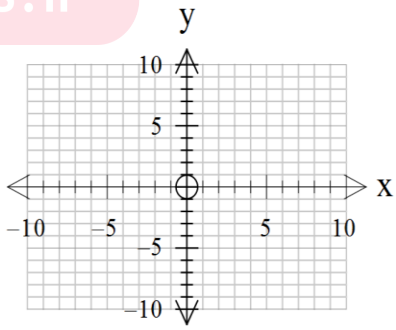
تمرین:

با رسم هر یک از سهمی‌های زیر y را تعیین علامت کنید.

ذ) $y = -x^2 + 6x$



ر) $y = (2x - 1)(x + 2)$



نامعادله

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادلاتی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت زیرند:

می‌خوانیم	نامعادله
A کوچکتر از B است.	$A < B$
A کوچکتر یا مساوی B است.	$A \leq B$
A بزرگتر از B است.	$A > B$
A بزرگتر یا مساوی B است.	$A \geq B$

برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم:

1) **خاصیت جمع:**

برای عبارت‌های جبری A، B و C، اگر $A < B$، آن‌گاه $A + C < B + C$.

2) **خاصیت ضرب:**

الف) اگر $C > 0$ و $A > B$، آن‌گاه $AC > BC$. (اگر دو طرف یک نامعادله را در عددی مثبت ضرب کنیم، جهت نامعادله عوض نمی‌شود.)

ب) اگر $C < 0$ و $A > B$، آن‌گاه $AC < BC$. (اگر دو طرف یک نامعادله را در عددی منفی ضرب کنیم، جهت نامعادله عوض می‌شود.)

مثال:

نامعادلهٔ $5x - 1 \geq 3x - 7$ را حل کنید و مجموعه جواب به‌دست آمده را روی محور نمایش دهید.

پاسخ:

روش اوّل:

$$5x - 1 \geq 3x - 7$$

به دو طرف نامعادله $-3x$ را اضافه می‌کنیم.

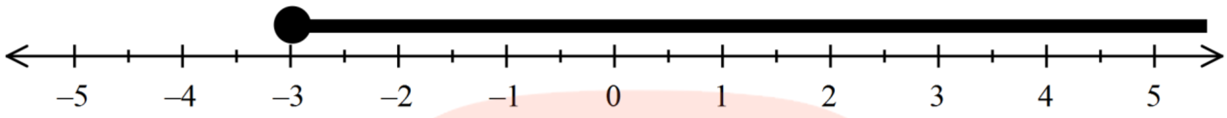
$$5x - 1 - 3x \geq 3x - 7 - 3x$$

$$2x - 1 \geq -7 \quad \rightarrow \quad 2x \geq -6$$

دو طرف نامعادله را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}(2x) \geq \frac{1}{2}(-6) \quad \rightarrow \quad x \geq -3$$

مجموعهٔ جواب $=\{x \epsilon R \mid x \geq -3\}$



روش دوّم:

$$5x-1 \geq 3x-7 \;\rightarrow\; 5x-3x \geq -7+1 \;\rightarrow\; 2x \geq -6 \xrightarrow{\text{طرفین بر 2 تقسیم}} x \geq -3$$

نامعادلات دوگانه:

نامعادلاتی به فرم $-2 \leq 3x-1 \leq 8$ را نامعادلات دوگانه می‌گوییم. برای حل نامعادلات دوگانه می‌توانیم به دو روش عمل کنیم:

روش اوّل:

نامعادلات را به‌صورت دو نامعادلهٔ جدا از هم در یک دستگاه نامعادلات نوشته و جواب هر کدام را پیدا می‌کنیم، سپس بین جواب‌های به‌دست آمده اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} -2 \leq 3x-1 \;\Rightarrow\; -3x \leq -1+2 \;\Rightarrow\; -3x \leq 1 \xrightarrow{\text{طرفین بر 3- تقسیم}} x \geq \frac{-1}{3} \\ 3x-1 \leq 8 \;\Rightarrow\; 3x \leq 8+1 \;\Rightarrow\; 3x \leq 9 \xrightarrow{\text{طرفین بر 3 تقسیم}} x \leq 3 \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک}} \frac{-1}{3} \leq x \leq 3$$

روش دوّم:

نامعادله را به همین شکل داده شده و با استفاده از خواص جمع و ضرب نامساوی‌ها حل می‌کنیم:

$$-2 \leq 3x-1 \leq 8 \xrightarrow{\text{طرفین را با (+1) جمع می‌کنیم}} -2+1 \leq 3x \leq 8+1$$

$$-1 \leq 3x \leq 9 \xrightarrow{\text{طرفین را بر (+3) جمع می‌کنیم}} \frac{-1}{3} \leq x \leq 3$$

همانطور که می‌بینید جواب به‌دست آمده از هر دو روش، یکسان است.

تمرین:

در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $1 < 2x - 3 \leq 3$

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x +$

پ) $4x + 11 \geq 5x + 3$

ت) $x + 1 < 4 - x \leq 3x$

نکته

برای حل نامعادلۀ غیر درجه اوّل، ابتدا نامعادله را به یکی از صورت‌های $P(x) > 0$ یا $P(x) \geq 0$ یا $P(x) < 0$ یا $P(x) \leq 0$ می‌نویسیم. سپس با تعیین علامت $P(x)$ و با توجه به علامت نامساوی، محدودۀ جواب را مشخص می‌کنیم.

مثال:

نامعادلهٔ $2x^2 - 5x \geq -3$ را حل کنید.

پاسخ:

نامعادله را به‌صورت $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$ می‌نویسیم، سپس عبارت $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \qquad a = 2\ .\ b = -5\ .\ c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(2)(3) = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{5-1}{4} = 1$$

x		1		$\frac{3}{2}$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow \quad P(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 1$ یا $x \geq \frac{3}{2}$

نکته

برای حل نامعادلهٔ درجه دوّم می‌توان از روش هندسی (رسم نمودار) نیز استفاده کرد. برای این کار نمودار $y = ax^2 + bx + c\ ;\ a \neq 0$ را رسم کرده و با توجه به نمودار، محدودهٔ x را مشخص می‌کنیم.

مثال:

نامعادلهٔ $x^2 - 2x - 3 < 0$ را حل کنید.

پاسخ:

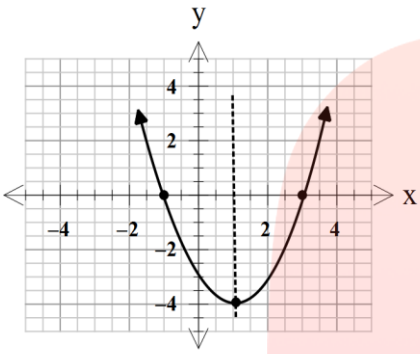
نمودار $y = x^2 - 2x - 3$ را رسم می‌کنیم. برای این کار ابتدا رسم سهمی و سپس محل تلاقی نمودار با محور Xها را تعیین می‌کنیم.

$a = 1 \ . \ b = -2 \ . \ c = -3$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2(1)} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = (1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \quad \Rightarrow \quad A(1.-4)$$

محل تلاقی نمودار با محور Xها را تعیین می‌کنیم.

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-3)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \ . \ x = -1$$



می‌خواهیم $y < 0$ باشد. بنابراین باید x هایی را مشخص کنیم که به‌ازای آن‌ها نمودار پایین محور Xها باشد. با توجه به نمودار در بازه $[-2.4]$، $y < 0$ می‌باشد. پس جواب نامعادلهٔ $x^2 - 2x - 3 < 0$، بازهٔ $[-2.4]$ است.

تمرین:

هر یک از نامعادلات زیر را به دو روش هندسی و جدول تعیین علامت، حل کنید.

الف) $x^2 \le 4$

ب) $3x^2 - x - 2 \ge 0$

پ) $x^2 - 4x < 0$

نامعادلات قدرمطلقی:

برای حل نامعادلات قدرمطلقی از نکتهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این‌صورت

1) اگر $|u| \leq a$، آن‌گاه $-u \leq a \leq u$

2) اگر $|u| \geq a$ ، آن‌گاه $u \geq a$ یا $u \leq -a$

تذکر:

در هر یک از این نامعادلات، اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد، هیچکدام از جواب‌ها نیز علامت مساوی ندارند.

مثال:

هر یک از نامعادلات زیررا حل کنید و مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $|3x-5| \leq 4$

ب) $|2-x| > 4$

پاسخ:

الف)

$$-4 \leq 3x-5 \leq 4 \xrightarrow{+5} -4+5 \leq 3x \leq 4+5 \rightarrow 1 \leq 3x \leq 9 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} \leq x \leq 3$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به‌صورت $[\frac{1}{3}.3]$ است.

ب)

$$\begin{cases} 2-x > 4 \\ 2-x < -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2-4 > x \\ 2+4 < x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 > x \\ 6 < x \end{cases} \rightarrow$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به‌صورت $(-\infty.-2) \cup (6.+\infty)$ است.

نکته

1) اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه نامعادله $|x| \leq a$ جواب ندارد. (مانند $|x| \leq -4$)

2) اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه نامعادله $|x| \geq a$ همواره جواب دارد. (مانند $|4x+3| \geq -2$)

3) برای حل نامعادلات $|u| \leq |v|$ یا $|u| \geq |v|$، می‌توانیم دو طرف نامعادله را به توان 2 برسانیم و با توجه به تساوی $|u|^2 = u^2$ ، قدرمطلق را حذف کرده و سپس نامعادله را حل کنیم.

مثال:

نامعادله $|x-1| \leq |x+2|$ را حل کنید.

پاسخ:

$$|x+2| \leq |x-1| \quad \Rightarrow \quad |x+2|^2 \leq |x-1|^2 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2 \leq (x-1)^2$$

$$\cancel{x^2} + 4x + 4 \leq \cancel{x^2} - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 4x + 2x \leq 1 - 4 \quad \Rightarrow \quad 6x \leq -3 \quad \Rightarrow \quad x \leq -\frac{1}{2}$$

تمرین:

هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x^2 - 5x \leq 0$

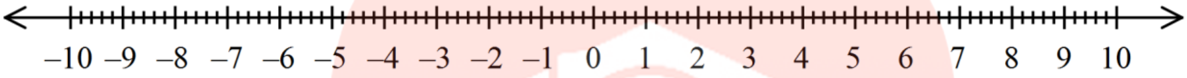
ب) $\frac{x+2}{4-3x} \geq 0$

پ) $\frac{x^2-6x+5}{-x^2+2x-7} > 0$

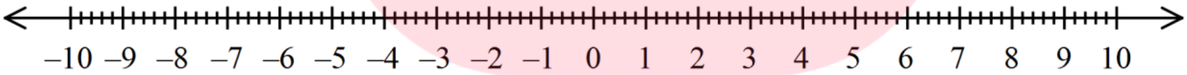
تمرینات تکمیلی فصل 4

1- در هر یک از نامعادلات زیر، مجموعه جواب را با نماد بازه به‌دست آورید. سپس آن را روی محور نشان دهید.

الف) $\left|\frac{x}{3}+\mathbf{1}\right|<\frac{2}{3}$



ب) $|\mathbf{5}-\mathbf{2}x|\geq \mathbf{1}$



2- در هر یک از قسمت‌های زیر، مجموعه جواب یک نامعادلهٔ قدرمطلقی نوشته شده است. نامعادله را مشخص کنید.

الف) $(\mathbf{1}.\,\mathbf{9})$

الف) $(-\mathbf{1}.\,\mathbf{5})$

الف) $(-\infty.\,\mathbf{3}]\cup[\mathbf{6}.\,+\infty)$

الف $(-\infty.\,\mathbf{0}]\cup[\mathbf{4}.\,+\infty)$

3- به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

4- به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور Xها است؟

5- در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $x(x^2 + 4) < 0$

ب) $-2 \leq \frac{5-x}{2} < 0$

پ) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$

ت) $\left|\frac{x-1}{2} - 1\right| \geq 3$

ث) $|7-2x|<1$

ج) $\frac{x^3-x}{x^2-2x+2}\le 0$

6- یک جسم از بالای یک ساختمان که 13 متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $h=-5t^2+18t+13$ محاسبه شود، در چه فاصلهٔ زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از 13 متر خواهد بود؟

7- تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطهٔ $y=\frac{15}{8}x^2-30x+200$ به‌دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از 110 بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده قابل قبولند؟

8- یک جسم از بالای ساختمان به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیهٔ t از رابطهٔ $h=-4t^2+20t+15$ به‌دست آید، آن‌گاه:

الف) ارتفاع ساختمان را به‌دست آورید.

ب) در چه فاصلهٔ زمانی ارتفاع جسم از سطح زمین بیشتر از 15 متر خواهد بود؟

پ) در چه فاصلهٔ زمانی ارتفاع جسم از سطح زمین کمتر از 31 متر خواهد بود؟

تست‌های فصل 4

1) ریشهٔ بزرگتر معادلهٔ $x^2+2x-63=0$ کدام است؟

9 (1   7 (2   3 (3   21 (4

2) در معادلهٔ $(x-\alpha)^2=\beta^2$ مجموع مربعات جوابها چقدر است؟

$\alpha^2+\beta^2$ (1 $\alpha^2-\beta^2$ (2 $2(\alpha^2-\beta^2)$ (3 $2(\alpha^2+\beta^2)$ (4

3) اگر $x=1$ ، یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوّم $5x^2-3x+k=0$ باشد، ریشهٔ دیگر آن کدام است؟

-0.4 (1   -0.3 (2   0.3 (3   0.4 (4

4) مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی 925 است. مجموع این دو عدد کدام است؟

41 (1   43 (2   45 (3   47 (4

5) معادلهٔ خط تقارن سهمی به معادلهٔ $y=-4x^2+12x-8$ کدام است؟

$x=3$ (1 $x=\frac{3}{2}$ (2 $x=-\frac{3}{2}$ (3 $x=-3$ (4

6) مختصات رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^2-3x+2$ کدام است؟

$(\frac{-1}{4}.\frac{3}{2})$ (1 $(\frac{-3}{2}.\frac{1}{4})$ (2 $(\frac{1}{4}.\frac{-3}{4})$ (3 $(\frac{3}{2}.\frac{-1}{4})$ (4

7) برای آن‌که خط $y=\frac{-6x+5}{3}$ بالای محور Xها قرار داشته باشد، باید x در چه بازه‌ای باشد؟

$x<\frac{5}{6}$ (1 $x>\frac{5}{6}$ (2 $x<\frac{6}{5}$ (3 $x>\frac{6}{5}$ (4

8) مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-1}>2$ کدام است؟

$1<x<2$ (1 $0<x<1$ (2 $x>1$ یا $x<0$ (3 $x>2$ یا $x<1$ (4

9) مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left|1+\frac{3x}{2}\right|\le\frac{5}{2}$ شامل کدام عدد زیر نیست؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2 $\frac{-\sqrt{5}}{2}$ (3 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (4

پایان ترم اوّل

با آرزوی موفقیت

پریسا استواری

۱۳۹۶