

به نام خدا

تهیه و تنظیم: مهدی رجبی

درس ۴

فصل ۳

در پایه نهم با اتحادهای زیر آشنا شدیم:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2(a)(b) + b^2 \quad \text{اتحاد مربع دو جمله ای}$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad \text{اتحاد یک جمله مشترک}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a)(b) + 2(a)(c) + 2(b)(c) \quad \text{مربع سه جمله ای}$$

حال قصد داریم با دو اتحاد مهم دیگر هم آشنا بشیم:

۱- اتحاد مکعب دو جمله ای:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2(b) + 3(a)b^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2(b) + 3(a)b^2 - b^3$$

۲- اتحاد چاغ و لاغر یا فیل و فنجان یا مکعبات:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

تذکر: اگر $(a + b)^3$ داده بشه و شما $a^3 + 3a^2(b) + 3(a)b^2 + b^3$ را بنویسی، در حقیقت عبارت مربوط

دادی و یا اینکه $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ داده بشه و شما $a^3 + b^3$ را بنویسی، بازم عبارت مربوط دادی!!! ولی

اگر $a^3 + 3a^2(b) + 3(a)b^2 + b^3$ رو بدن و شما $(a + b)^3$ رو بنویسی، عبارت رو تجزیه کردی!!! تجزیه که

یادت زفته؟؟؟؟ اگر یہ عبارت جبری رو بہ صورت حاصلضرب دو یا چند عبارت جبری در بیاریم، اون عبارت رو تجزیہ کر دیم!!! یا مثلاً اگر $a^2 + b^2$ رو بدن و از شما $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ رو بخوان، در حقیقت از شما خواستن کہ عبارت رو تجزیہ کنی!!!

مثال ۱: حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $(2(x) + 3(z))^3$

$$(2(x) + 3(z))^3 = (2(x))^3 + 3(2(x))^2(3(z)) + 3(2(x))(3(z))^2 + (3(z))^3$$

ب) $(x - 2(y))(x^2 + (x)(2(y)) + (2(y))^2)$

$$(x - 2(y))(x^2 + (x)(2(y)) + (2(y))^2) = x^3 - 8(y)^3$$

مثال ۲: حاصل $(1/0.1)^3$ را بدست آورید.

در اینجا کاربرد اتحاد مکعب رومی بنویسیم:

$$(1/0.1)^3 = (1 + \frac{1}{10})^3 = (1)^3 + 3(1)^2(\frac{1}{10}) + 3(1)(\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^3 =$$

$$1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{1000 + 300 + 30 + 1}{1000} = \frac{1331}{1000}$$

مثال ۳: اگر a و b دو عدد حقیقی، $a + b = 1$ و $a^2 + b^2 = 3$ باشد، مقدار $a^3 + b^3$

www.my-dars.ir

را بیابید.

خب در این جا باید بنیم سوال از ما چی میخواد؟؟؟ خب سوال گفته $a^3 + b^3$ رو حساب کنیم، برای این کار باید عبارت برابر

اون رو یعنی $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ حساب کنیم، خب توی این عبارت همه رو داریم جز ab !!!

پس باید اول بفهمیم ab چقدره؟؟؟؟ به نظر شما چطور باید حسابش کنیم؟؟؟ اگر یہ کوچولو به مغزمون فشار بیاوریم، می بینیم اتحاد مربع اینجا به دردمون میخوره:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2(ab) \Rightarrow 1^2 = 3 + 2(ab) \Rightarrow 1 = 3 + 2(ab) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2(ab) = -2 \Rightarrow \boxed{ab = -1}$$

خب حالا $ab = -1$ رو هم داریم، پس کل سوال کاری نداره دیگه!!!

$$a^2 + b^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = \\ = (1)(3 - (-1)) = 4$$

روش های تجزیه‌ی عبارت های جبری:

۱- با استفاده از اتحادها: هر وقت عبارت داده شده، شبیه یک اتحاد باشه، برای تجزیه کافیه از همون اتحاد استفاده کنیم.

مثال ۴: عبارت $x^6 - y^6$ را تجزیه کنید.

روش اول: می توئیم ابتدا با اتحاد چاغ و لاغر شروع کنیم و بعد اتحاد مزدوج رو بکار ببریم:

$$x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = \\ (x - y)(x + y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$$

روش دوم: می توئیم ابتدا با اتحاد مزدوج شروع کنیم و بعد اتحاد چاغ و لاغر رو استفاده کنیم:

$$x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) \\ = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

۲-دسته بندی: گاهی یه عبارت داده میشه که در نگاه اول شبیه هیچ اتحادی نیست، اما اگر جملات رو درست و مناسب **مرتب** کنیم، عبارت ها شبیه اتحادهایی میشن که می شناسیم. در ادامه اگر عبارت ها ، عبارت **مشترکی** داشته باشن ، **فاکتور** هم می گیریم تا عبارت تا حد امکان جمع و جور بشه!!!

این روش نیاز به کمی **تجربه** و **خلاقیت** داره که لازمه ش تمرین زیاده!!!!

در ادامه براتون چند تا **مثال مهم** حل می کنم که هر کدوم **ترفند** مخصوص خودش رو داره، این مثلا رو حسابی تحلیل کنید و روش تجزیه کردن شون رو به خاطر بسپارید!!!!

مثال ۵: $x^2 - 2(x) + 2(xy) + y^2 + 1$ را تجزیه کنید. (**دسته بندی - مربع**)

$$2x^2 - 2(x) + 2(xy) + y^2 + 1 = x^2 + x^2 - 2(x) + 2(xy) + y^2 + 1 =$$

$$(x^2 - 2(x) + 1) + (x^2 + 2(xy) + y^2) = (x - 1)^2 + (x + y)^2$$

مثال ۶: عبارت $x^3 - 4(x) + 3$ را تجزیه کنید. (**شکستن جملات - مزدوج - فاکتورگیری**)

$$x^3 - 4(x) + 3 = x^3 - x - 3(x) + 3 = x(x^2 - 1) - 3(x - 1) =$$

$$x(x - 1)(x + 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x(x + 1) - 3) =$$

$$= (x - 1)(x^2 + x - 3)$$

مثال ۷: عبارت $x^4 + x^2y^2 + y^4$ را تجزیه کنید. (**اضافه و کم کردن - مربع - مزدوج**)

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 =$$

$$(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 =$$

$$(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$$

اگر به **مثال ۷** برگردیم ، متوجه میشیم دو عبارتی که برای تجزیه $x^2 - y^2$ به دست آوردیم یکیه!!!!!!

۳- با استفاده از تقسیم:

قبل اینکه این روش رو براتون توضیح بدم ، لازمه یه چیزایی رو قبلش تعریف کنم تا روش سوم بدون ابهام باشه، یعنی اول باید اصطلاحاتی مثل **عامل** و **ریشه** رو بدونیم!!!

تعریف عامل: خب شما از قبل با شمارنده و مضرب آشنا هستید، مثلا می دونیم $6 = 2 \times 3$

سال های قبل می گفتیم عدد ۶ مضرب ۲ و ۳ هست و برعکس عدد ۲ یا ۳ شمارنده (مقسوم علیه) عدد ۶ است!!! خب همین کارو میخوایم برای عبارت های جبری هم تکرار کنیم (تعمیم دادن)، یعنی مثلا اگر داشته باشیم: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ، می تونیم بگیم $a^2 - b^2$ مضرب

$(a - b)$ یا $(a + b)$ هست و یا برعکس هر یک از این ها یعنی $(a - b)$ و $(a + b)$ شمارنده $a^2 - b^2$ هستند که دیگه نمیگیم شمارنده، به جاش میگیم:

$(a - b)$ یک **عامل** $a^2 - b^2$ است ، همچنین $(a + b)$ هم یک **عامل** $a^2 - b^2$ است.

خب این از تعریف عامل!!!! اما ریشه چیه؟؟؟ این ریشه ، ریشه رادیکال نیست ها ، فرق میکنه، الان برات میگم چیه؟؟؟

تعریف ریشه: ریشه یه عدده که یه عبارت رو صفر می کنه، مثل جواب معادله!!! مثلا عدد ۲ ریشه عبارت $x - 2 = 0$ هست!

خب با این مقدمه وقتشه که روش سوم تجزیه رو براتون بگم:

اگر تجزیه یک عبارت شامل **عامل** $x - a$ باشه ، عبارت موردنظر به ازای **ریشه** y این عامل یعنی $x = a$ صفر میشه! از این مطلب برای **تجزیه** عبارت های جبری استفاده می کنیم، برای این کار کافیه شما **گل پسر** مراحل زیر رو بری:

۱- اعداد ۲- تا ۳ رو در عبارت قرار میدیم ، بنیم کدوم عدد، عبارت رو **صفر** می کنه؟! فرض کنیم عددی که ریشه عبارت هست، برابر با a باشه!!!

۲- بعد اینکه عامل درجه یک به فرم $x - a$ رو پیدا کردی، دوراه داری که عبارت رو کامل تجزیه کنی:

الف) روش اول رو پایه نهم برات گفتن (تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای)، اینکه بیای عبارت اصلی رو بر $x - a$ تقسیم کنی که یکم طولانیه!!!

ب) اما راه ساده تر اینه که باروش هوزر که یک روش خاص و خیلی سریعه باقی راه رو بری،

فکرمی کنم تا اینجا منغزتون سوت کشیده که چی دارم براتون میگویم، مثال منیزم نگران نباشید فقط یکم صبر پیشه کنید تا براتون بگویم چی به چیه!!! 

مثال ۸: عبارت $x^3 - 4(x) + 3$ را تجزیه کنید. (حل مجدد مثال ۶)

۱- اول باید عددی که عبارت رو صفر کنه، پیدا کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow 0 - 0 + 3 = 3 \neq 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 - 4 + 3 = 0 = 0$$

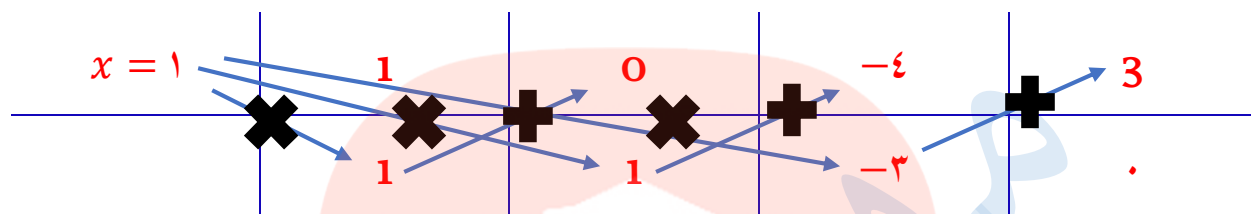
خب تا اینجا فهمیدیم که $x = 1$ عبارت رو صفر می کنه، پس یعنی $x^3 - 4(x) + 3$ بر $x - 1$ بخش پذیره.

۲- حالا دوراه داری:

الف) $x^3 - 4(x) + 3$ رو بر $x - 1$ تقسیم کن، دقیقا مثل پارسل (پایه نهم - فصل ۷ - تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای)

ب) روش هوزر که الان تقدیم حضورتون میشه:

این روش فقط وقتی جواب می‌دهد که عبارت برعکال درجه یکی به فرم $x - a$ تقسیم شده باشد، پس حواستون باشه هر جایی نمیشه!



خب حالا توضیح این جدول:

۱- سطر اول جدول ضرایب عبارت اصلی یعنی $x^3 - 4(x) + 3 = x^3 + 0x^2 - 4(x) + 3$ رو

می نویسیم!!!

۲- در اولین خونه سطر اول هم ریشه رو وارد می‌کنیم.

۳- در اولین خونه سطر دوم، ضریب اولین جمله عبارت اصلی هرچی باشه رو وارد می‌کنیم، در اینجا عدد ۱ رو می‌نویسیم.

۴- برای محاسبه بقیه عدد های سطر دوم، ریشه (یعنی همون عدد یک) رو در اولین عدد سطر دوم یعنی یک ضرب می‌کنیم و بعد

حاصلشو با سومین عدد سطر اول (۰) جمع می‌کنیم و حاصل رو (۱) در دومین خونه سطر دوم به عنوان دومین عدد سطر دوم می

نویسیم!!! مجدد ریشه (۱) رو در دومین عدد سطر دوم (۱) ضرب کرده و با چهارمین عدد سطر اول (۴-) جمع می‌کنیم و حاصل رو

(۳-) در سومین عدد سطر دوم می‌نویسیم. نهایتاً ریشه (۱) رو در سومین عدد سطر دوم (۳-) ضرب کرده و با پنجمین عدد سطر

اول (۳) جمع می‌کنیم و حاصل رو (۰) در چهارمین عدد سطر دوم می‌نویسیم.

۵- آخرین عدد سطر دوم، باقیمانده روش شخص می کند که در اینجا چون عبارت اصلی بر عامل بخش پذیره، حتماً عدد سطر دوم صفر بشه!!

۶- خب ضرایب سطر دوم ضرایب خارج قسمت تقسیم مونه! یعنی $x^2 + x - 3$!!!

پس در نهایت بعد تجزیه، عبارت به این صورت در میاد: $x^3 - 4(x) + 3 = (x - 1)(x^2 + x - 3)$

۴- روش های ضرایب نامعین: از این روش وقتی استفاده می کنیم که یکی از عوامل تجزیه (حتی با پارامتر) داده بشه!!! حالا هدف اینه که دومین عامل تجزیه رو پیدا کنیم! برای اینکه عامل بعدی رو پیدا کنیم، مراحل زیر رو طی می کنیم:

۱- عبارت رو به شکل حاصل ضرب دو عبارت می نویسیم که یکیش سوال داده و دیگری رو خودمون به صورت پارامتری (ضرایب مجهول) می نویسیم.

۲- حالا طرفین عبارت رو ساده می کنیم (معمولاً با عمل ضرب) و دو طرف رو متحد قرار میدیم!

متحد قرار دادن: یعنی اینکه ضرایب جمله های هم درجه رو مساوی قرار میدیم.

۳- از متحد قرار دادن دو طرف، به دستگاه معادلات به دست می آید که با عمل این دستگاه و تعیین پارامترها، عامل دومی هم مشخص میشه!!!

مثال ۹: می دانید $x^2 - 1$ به دو عامل تجزیه می شود (اتحاد مزدوج)، یکی از این عامل ها داده شده و برابر با $x - 1$ است، عامل دیگر را بیابید.

۱- اگر $x^2 - 1$ بر $x - 1$ تقسیم بشه، خارج قسمت حداکثر از درجه ۱ هست، پس می توئیم فرض کنیم عامل بعدی به فرم

$ax + b$ هست (نحوه استدلال کردنم رودقت کن) و این یعنی اینکه: $x^2 - 1 = (x - 1)(ax + b)$

۲- طرف دوم رو ساده ترمی کنیم!!! (ضرب کردن دو عبارت)

$$x^2 - 1 = ax^2 + bx - ax - b = ax^2 + (b - a)x - b$$

۳- حالا باید ضرایب جملات هم درجه رو متحد قرار بدیم، یعنی:

$$1 = a \text{ و } 0 = b - a \text{ و } -1 = -b$$

که بر راحتی نتیجه میشه $b = 1$ و $a = 1$!!! پس عامل دومی برابر با $x + 1 = x + 1$ هست که از قبل هم

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1) \quad \text{میدونستیم:}$$

چهار روش برای تجزیه معرفی کردیم، سوال اینه که چه وقت و کجا با روش اول یا روش دوم یا... سوالات رو حل کنیم:

۱- با استفاده از اتحادها: زمانی که عبارت داده شده شبیه اتحاد و اتحادشم بلدی!!!

۲- دسته بندی: وقتی که عبارت داده شده شبیه هیچ اتحاد معروفی نیست ولی بایکیم دستکاری کردن می تونیم دو یا چند اتحاد مهم رو

داخل عبارت ایجاد کنیم. گروه آموزشی عصر

۳- با استفاده از تقسیم: هر وقت که یه عامل رو راحت حدس بزنی... www.madrasa.com

۴- ضرایب مجهول: هر زمان که عاملی داده بشه (درجه ۲).

گویا کردن مخرج کسرها:

۱- مخرج شامل رادیکالی با فرجه ۲ باشد (یادآوری)

$$\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

۲- مخرج شامل رادیکالی با فرجه ۳ باشد (یادآوری)

$$\frac{6}{\sqrt[3]{4}} = \frac{6}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{16}} = \frac{6\sqrt[3]{16}}{4}$$

۳- مخرج شامل رادیکالی به فرم $(a \pm \sqrt{b})$ یا $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$ باشد، صورت و مخرج کسر رو در مزدوج مخرج یعنی به ترتیب در

$(a \mp \sqrt{b})$ یا $(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{8}{3\sqrt{2} + 4} = \frac{8}{3\sqrt{2} + 4} \times \frac{3\sqrt{2} - 4}{3\sqrt{2} - 4} = \frac{8(3\sqrt{2} - 4)}{18 - 16} = \frac{8(3\sqrt{2} - 4)}{2}$$

۴- مخرج شامل رادیکالی به فرم $(a \pm \sqrt[3]{b})$ یا $(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})$ باشد، صورت و مخرج کسر رو در «چاق» مخرج یعنی به ترتیب در

$(a^2 \mp a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})$ یا $(\sqrt[3]{a^2} \mp a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{1 - \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{2}} \times \frac{1^2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}{1^2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}} = \frac{1^2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}{1 - 2} = \frac{1^2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{-1}$$

۵- مخرج شامل رادیکالی به فرم $(\sqrt{a^2 \pm a\sqrt{b}} + \sqrt{b^2})$ یا $(\sqrt{a^2} \pm a\sqrt{b} + \sqrt{b^2})$ باشد، صورت و مخرج کسر رو در «لانج» مخرج یعنی به ترتیب در $(a \mp \sqrt{b})$ یا $(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{4}} = \frac{2}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{4}} \times \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{1 - 2} = -2(1 - \sqrt{2})$$

در بعضی از کتاب‌های کمک درسی اتحاد مکعب سه جمله‌ای، اتحاد اویلر، اتحاد لاکرانژ و یا بابط ختام پاسکال (که در همین کتاب درسی به عنوان خواندنی ذکر شده) و... مطرح شده که فعلاً نیازی نیست بدونیم یا هم کلاً در گنگور مطرح نمیشه، پس چه لزومی داره بگیم!!
در پایان مهم‌ترین کاربردهای این درس روبراتون می‌گیم تا کامل امتوجه اهمیت این بحث بشید و خوب خوب برای این درس وقت بزارید:

۱- حل معادله درجه ۲ با استفاده از اتحاد (پایه دهم - فصل ۴)

۲- حل معادله گویا با استفاده از اتحاد (پایه یازدهم)

۳- رفع ابهام در محاسبه حدای کسری (پایه یازدهم)

۴- محاسبه مشتق (پایه دوازدهم)



با آرزوی بهترین‌ها برای تک‌تک شاگردان

موفق و شاداب باشید