

ریاضی دهم

مدرس : هانی فاتمی

مای درس

گروه آموزشی عصر

گروه آموزشی عصر

www.may-dars.ir

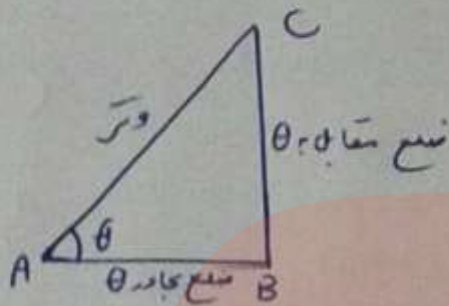
ASR_Group@outlook.com

[@ASRschool2](https://www.instagram.com/ASRschool2)



مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد.

در یک مثلث قائم الزامی، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت راست‌های مثلثاتی نامیده می‌شوند.



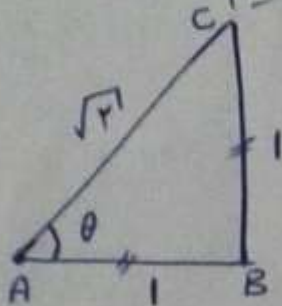
$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{مقابل } \theta}{\text{مجاور } \theta} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{مجاور } \theta}{\text{مقابل } \theta} = \frac{AB}{BC}$$

نسبت‌های زاویه ۴۵°: مثلث قائم الزامی متساوی الساقین به ضلع ۱ از نظر رسم



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

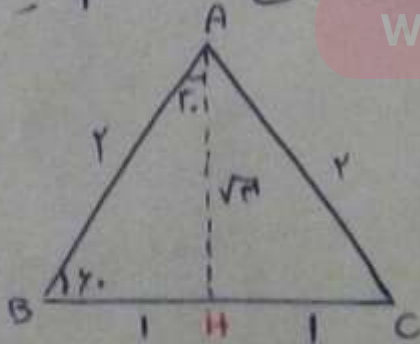
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

به دو ضلع ۱ و ۱ و طول وتر برابر $\sqrt{2}$ است.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۳۰°: مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۲ رسم کنیم



www.my-dars.ir

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

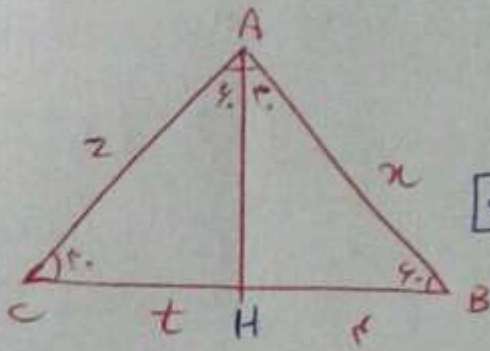
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$AH^2 = 2^2 - 1^2 \Rightarrow AH^2 = 3 \Rightarrow AH = \sqrt{3}$$

مثال: با توجه به شکل زیر مقادیر x, z, t را بیابید



$$\cos 60 = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{x} \Rightarrow \boxed{x=8}$$

با رسم مثلث ABH منطبق بر دایره واحد به اندازه 30 درجه میسر می آید

$$\cos 30 = \frac{AH}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{8} \Rightarrow \boxed{AH = 4\sqrt{3}}$$

$$\Delta ACH: \sin 40 = \frac{AH}{z} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{z} \Rightarrow \boxed{z = 8\sqrt{3}}$$

$$\Delta ACH: \cos 40 = \frac{t}{z} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{t}{8\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{t = 12}$$

دایره مثلثاتی:

دایره ای به شعاع واحد جهت مثبت آن خلاف عقربه های ساعت است.

دایره ی مثلثاتی به شعاع واحد و مرکز (0,0) منطبق بر دستگاه مختصات رسم می کنیم

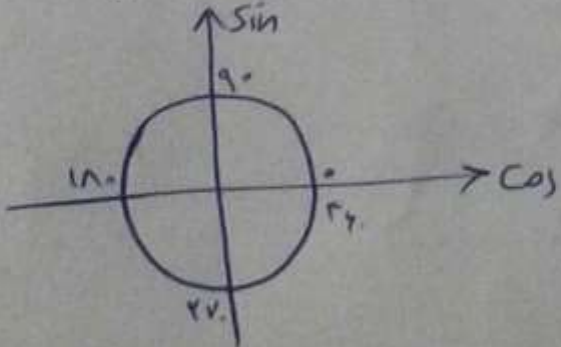
چون دستگاه مختصات چهار ناحیه دارد پس دایره مثلثاتی را از 4 ربع جدا می کنند

در دایره ی مثلثاتی منطبق بر دستگاه مختصات محور x همان کوسین و

محور y همان سینوس نامیده می شود

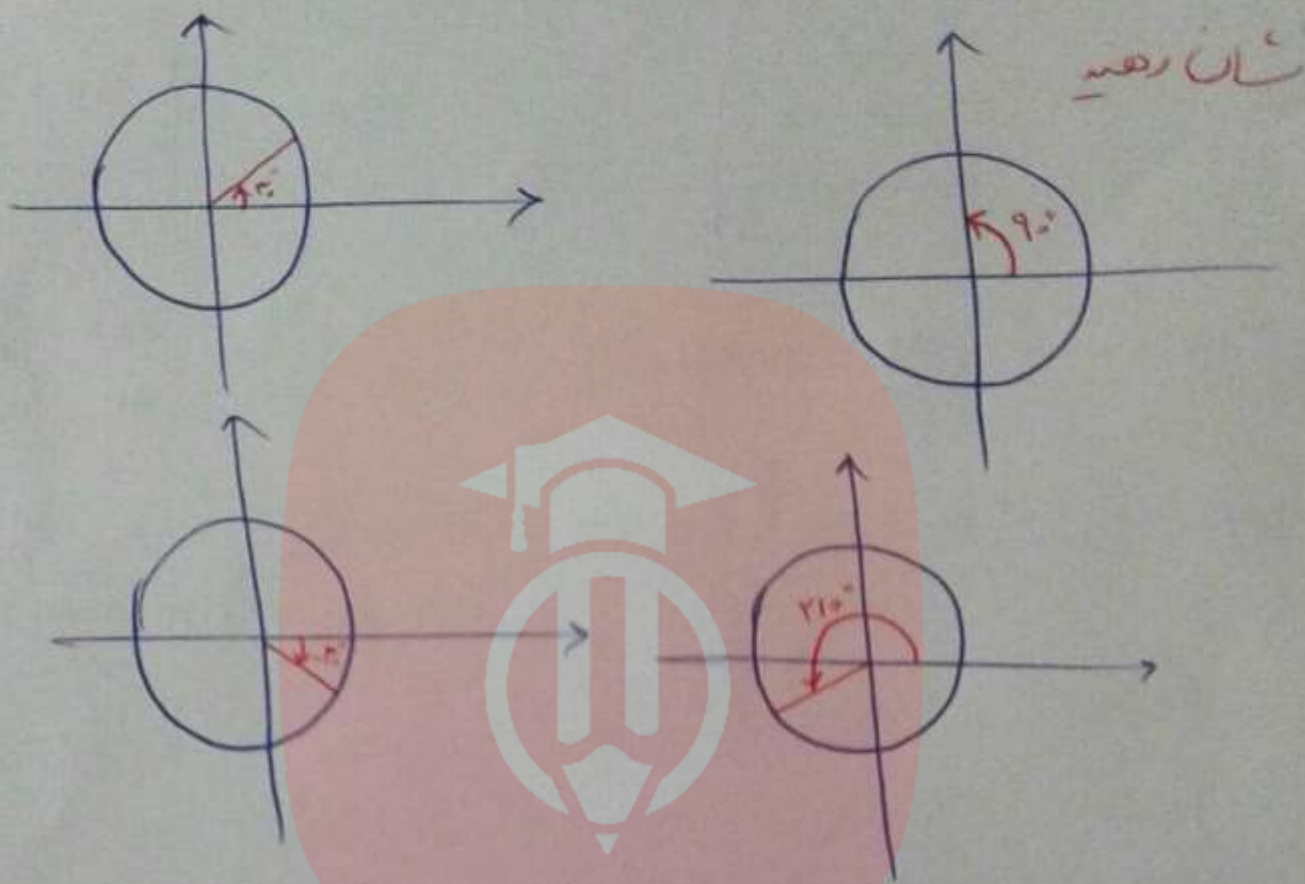
در هر ربع دایره ی مثلثاتی علامت مثبت یا منفی است که با استفاده از α و β تعیین می شود

طول دایره آن ناحیه شعاعی که شود در این است آوردن علامت \tan و \cot از جدول زیر



$$\cot = \frac{\cos}{\sin} \text{ و } \tan = \frac{\sin}{\cos}$$

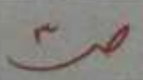
مثال: تعیین از زاویه‌های 30° و 90° و (-30°) و 210° را در دایره مثلثاتی



* با توجه به نسبت‌های زوایای $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ به مثلثات اوجیم و با توجه به دایره مثلثاتی

جدول زیر را خلاصه‌نویس داشته باشید

زاویه / مثلثاتی	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تغییر شده	0	تغییر شده	0
cot	تغییر شده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تغییر شده	0	تغییر شده



نکته: با توجه به نسبت های مثلثات زاویه ۳۰ و ۶۰ متوجه خواهیم شد که:

زاویه که متمم یکدیگرند (مجموع آنها ۹۰ است) سینوس یکی برابر کسینوس دیگری است و همبسطند.

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{tan یکی cot دیگری است یعنی}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

مثال: حاصل عبارت رو به رو را بدست آورید

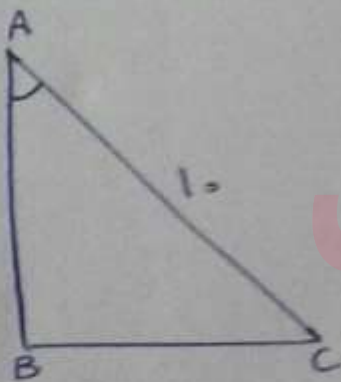
$$\cos 30^\circ + \sin 30^\circ - \sin 60^\circ + \tan 60^\circ =$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ \quad \text{بنام نکته فوق}$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos 30^\circ} + \sin 30^\circ - \cancel{\sin 60^\circ} + \tan 60^\circ = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

مثال: حاصل و ترکیب مثلث قائم الزامی و اساسی مترسک و سینوس یکی از زاویه های آن

$\frac{3}{5}$ می باشد. محیط این مثلث چند سانتی متر است؟



$$\sin A = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{BC = 6}$$

$$\text{پیتاگورس: } 10^2 = 6^2 + AB^2 \Rightarrow \boxed{AB = 8}$$

www.my-dars.ir

$$P = 10 + 6 + 8 = 24 \text{ cm}$$

نتیجه: حاصل عبارت رو به رو کدام است؟

$$(\tan 10^\circ \times \tan 80^\circ) - \tan 10^\circ + \cot 80^\circ = ?$$

$$\tan 10^\circ = \cot 80^\circ \quad \text{بنام نکته فوق}$$

$$(\cot 80^\circ \times \tan 80^\circ) - \cot 80^\circ + \cot 80^\circ = \frac{\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} \times \frac{\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} = 1$$

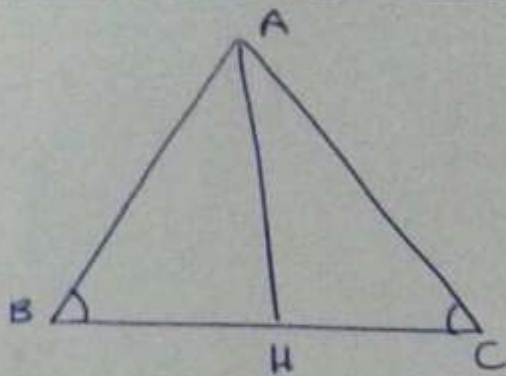
$$\tan 90^\circ \quad (1)$$

$$\tan 10^\circ \quad (2)$$

$$\cot 80^\circ \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

مساحت مثلث:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

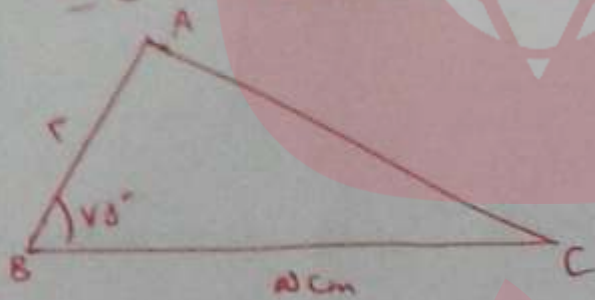
چون $\begin{cases} \sin B = \frac{AH}{AB} \\ AH = AB \sin B \end{cases}$ پس می توان نوشت:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (AB \times \sin \hat{B}) \times BC$$

و چون $\begin{cases} \sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \\ AH = AC \sin \hat{C} \end{cases}$ پس می توان نوشت:

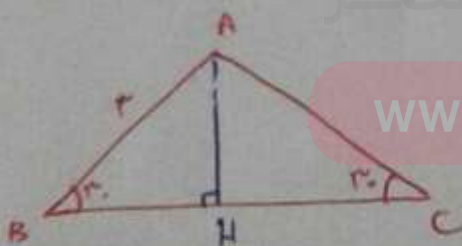
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (AC \times \sin \hat{C}) \times BC$$

مثال: فرض کنید $\sin 75^\circ = 0.96$ ، مساحت مثلث ABC در شکل زیر را بدست آورید.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} (AB \times \sin 75^\circ) \times BC = \frac{1}{2} (2 \times 0.96) \times 5 = 4.8$$

مثال: مساحت مثلث در زیر را بدست آورید.



www.my-dars.ir

$$B = C = 30^\circ \Rightarrow AB = AC = 2$$

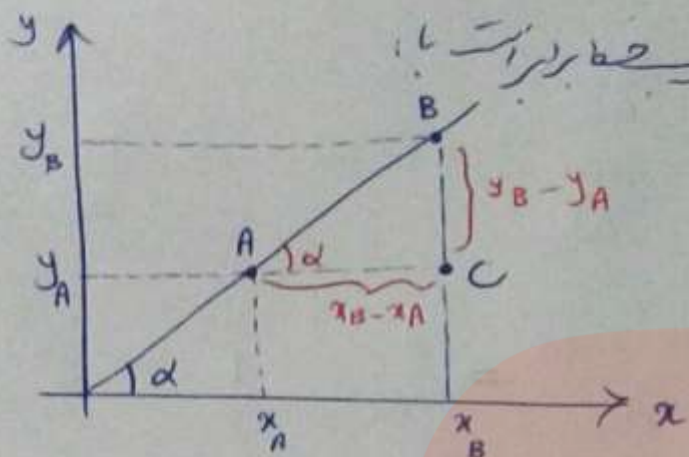
چون در مثلث قائم الزامی (در مثلث قائم الزامی) 30° داریم:

$$\cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{2} \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{AH = 1}$$

$$BC = 2BH \Rightarrow \boxed{BC = 2\sqrt{3}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} (1 \times 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

شیب خط: $\tan \alpha$



$$m = \frac{\text{تفاضل } y}{\text{تفاضل } x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m = \tan \alpha$$

* شیب خط که محور افقی را قطع می کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی.

* اگر زاویه برابر باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می سازد آنگاه $m = \tan \alpha$

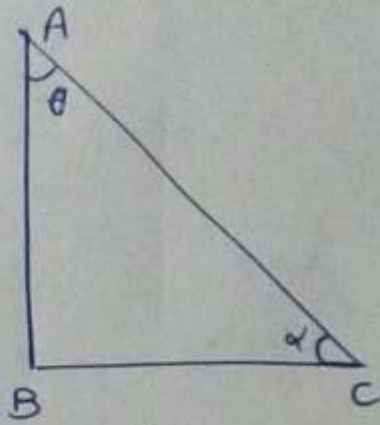
مثال: معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x زاویه 30° سازد و از نقطه

$$m = \tan \alpha \Rightarrow m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$A(1|2)$ بگذرد

$$\boxed{\text{معادله خط } y - y_0 = m(x - x_0)} \Rightarrow y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} + 2$$



$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{BC}{AC} \\ \cos \theta = \frac{AB}{AC} \end{cases} \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$= \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1}$$

مثال: اگر زاویه α در یک مثلث قائم‌الزاویه باشد و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ باشد، آنگاه سایر ضرایب‌های

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow[\cos \theta]{\sin \theta} \boxed{\cos \alpha = -\frac{3}{5}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$$

تذکره: تساوی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ در تمام مثلثات قائم‌الزاویه که کم از این هر دو همواره برقرار است.

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

مثال: در یک مثلث قائم‌الزاویه ضرایب زیر را تعیین کنید.

$$\text{ضرایب} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را تعیین کنید

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \text{طرفین مساوی}$$

$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x - 1 \qquad \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x - 1$$

خواص فرمول‌های مهم مثلثات :

1) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

2) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

3) $\tan \alpha \times \cot \alpha = 1$

4) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

5) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

۱- اگر در مثلث قائم الزامی ABC، $(C=90^\circ)$ ، $BC=1$ و $\tan B = z$ باشد
 $\cos A$ را بر حسب z بیست کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \quad (1) \quad \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \quad (2) \quad \sqrt{z^2+1} \quad (3) \quad \frac{z}{z^2+1} \quad (4)$$

۲- روبرو مثلث قائم الزامی اس $\sqrt{3}$ ، ۲ هستند. اگر به کوچکترین زاویه داخلی این
 مثلث باشد $\sin \alpha$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{3}{5}} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2) \quad \sqrt{\frac{2}{5}} \quad (3) \quad \sqrt{\frac{3}{11}} \quad (4)$$

۳- اگر $1 - \cos \theta = \frac{5}{6}$ و $\tan \theta < 0$ ، انتهای همان θ در کدام ربع مثلثی است؟

$$(1) \text{ اول} \quad (2) \text{ دوم} \quad (3) \text{ سوم} \quad (4) \text{ چهارم}$$

۴- ساده شده عبارت $(1 - \cos \theta)^2 - (1 + \frac{1}{\cos \theta})(1 - \sin^2 \theta)$ کدام است؟

$$\sin^2 \theta \quad (1) \quad \cos^2 \theta \quad (2) \quad -\cos^2 \theta \quad (3) \quad 2 \cos \theta \quad (4)$$

۵- حاصل $\cot^2 \theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta}$ کدام است؟

$$\sin^2 \theta \quad (1) \quad \cos^2 \theta \quad (2) \quad \tan^2 \theta \quad (3) \quad \cot^2 \theta \quad (4)$$

۶- اگر $\tan x = \sqrt{3}$ ، معادله $\frac{2 \sin^2 x - \cos^2 x}{3 \sin x \cos x} = 5$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \quad \sqrt{3} \quad (3) \quad \sqrt{2} \quad (4)$$

۷- حاصل عبارت $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x}{2}$ کدام است؟

۸- ساده شده عبارت $\frac{(\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1)}{\cos x}$ کدام است؟

۱) $\sin x$ ۲) $\cos x$ ۳) $2 \sin x$ ۴) $2 \cos x$

۹- اگر $\frac{5}{3} = 1 - \cos \theta$ ، $\tan \theta \cos \theta > 0$ باشد ، انهای بین θ در کدام منطقی است؟

۱) دوم ۲) اول ۳) چهارم ۴) سوم

۱۰- مقدار عبارت $A = \frac{(\tan 45^\circ + \tan 30^\circ - \sin^2 45^\circ)}{(\tan^2 15^\circ \times \cot^2 15^\circ)}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $1 + \sqrt{3}$ ۳) $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ ۴) نامعلوم

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

با زوی بهترین ها

سید کاظمی
۲۸، ۵، ۹

گروه آموزشی عصر

ASR_Group@outlook.com

@ASRschoo2