فصل اول: عدد نویسی و الگوها

عدد نویسی

- برای خواندن اعداد ابتدا باید عدد را سه رقم سه رقم از سمت راست جدا کرد و سپس با توجه به هر طبقه آن عدد را خواند.
- در ریاضی برای ساختن اعداد از ۱۰ رقم استفاده می کنیم. تعدادی از این ارقام زوج و تعدادی فرد هستند.

زوج: ۰ ۲ ۴ ۶ ۸ فرد: ۱ ۳ ۵ ۷ ۹

- در جدول ارزش مکانی هر مرتبه ۱۰ برابر مرتبه ی قبل از خود است. یعنی دهگان ۱۰ برابر یکان است.

			طبقه هزار			طبقه میلیون			طبقه میلیارد		
یکان	دهگان	صدگان	یکان هزار	دهگان هزار	صدگان هزار	یکان میلیون	دهگان میلیون	صدگان میلیون	یکان میلیارد	دهگان میلیارد	صدگان میلیارد

- در جدول ارزش مکانی، همیشه رقم سمت چپ عدد، بیشترین ارزش مکانی و رقم سمت راست عدد، کمترین ارزش مکانی را دارد.

یادآوری عملیات تقسیم

قسمت های مختلف یک تقسیم:

مقسوم | مقسوم علیه
خارج قسمت
باقی مانده

امتحان تقسیم: باقیمانده> مقسوم علیه باقی مانده + (خارج قسمت ×مقسوم علیه) = مقسوم

- هرگاه در یک تقسیم، باقیمانده صفر شود، میگوییم مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است.
- هرگاه عددی بر ۱۰ بخش پذیر نباشد باقی مانده ی تقسیم می تواند از ۱ تا ۹ باشد.
- اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه را در یک عدد ضرب کنیم، خارج قسمت تغییری نمی کند ولی باقی مانده، در همان عدد ضرب می شود.
- اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه را بر عددی غیر از صفر تقسیم کنیم خارج قسمت تغییری نمی کند اما باقی مانده، برهمان عدد تقسیم می شود.
- زمانیکه در ادامه تقسیم از مقسوم، یک عدد را پایین می آوریم و بر مقسوم علیه قابل قسمت نمی باشد، در جلوی خارج قسمت عدد صفر می گذاریم و سپس تقسیم را ادامه می دهیم.

واحد زمان:

واحد زمان ثانیه است. هر ساعت۶۰ دقیقه و هر دقیقه ۶۰ ثانیه است. علامت دقیقه « ' » و علامت ثانیه « " » است.

قرن/ دهه/ سال/ فصل/ ماه/ هفته/ شبانه روز/ ساعت/ دقیقه/ ثانیه/ دهم ثانیه/ صدم ثانیه

- هر قرن ۱۰ دهه دارد و هر دهه دارای ۱۰ سال می باشد. در نتیجه هر قرن ۱۰۰سال دارد.
- هرسال ۴ فصل دارد و هر فصل ۳ ماه دارد. در نتیجه هر سال ۱۲ ماه دارد.
- هر هفته هفت روز دارد.
- هر روز ۲۴ ساعت دارد و هر ساعت ۶۰دقیقه و هر دقیقه ۶۰ ثانیه دارد. در نتیجه هر روز دارای ۱۴۴۰دقیقه و ۸۶۴۰۰ثانیه است.
- فصول سال عبارتند از: بهار، تابستان، پاییز ، زمستان

- ماه های بهار عبارتند از: فروردین، اردیبهشت، خرداد
- ماه های تابستان عبارتند از: تیر، مرداد، شهریور
- ماه های پاییز عبارتند از: مهر، آبان ، آذر
- ماه های زمستان عبارتند از: دی، بهمن، اسفند
- ۶ ماه اول سال یعنی ماه های فصول بهار و تابستان هر کدام دارای ۳۱ روز هستند.
- ۵ ماه دوم سال یعنی ماه های فصول پاییز و زمستان بجز اسفند هر کدام دارای ۳۰ روز هستند.
- اسفند ۲۹ روزه است اما هر چهار سال یکبار ۳۰ روزه می شود.
- با توجه به مطالب بالا هر سال ۳۶۵ روز است البته هرچهارسال یکبار۳۶۶روزه می شود که به این سال، سال کبیسه می گویند.
- سرعت عقربه ثانیه شمار، ۶۰ برابر سرعت عقربه ی دقیقه شمار و سرعت عقربه ی دقیقه شمار ۱۲برابر سرعت عقربه ی ساعت شمار می باشد.
- وقتی عقربه ساعت شمار یک دور می چرخد، عقربه ی دقیقه شمار ۱۲ دور بر روی صفحه ساعت چرخیده است.
- وقتی عقربه ساعت شمار دو دور می چرخد، عقربه ی دقیقه شمار ۲۴ دور بر روی صفحه ساعت چرخیده است. و یک شبانه روز طی می شود.
- ساعتی مانند ۱۴:۰۰ را می توان ساعت ۲ بعدظهر هم گفت، برای این کار، کافی است از ساعت هایی که بیشتر از ۱۲ هستند، ۱۲ ساعت کم کنیم.
- برای مشخص کردن تصویر ساعت در آینه، آن را از ۱۲ کم می کنیم و اگر ساعت بیش تر از ۱۲ بود آن را از ۲۴ کم می کنیم.

ساعت طلوع آفتاب – ساعت غروب آفتاب = **طول روز**

ساعت طلوع آفتاب + طول روز = **ساعت غروب آفتاب**		طول روز - ساعت غروب آفتاب = **ساعت طلوع آفتاب**

اگر یک ساعت در هر شبانه روز X دقیقه جلو یا عقب کار کند برای محاسبه این که پس از چند شبانه روز وقت درست را نشان می دهد، از این فرمول استفاده می کنیم.		دقیقه جلویاعقب مانده ÷ (۱۲×۶۰) = **زمان درست**

نکته: در فرمول بالا عدد ۱۲ بیانگر تعداد ساعاتی است که عقربه ی ساعت شمار در یک دور کامل طی میکند. و عدد ۶۰ بیانگر این است که هر ساعت ۶۰ دقیقه دارد.

مثال: ساعتی در هر شبانه روز ۵ دقیقه جلو می افتد. این ساعت پس از چند شبانه روز وقت درست را نشان می دهد؟

(۱۲ × ۶۰) ÷ ۵ = ۱۴۴

واحد جرم

جرم نیز دارای واحدهای متفاوتی است ؛ گرم و کیلوگرم رایج ترین واحدهای اندازه گیری اند. واحد جرم ، کیلوگرم است.
وزن در حقیقت ۱۰برابر یا بعبارتی ۹/۸ برابر جرم است و عبارت است از نیروی وارد بر واحد جرم ماده از طرف زمین. واحد اندازه گیری وزن، نیوتن است.

- هر تن برابر ۱،۰۰۰ کیلوگرم است		هرکیلوگرم برابر با ۱،۰۰۰گرم است.		هر تن برابر ۱،۰۰۰،۰۰۰ گرم است.

واحد طول

واحد طول متر است.

۱ کیلومتر = ۱۰۰۰ متر= ۱۰۰۰۰ دسی متر = ۱۰۰۰۰۰ سانتی متر = ۱۰۰۰۰۰۰ میلی متر

۱متر = ۱۰دسی متر = ۱۰۰سانتی متر = ۱۰۰۰ میلی متر

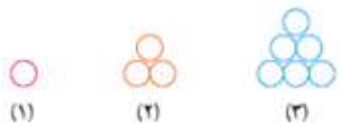
۱دسی متر = ۱۰ سانتی متر = ۱۰۰ میلی متر ۱سانتی متر = ۱۰ میلی متر

کیلومتر هکتومتر دکامتر متر دسی متر سانتی متر میلی متر میکرمتر نانومتر پیکومتر

الگویابی

به عددهای ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۱، ۲۸ و ...... **عدد های مثلثی** می گویند.

در شکل زیر برای اینکه تعداد دایره های هر مرحله را بدست آوریم،



۱- می توانیم تعداد دایره های مرحله ی قبلی را با شماره ی مرحله ی جدید جمع کنیم.

برای مثال برای بدست آوردن دایره های مرحله ی چهارم باید تعداد دایره های مرحله ی سوم را با چهار جمع کنیم: ۱۰ = ۴+۶

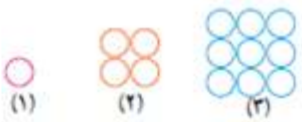
۲- می توانیم به روش زیر نیزحساب کنیم. تعداد شکل هایی که در قاعده هر مرحله وجود دارد برابر است با شماره همان مرحله. برای مثال در مرحله چهارم در قاعده ۴ شکل وجود دارد و به هم ترتیب شکل ها را حساب می کنیم. در نتیجه تعداد شکل های مرحله ی ۴ برابر است با: ۱۰ = ۱+۲+۳+۴

۳- در الگوی مثلثی برای بدست آوردن تعداد شکل های یک مرحله می توان از فرمول مجموع اعداد صحیح متوالی نیز کمک گرفت.

۲÷ شماره شکل × (۱ + شماره شکل) = الگوی عددهای مثلثی

به عددهای ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶ و ..... **عددهای مربعی** می گویند.

در شکل زیر برای اینکه تعداد دایره های هر مرحله را بدست آوریم



۱. می توانیم تعداد دایره های مرحله ی قبلی را با دو برابرشماره ی مرحله ی قبلی +۱ جمع کنیم. برای مثال برای بدست آوردن دایره های مرحله ی چهارم باید تعداد دایره های مرحله ی سوم را با عدد۷((۲×۳)+۱) جمع کنیم: ۱۶ = ۷+۹

۲. باید عدد مربوط به مرحله ی مورد نظر را در خودش ضرب کنیم.

از ترکیب هر دو الگوی مثلثی، یک الگوی مربعی درست می شود.

مطالب تکمیلی

قوانین تقریب

زمانیکه می گوید عدد ۱۶۹،۸۳۵،۲۷۴ را با تقریب ۱۰۰،۰۰۰ بنویسید به ترتیب زیر عمل می کنیم:

- مرتبه ۱۰۰،۰۰۰ را پیدا می کنیم. (رقم ۸)
- حال تمام رقم های قبل از ۸ و خود ۸ را نوشته و مابقی را صفر می گذاریم. ۱۶۹،۸۰۰،۰۰

زمانیکه می گوید عدد ۱۶۹،۸۳۵ به کدام عدد نزدیکتر است به ترتیب زیر عمل می کنیم:

- نگاه می کنیم که عدد۱۶۹،۸۳۵ بین کدام دو عدد قرار دارد. (بین ۱۶۰ هزار و ۱۷۰ هزار)

- حال عدد وسط بین دو عدد بالایی را مشخص می کنیم. (۱۶۵ هزار)
- آنگاه می بینیم که عدد مدنظر از عدد میانه یا وسط کوچک تر است یا بزرگتر .(بزرگتر از عدد وسط است).
- اگر از عدد وسط بزرگتر بود، می گوییم به عدد بعدی نزدیکتر است. و بالعکس.(پس به عدد ۱۷۰،۰۰۰ نزدیک تر است)
- اگر عدد مدنظر روی میانه بود، تقریب رو به بالا انتخاب می شود.
- در ضرب وقتی یکی از عامل ها روی میانه باشد، اگر عدد بعدی رو به بالا تقریب بخورد؛ میانه را رو به پایین تقریب می زنیم و بالعکس.
- درضرب وقتی هر دو عامل روی میانه باشد، عدد بزرگ را رو پایین و عدد کوچک را رو به بالا تقریب می زنیم.

بخش پذیری

اگر در یک تقسیم، باقی مانده صفر شود، می گوییم، مقسوم بر مقسوم علیه بخش پذیر است. مثلا در تقسیم ۴۰ بر ۵ چون باقی مانده صفر است. پس ۴۰ بر ۵ بخش پذیر است.

بخش پذیری بر ۲: اگر یکان یک عدد، ارقام صفر، ۲، ۴، ۶، ۸ باشد، آن عدد بر ۲ بخش پذیر است.

بخش پذیری بر۳: اگر جمع ارقام عددی بر ۳ بخش پذیر باشد، آن عدد نیز بر ۳ بخش پذیر است.

بخش پذیری بر۴: عددی بر۴ بخش پذیر است که دو عدد سمت راست آن بر ۴ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر۵: عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد.

بخش پذیری بر۶: اعدادی بر۶ بخش پذیر هستند که هم بر۲ و هم بر۳ بخش پذیر باشند.

بخش پذیری بر۹: اعدادی بر۹ بخش پذیر است که جمع ارقام آن بر ۹ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری بر۱۰: اعدادی که رقم یکان آنها صفر باشد بر۱۰ بخش پذیر هستند.

بخش پذیری بر۱۲: اعدادی بر۱۲ بخش پذیر هستند که هم بر۳ و هم بر۴ بخش پذیر باشند.

بخش پذیری بر۱۵: اعدادی بر۱۵ بخش پذیر هستند که هم بر۳ و هم بر۵ بخش پذیر باشند.

ااگر عددی بر دو عدد بخش پذیر باشد، بر حاصلضرب آن دو عدد هم بخش پذیر است، به شرطی که آن دو عدد مقسوم علیه مشترکی نداشته باشند.

تعداد اعداد

در مجموعه اعداد طبیعی (از یک شروع می‌شود):

تعداد اعداد یک رقمی۹ تا

اعداد دو رقمی ۹۰تا

تعداد اعداد سه رقمی ۹۰۰تا

تعداد اعداد چهاررقمی ۹۰۰۰ تا

و...

تعداد یک رقم در یک مجموعه‌ی اعداد متوالی

۱. از عدد۱ تا ۹۹ از همه‌ی رقم‌ها ۲۰ تا داریم به جز رقم(صفر)،که از آن ۹ تا داریم.
۲. از عدد ۱۰۰تا ۱۹۹ از همه‌ی رقم‌ها ۲۰تا داریم به جز رقم(یک)،که از آن ۱۲۰ تا داریم.

۳. از عدد ۲۰۰تا ۲۹۹ از همه‌ی رقم‌ها ۲۰تا داریم به جز رقم(دو)،که از آن ۱۲۰ تا داریم.

تعداد ارقام در یک مجموعه اعداد متوالی

- هر گاه بخواهیم تعداد ارقام از یک تا یک عدد دو رقمی را بدست آوریم همه ی عدد ها را دورقمی فرض کرده، یعنی در ۲ضرب می کنیم سپس حاصل را منهای ۹ می کنیم. (عدد ۹ برای اعداد۱تا۹ است که یک رقمی هستند. و چون همه را دو رقمی در نظر گرفته ایم پس ۹ رقم کمتر از محاسبه ی ما رقم وجود دارد.)
- هر گاه بخواهیم تعداد ارقام از یک تا یک عدد سه رقمی را بدست آوریم همه ی عدد ها را سه رقمی فرض کرده، یعنی در ۳ضرب می کنیم سپس حاصل را منهای ۱۰۸ می کنیم.(همه ی ارقام را ۳ رقمی در نظر گرفتیم در حالیکه ۱تا ۹ یک رقمی هستند و ۱۰ تا۹۹ دورقمی در نتیجه ۹×۲ = ۱۸ و ۹۰×۱=۹۰ در نتیجه ۹۰+۱۸ = ۱۰۸)
- هر گاه بخواهیم تعداد ارقام از یک تا یک عدد چهار رقمی را بدست آوریم همه ی عدد ها را چهار رقمی فرض کرده، یعنی در ۴ ضرب می کنیم سپس حاصل را منهای ۱۱۰۷ می کنیم. .(همه ی ارقام را ۴ رقمی در نظر گرفتیم در حالیکه ۱تا ۹ یک رقمی هستند و ۱۰ تا۹۹ دورقمی و ۱۰۰ تا۹۹۹سه رقمی در نتیجه ۹×۳ = ۲۷ و ۹۰×۲=۱۸۰ و ۹۰۰×۱= ۹۰۰ در نتیجه ۹۰۰+۱۸۰+۲۷ = ۱۱۰۷)
- اگر تعداد ارقام به کار رفته بین۱۱ تا ۱۸۹ باشد از عدد یک تا یک عدد دو رقمی را پشت سر هم نوشته ایم. (۹ تا یک رقمی و ۹۰ تا دو رقمی پس ۹۰×۲=۱۸۰ و ۱۸۰+۹=۱۸۹ و حداقل ۹تا یک رقمی و ۱ دو رقمی پس ۱×۲=۲ و ۲+۹= ۱۱)
- اگر تعداد ارقام به کار رفته از۱۹۲تا ۲۸۸۹ رقم باشد از عدد یک تا یک عدد سه رقمی را پشت سر هم نوشته ایم. (حداکثر ۹ تا یک رقمی و ۹۰ تا دو رقمی و ۹۰۰ تا سه رقمی پس ۹۰×۲=۱۸۰ ، ۹۰۰×۳ = ۲۷۰۰ و۲۷۰۰+۱۸۰+۹=۲۸۹۹ و حداقل ۹تا یک رقمی و ۹۰ تا دو رقمی و ۱سه رقمی پس ۹۰×۲= ۱۸۰، ۱×۳=۳ و ۳+۱۸۰+۹= ۱۹۲)

• اگر اعداد ۱ تا ۷۰را پشت سر هم، بدون خط فاصله، از چپ به راست بنویسم یک عدد چند رقمی، نوشته ایم؟

۱۴۰-۹ = ۱۳۱ ۷۰× ۲ =۱۴۰

فرمول مربوط به تعداد ارقام لازم برای شماره گذاری صفحات کتاب

(۱ + تعداد صفحات) × ۱ – ۱ ← برای تعداد صفحات یک رقمی

(۱ + تعداد صفحات) × ۲ – ۱۱ ← برای تعداد صفحات دو رقمی

(۱ + تعداد صفحات) × ۳ – ۱۱۱ ← برای تعداد صفحات سه رقمی

تعیین تعداد عددهای صحیح یک مجموعه‌ی اعداد متوالی

• اگر تعداداعداد،از عدد اولی تا عدد آخری مورد نظر باشد از فرمول زیر،استفاده می‌شود.

تعداد اعداد = (عدد آخری – عدد اولی) + ۱

مثال: از عدد۲۷ تا عدد ۱۰۲۷ چند عدد صحیح (عددی که کسری و اعشاری نباشد) وجود دارد؟

۱۰۰۱ = ۱+(۲۷ – ۱۰۲۷)

• اگر تعداد اعداد،بین دو عدد اولی و آخری مورد نظر باشد از فرمول زیر،استفاده می‌شود.

تعداد اعداد = (عدد آخری – عدد اولی) – ۱

- اگر تعداد اعداد زوج و یا فرد یک مجموعه‌ی اعداد متوالی مورد نظر باشد از فرمول‌های زیر استفاده می‌شود.

تعداد اعداد زوج = (بزرگ‌ترین عدد زوج − کوچک‌ترین عدد زوج)÷۲ +۱

تعداد اعداد فرد = (بزرگ‌ترین عدد فرد − کوچک‌ترین عدد فرد)÷۲ + ۱

مثال: از عدد ۴۵تا ۱۵۸چند عدد زوج وچند عدد فرد وجود دارد؟

تعداد اعداد زوج = (۱۵۸ − ۴۶) ÷ ۲ + ۱ =۵۷ تعداد اعداد فرد =(۱۵۷ − ۴۵) ÷ ۲ + ۱ = ۵۷

مجموع اعداد صحیح متوالی

- برای محاسبه‌ی مجموع اعداد صحیح متوالی،از فرمول زیر استفاده می‌شود.

مجموع اعداد صحیح متوالی = (تعداد اعداد × مجموع عدد اولی وعدد آخری) ÷ ۲

مثال: محموع اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورید؟ ((۱۰۰ × (۱ + ۱۰۰)) ÷ ۲ = ۵۰۵۰

مجموع اعداد صحیح متوالی = (یکی بیشتر جواب × تعداد اعداد) ÷ ۲

- برای محاسبه مجموع اعداد صحیح فرد متوالی که از عدد (یک) شروع می‌شوند و یا مجموع اعداد صحیح زوج متوالی‌که‌ازعدد (دو) شروع می‌شوند علاوه بر فرمول قبلی، می‌توانیم از فرمول های زیر استفاده کنیم.

مجموع اعداد زوج متوالی

مجموع اعداد زوج متوالی = (تعداد اعداد زوج×(بزرگترین عددزوج توالی+کوچکترین عدد زوج توالی))÷۲

مجموع اعداد زوج متوالی = (یکی بیشتر× تعداد اعداد زوج)

مجموع اعداد صحیح زوج متوالی = تعداد اعداد × (تعداد اعداد + ۱)

مجموع اعداد فرد متوالی

مجموع اعداد فرد متوالی = (تعداد اعداد فرد ×(بزرگترین عدد توالی + کوچکترین عدد فرد توالی)) ÷ ۲

مجموع اعداد فرد متوالی = (خودش× تعداد اعداد فرد)

مجموع اعداد صحیح فرد متوالی = تعداد اعداد × تعداد اعداد

مثال: مجموع اعداد صحیح زوج و مجموع اعداد صحیح فرد متوالی از ۱ تا۱۰۰ را به دست آورید؟

از ۱ تا ۱۰۰ ، ۵۰تا فرد و ۵۰ تا زوج هستند.

تعداد اعداد صحیح فرد متوالی = ۵۰ × ۵۰ = ۲۵۰۰ تعداد اعداد صحیح زوج متوالی = ۵۰ × ۵۱ = ۲۵۵۰

عدد وسطی

هرگاه مجموع چند عدد صحیح متوالی (با فاصله های یکسان) را بدهند و آن اعداد را بخواهند ،مجموع آن اعداد را بر تعدادشان تقسیم کرده،عدد وسطی به دست می‌آید.

- اگر تعداد اعدادفرد باشد مانندمثال زیر عمل،می کنیم.

مثال: مجموع ۵ عدد صحیح متوالی ۷۵ می‌باشدکوچک‌ترین عدد را به دست آورید؟ ۷۵ ÷ ۵ = ۱۵

۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ = ۷۵

- اگر تعداد اعداد زوج باشد مانند مثال زیر عمل می کنیم.

مثال: مجموع ۶ عدد صحیح فرد متوالی ۹۶ می باشد بزرگ ترین عدد را به دست آورید؟　 ۱۶ = ۶ ÷ ۹۶

۱۱+۱۳+۱۵ +۱۷+ ۱۹ + ۲۱ = ۹۶

فرمول پیداکردن سه عدد فرد متوالی

(۱ - تعداد اعداد) + (تعداد اعداد ÷ مجموع اعداد) = **عدد بزرگتر**

(۰ + تعداد اعداد) + (تعداد اعداد ÷ مجموع اعداد) = **عدد وسطی**

(۱ - تعداد اعداد) - (تعداد اعداد ÷ مجموع اعداد) = **عدد کوچکتر**

- تعداد اعداد باید حتما فرد باشد ولی مجموع آنها می تواند زوج یا فرد باشد.

فرمول بدست آوردن دو عدد از روی مجموع و تفاضل آنها

۲ ÷ (اختلاف دو عدد + مجموع دو عدد) = **عدد بزرگتر**

۲ ÷ (اختلاف دو عدد - مجموع دو عدد) = **عدد کوچکتر**

فرمول بدست آوردن اعداد متوالی از روی مجموع(اگرتعداداعدادزوج باشد)

۲÷(یکی کمتر × تعداد اعداد) = **اختلاف اعداد**

تعداد اعداد ÷ (اختلاف اعداد + مجموع اعداد) = **عدد بزرگتر**

تعداد اعداد ÷ (اختلاف اعداد - مجموع اعداد) = **عدد کوچکتر**

رقم یکان

- هرگاه چند عدد زوج را با هم جمع کنیم رقم یکان حاصل جمع،حتماً زوج خواهد شد.
- هرگاه چند عدد فرد را با هم جمع کنیم رقم یکان حاصل جمع،ممکن است زوج باشد یا فرد.اگر تعداد اعداد،فرد باشد رقم یکان حاصل جمع،فرد می‌شود و بلعکس
- هرگاه عدد زوجی را هرچند بار در خودش ضرب کنیم رقم یکان حاصل ضرب،حتماً زوج خواهد بود.　　رقم یکان ۴ = ۳۷ × ۲۳ × ۴۴
  ۴　۲
- هرگاه عدد فردی را هرچند بار در خودش ضرب کنیم رقم یکان حاصل ضرب،حتماً فرد خواهد بود.
- طرز پیدا کردن رقن یکان را با مثال :
- هرگاه رقم یکان عددی(صفر، یک، پنج، شش) باشد و این عدد را هر چند بار در خودش ضرب کنیم، رقم یکان آن، تغییری نمی کند.
- هرگاه دو عدد فرد متوالی را در هم ضرب کنیم، رقم یکان حاصلضرب، می تواند ۳، ۵ یا ۹ باشد. اما رقم یکان حاصلضرب ۱ و ۷ نمی شود.

- هرگاه دو عدد زوج متوالی را در هم ضرب کنیم، رقم یکان حاصلضرب، می تواند صفر، ۴ یا ۸ باشد. اما رقم یکان حاصلضرب ۲ و ۶ نمی شود.
- هرگاه دو عدد مساوی را در هم ضرب کنیم، رقم یکان حاصلضرب، هیچ گاه ۲، ۳ ۷ یا ۸ نمی شود.

فرد × فرد = فرد	زوج × زوج = زوج	فرد × زوج = فرد
فرد ± فرد = زوج	زوج ± زوج = زوج	فرد± زوج = فرد
زوج ÷ زوج = زوج یا فرد		

واحد سرعت

برای سرعت واحد های متفاوتی وجود دارد که رایج ترین آن کیلومتر بر ساعت(Km/h) است، در فیزیک از یکای دیگری بیشتر استفاده می شود که متر بر ثانیه است(m/s)

برای محاسبه سرعت حرکت یک جسم متحرک از فرمول ذیل استفاده می کنیم:　　　زمان ÷ مسافت = **سرعت**

- برای محاسبه زمان کار انجام شده، از فرمول ذیل استفاده می کنیم:

مجموع کار ÷ حاصل ضرب کار = **زمان کار انجام شده**

مثال: فاصله ی بین امین و علی ۸۴۰متر است. آنها در یک زمان به طرف هم می دوند. اگر امین در هر ثانیه ۳ متر و علی ۴ متر را طی کند، پس از چند دقیقه به هم می رسند؟ زمان ÷ مسافت = **سرعت**　　**مسافت** = سرعت ×زمان

مسافت طی شده توسط امین در یک دقیقه: مسافت = ۶۰ ×۳ = ۱۸۰　در نتیجه سرعت امین برابر است با ۱۸۰متر در دقیقه

مسافت طی شده توسط علی در یک دقیقه: مسافت = ۶۰ ×۴ = ۲۴۰　در نتیجه سرعت علی برابر است با ۲۴۰متر در دقیقه

مسافت طی شده توسط هر دو در یک دقیقه:　۴۲۰ =۱۸۰+۲۴۰

در نتیجه با طرفین وسطین می توان فهمید که آن دو مسافت ۸۴۰متری را در دو دقیقه طی می کنند

مثال : علی کاری را در ۶ روز و حسین همان کار را در ۴ روز انجام می دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، این کار را چند روزه انجام می دهند؟ روز ۲/۴ = ۱۰ ÷ ۲۴ = (۴+۶) ÷ (۴×۶) =زمان انجام کار

هر روز ۲۴ ساعت است پس: ۶ = ۴ ÷ ۲۴　در نتیجه کار را در ۲ روز و ۶ ساعت تمام می کنند.

برش و قسمت

همیشه تعداد قسمت ها یکی بیشتر از تعداد برش ها است و یا بعبارت دیگر، تعداد برش ها یکی کمتر از تعداد قسمت ها است.

فصل دوم : کسر

مفهوم کسر : کسر یعنی تکه تکه کردن یا خورد کردن یا شکستن.　　کسر از سه قسمت اصلی تشکیل شده که عبارتند از :

۱- صورت
۲- مخرج
۳- خط کسری که وسط صورت ومخرج قرارمی گیرد

انواع کسر

کسر مساوی صفر : به کسری گفته می شود که صورت آن صفر باشد .

کسر مساوی صورت : به کسری گفته می شود که مخرجش یک باشد .

کسر مساوی واحد: کسری که صورت و مخرج آن برابر باشد. در این صورت کسر مساوی ۱ است.

کسر کوچکتراز واحد : به کسری گفته می شود که صورت از مخرج کوچکتر باشد .

کسر بزرگتراز واحد : به کسری گفته می شود که صورت از مخرج بزرگتر باشد .

کسرهای مساوی : به کسری گفته می شود که صورت ومخرج به یک اندازه اضافه شوند .

- کسرهای مساوی با یک کسر، کاربردهای بسیاری دارند که یکی از آنها در جمع و تفریق کسرها می باشد. محاسبه ی مخرج مشترک دو کسر به همین صورت انجام می پذیرد.
- اگر صورت و مخرج یک کسر را در عددی(غیر از صفر) مثل ۳ ضرب کنیم. مجموع و تفاضل صورت و مخرج هم در همان عدد ۳ ضرب شده است. و کسر حاصل مساوی با آن است. و مقدار آن تغییری نمی کند. مانند:

$$\frac{۴\times 3}{۵\times 3}=\frac{۱۲}{۱۵}\Rightarrow \begin{cases} 12+15-27 \\ 27-(4+5)\times 3 \end{cases} ، \begin{cases} 15-12-3 \\ 3-(5-4)\times 3 \end{cases}$$

- اگر صورت و مخرج یک کسر را بر عددی(غیر از صفر) مثل ۳ تقسیم کنیم. مجموع و تفاضل صورت و مخرج هم بر همان عدد ۳ تقسیم شده است. و کسر حاصل مساوی با آن است. و مقدار آن تغییری نمی کند.

مقایسه کسرها : برای مقایسه کردن دوکسر سه حالت وجود دارد :

۱- کسرهایی با مخرج های مساوی : کسری بزرگ تر است که صورت آن بزرگ تر باشد $\frac{۱}{۴} < \frac{۳}{۴}$

۲- کسرهایی با صورت های مساوی: کسری بزرگتر است که مخرجش کوچکتر باشد . $\frac{۱}{۳} > \frac{۱}{۴}$

۳- کسرهایی با مخرج های نامساوی: باید آن ها را هم مخرج کرد تا بتوان مقایسه ی کسرها را مثل نمونه اول انجام داد.

$$\frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳} > \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۱۲}$$

- برای مقایسه کسرها روش سریع تری نیز وجود دارد در این روش به صورت ضرب طرفین وسطین عمل میکنیم. یعنی مخرج یک کسر را در صورت کسر دیگر ضرب می کنیم.حاصل ضرب بیشتر،کسر بزرگتر را نشان می دهد.

$\boxed{۸}$ $\boxed{۳}$
$\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۴}$

جمع کسرها:

برای جمع کردن دوکسر ابتدا باید آنهاراهم مخرج کردبعد یکی ازمخرج ها را نوشته وصورت ها را باهم جمع می کنیم.

<u>به روش معمول</u>

در جمع کسرها ابتدا به مخرج دو کسر نگاه می کنیم

- اگر مخرج دو کسر برابر بود، یکی از مخرج ها را نوشته و سپس صورت ها را با هم جمع می کنیم.

$$\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

- اگر مخرج دو کسر برابر نبود، ابتدا هم مخرج کرده و سپس طبق اصل بالا با هم جمع میکنیم. برای هم مخرج کردن ابتدا به مخرج ها نگاه میکنیم

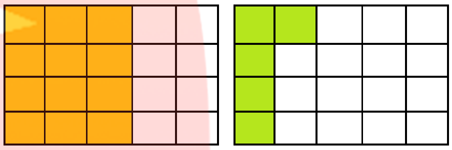
$$\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۱۰}=\frac{۳\times۲}{۵\times۲}+\frac{۲}{۱۰}=\frac{۶}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰}=\frac{۸}{۱۰}$$

به کمک شکل

برای کشیدن شکل دو راه وجود دارد:

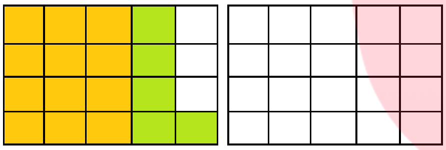
- بعد از هم مخرج کردن، برای هر دو عامل شکل می کشیم. برای کشیدن شکل نگاه می کنیم مخرج کسرها حاصلضرب کدام دو عدد هستند. در این مثال ۵ × ۴ است. به همین دلیل طول مستطیل را به ۵ و عرض آن را به ۴ قسمت تقسیم می کنیم. و سپس هر شکل را به تعداد یکی از عامل ها رنگ می کنیم.

$$\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۴}=\frac{۳\times۴}{۵\times۴}+\frac{۱\times۵}{۴\times۵}=\frac{۱۲}{۲۰}+\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱۷}{۲۰}$$



- بعد از هم مخرج کردن، برای هر دو عامل شکل می کشیم. و سپس عامل اول را روی شکل نشان داده و عامل دوم را در ادامه آن روی همان شکل نشان می دهیم و اگر از یک شکل بیشتر شد ادامه را روی شکل دوم نشان می دهیم.

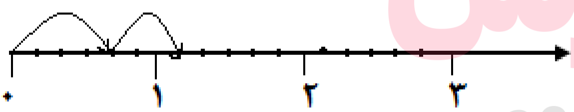
$$\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۴}=\frac{۳\times۴}{۵\times۴}+\frac{۱\times۵}{۴\times۵}=\frac{۱۲}{۲۰}+\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱۷}{۲۰}$$



به کمک محور

- بعد از هم مخرج کردن، محور را کشیده و بین هر دو واحد کامل را به تعداد مخرج به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم. (در جمع دو کسر محور را حداکثر تا ۳ واحد کامل تقسیم بندی می کنیم.) و سپس عامل اول را روی محور مشخص کرده از صفر یک کمان به محل مورد نظر وصل می کنیم و سپس به اندازه کسر دوم از محل کسر اول به جلو می رویم.

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}=\frac{۲\times۲}{۳\times۲}+\frac{۱\times۳}{۲\times۳}=\frac{۴}{۶}+\frac{۳}{۶}=\frac{۷}{۶}=۱\frac{۱}{۶}$$



تفریق کسرها :

برای تفریق کسرها نیز مانند جمع آنها عمل می کنیم .

به روش معمول

در تفریق کسرها ابتدا به مخرج دو کسر نگاه می کنیم

- اگر مخرج دو کسر برابر بود، یکی از مخرج ها را نوشته و سپس صورت ها را از هم کم می کنیم.

$$\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

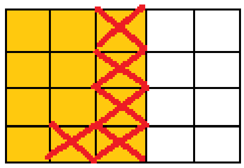
- اگر مخرج دو کسر برابر نبود، ابتدا هم مخرج کرده و سپس طبق اصل بالا از هم کم میکنیم. برای هم مخرج کردن ابتدا به مخرج ها نگاه میکنیم

$$\frac{۳}{۵}-\frac{۲}{۱۰}=\frac{۳\times۲}{۵\times۲}-\frac{۲}{۱۰}=\frac{۶}{۱۰}-\frac{۲}{۱۰}=\frac{۴}{۱۰}$$

به کمک شکل

- بعد از هم مخرج کردن، برای عامل اول شکل می کشیم. و سپس شکل را به اندازه کسر اول رنگ کرده و به اندازه کسر دوم از قسمت های رنگی کم می کنیم.

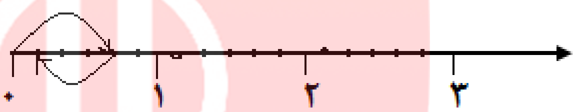
$$\frac{3}{5}-\frac{1}{4}=\frac{3\times4}{5\times4}-\frac{1\times5}{4\times5}=\frac{12}{20}-\frac{5}{20}=\frac{7}{20}$$



به کمک محور

- بعد از هم مخرج کردن، محور را کشیده و بین هر دو واحد کامل را به تعداد مخرج به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم. (در تفریق دو کسر محور را حداکثر تا ۳ واحد کامل تقسیم بندی می کنیم.) و سپس عامل اول را روی محور مشخص کرده از صفر یک کمان به محل مورد نظر وصل می کنیم و سپس به اندازه کسر دوم از محل کسر اول به سمت عقب حرکت می کنیم.

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2\times2}{3\times2}-\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$$



ساده کردن کسرها:

۱. برای ساده کردن کسرها، باید عددی از صورت و عددی از مخرج را انتخاب کرده و هر دو را بر یک عدد ثابت تقسیم کرد. ترتیب انتخاب اعداد مهم نیست . یعنی میتوان صورت یک کسر را با مخرج کسر دیگر ساده کرد به شرطی که بین دو کسر عمل ضرب باشد.

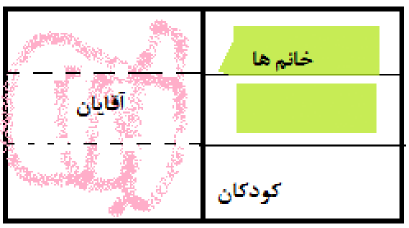
۲. ساده کردن در کسرها زمانی امکان دارد که بین اعداد فقط عمل ضرب باشد، به یاد داشته باشید که صورت با صورت و مخرج با مخرج هرگز ساده نمی شود.

۳. در ساده کردن کسرها، صورت و مخرج ها را تا حد ممکن ساده می کنیم.

۴. با ساده کردن کسرها به اعداد کوچکتر می رسیم که استفاده از آنها در محاسبات، کار را بسیار آسان می کند.

- **حل مسئله: راهبرد رسم شکل**

برای مثال: $\frac{1}{2}$ نمازگزاران یک مسجد آقایان و $\frac{2}{3}$ بقیه خانم ها هستند. چه کسری از نمازگزاران کودکان هستند؟



با توجه به شکل، $\frac{1}{6}$ نمازگزاران را کودکان تشکیل می دهند.

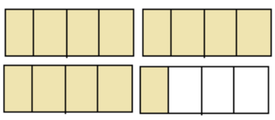
درس اول: عدد مخلوط

عدد مخلوط : به کسری گفته می شود که تشکیل شده از چهار جزء که عبارتند از :

۱- عددصحیح که پشت خط کسری قرار می گیرد. (واحد کامل)

۲- صورت   ۳- مخرج   ۴- خط کسری .

شکل مقابل یک عدد مخلوط را نشان می دهد. ۳ واحد و $\frac{1}{4}$ از یک واحد(کسر کوچکتر از واحد)



$\frac{1}{4}$

۳

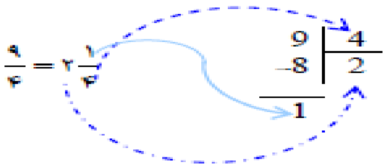
از طرفی می توان گفت، $3\frac{1}{4}$ برابر با $\frac{13}{4}$ یا ۱۳ تا $\frac{1}{4}$ است

تبدیل کسر به عدد مخلوط

الف) روش گسترده (طولانی)

$$\frac{9}{4}=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=1+1+\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$$

ب) روش تقسیم کردن (کوتاه)



تبدیل عدد مخلوط به کسر

$$2\frac{1}{4}=\frac{(2\times4)+1}{4}=\frac{8+1}{4}=\frac{9}{4}$$

نمایش روی محور

- برای نشان دادن یک کسر روی محور اعداد ابتدا باید هر واحد را به اندازه مخرج کسر تقسیم کرد. یعنی اگر کسر $\frac{3}{4}$ بود، ابتدا هر واحد را به ۴ قسمت تقسیم کرده و سپس از صفر شروع کرده و ۳ قسمت شمرده و علامت می گذاریم.
- برای نشان دادن عدد مخلوط روی محور، ابتدا هر واحد را به تعداد کل قسمت ها(مخرج کسر) تقسیم کرده، سپس از واحد کامل به تعداد قسمت های صورت کسر(ریز واحدها) به آن اضافه می کنیم.
- به قسمت بین دو عدد کامل پشت سر هم یک واحد کامل گفته می شود. مثلا بین ۱ و ۲ یک واحد کامل است. هرگاه واحدی را به چند قسمت مساوی تقسیم کنیم. آن قسمت های کوچک، هر یک «ریز واحد» نامیده می شوند.

درس دوم : جمع و تفریق اعداد مخلوط

جمع اعدا مخلوط

- اصل مهم در جمع اعداد مخلوط ، هم مخرج بودن اعدادی است که می خواهیم با هم جمع کنیم.

<u>به روش معمول</u>

جمع دو عدد مخلوط:

در جمع اعداد مخلوط ابتدا به مخرج دو کسر نگاه می کنیم

- اگر مخرج دو کسر برابر بود، اعداد صحیح را با هم جمع کرده یکی از مخرج ها را نوشته و سپس صورت ها را با هم جمع می کنیم.

$$2\frac{3}{5}+3\frac{1}{5}=5\frac{4}{5}$$

✓ اگر مخرج دو کسر برابر نبود، ابتدا هم مخرج کرده و سپس طبق اصل بالا با هم جمع میکنیم.

$$2\frac{3}{5}+3\frac{2}{10}=2\frac{3\times2}{5\times2}+3\frac{2}{10}=2\frac{6}{10}+3\frac{2}{10}=\ 5\frac{8}{10}$$

جمع عدد مخلوط با عدد صحیح:

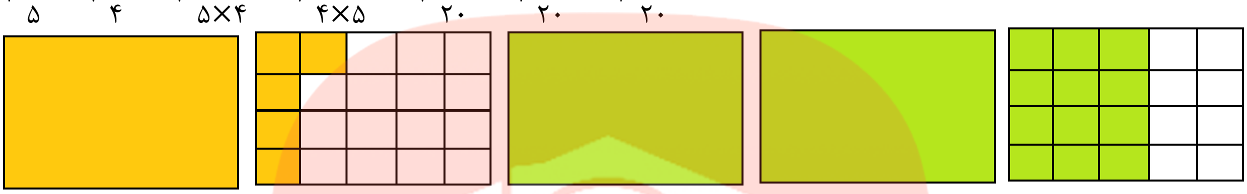
- اعداد صحیح را با هم جمع کرده و کسر را در جلوی پاسخ آن دو می نویسیم.

$$۲\frac{۳}{۵}+۵=۷\frac{۳}{۵}$$

به کمک شکل

بعد از هم مخرج کردن، برای هر دو عامل شکل می کشیم. و سپس هر عامل را روی شکل های جداگانه نمایش می دهیم. (نیازی به تقسیم بندی واحدهای کامل نیست.)

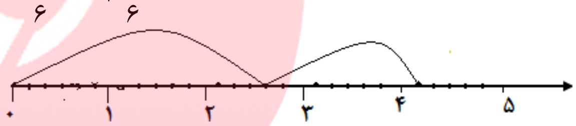
$$۲\frac{۳}{۵}+۱\frac{۱}{۴}=۲\frac{۳\times۴}{۵\times۴}+۱\frac{۱\times۵}{۴\times۵}=۲\frac{۱۲}{۲۰}+۱\frac{۵}{۲۰}=۳\frac{۱۷}{۲۰}$$



به کمک محور

- بعد از هم مخرج کردن، محور را کشیده و بین هر دو واحد کامل را به تعداد مخرج به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم. و سپس عامل اول را روی محور مشخص کرده از صفر یک کمان به محل مورد نظر وصل می کنیم و سپس عامل دوم را به کسر تبدیل کرده و به اندازه صورت از محل عامل اول به جلو می رویم.

$$۲\frac{۲}{۳}+۱\frac{۱}{۲}=۲\frac{۲\times۲}{۳\times۲}+۱\frac{۱\times۳}{۲\times۳}=۲\frac{۴}{۶}+۱\frac{۳}{۶}=۳\frac{۷}{۶}=\frac{۲۵}{۶}=۴\frac{۱}{۶}$$



تفریق اعداد مخلوط

- اصل مهم در تفریق اعداد مخلوط ، هم مخرج بودن اعدادی است که می خواهیم آن ها را از هم کم کنیم.

به روش معمول

✓ **تفریق دو عدد مخلوط:**

- **کسر عدد دوم کوچکتر از کسر عدد اول باشد**

در تفریق اعداد مخلوط ابتدا به مخرج دو کسر نگاه می کنیم

- اگر مخرج دو کسر برابر بود، یکی از مخرج ها را نوشته و سپس صورت ها را از هم کم می کنیم.

$$۳\frac{۳}{۵}-۲\frac{۱}{۵}=۱\frac{۲}{۵}$$

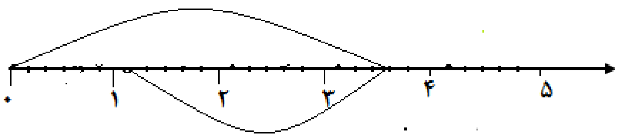
- اگر مخرج دو کسر برابر نبود، ابتدا هم مخرج کرده و سپس طبق اصل بالا از هم کم میکنیم. برای هم مخرج کردن ابتدا به مخرج ها نگاه میکنیم

$$۲\frac{۳}{۵}-۱\frac{۲}{۱۰}=۲\frac{۳\times۲}{۵\times۲}-۱\frac{۲}{۱۰}=۲\frac{۶}{۱۰}-۱\frac{۲}{۱۰}=\quad ۱\frac{۴}{۱۰}$$

- **کسر عدد دوم بزرگتر از کسر عدد اول باشد.**

- در این حالت پس از هم مخرج کردن، یک واحد از عدد صحیح اول کم کرده و به اندازه مخرج به صورت آن اضافه می کنیم. و سپس عملیات تفریق را انجام می دهیم.

$$4\frac{2}{5}-2\frac{2}{3}=4\frac{2\times4}{5\times4}-2\frac{2\times5}{4\times5}=4\frac{8}{20}-2\frac{10}{20}=3\frac{28}{20}-2\frac{10}{20}=1\frac{18}{20}$$



✓ **تفریق عدد مخلوط از عدد صحیح:**

- برای تفریق عدد مخلوط از عدد صحیح، ابتدا باید عدد صحیح را به یک عدد مخلوط تبدیل کرد. به این ترتیب که یک واحد از عدد صحیح کم کرد و سپس با توجه به مخرج کسر بعدی یک کسر واحد جلوی عدد جدید نوشت. و تفریق را طبق اصل بالا انجام می دهیم.

$$3-\frac{3}{7}=2\frac{7}{7}-\frac{3}{7}=2\frac{4}{7}$$

$$5-2\frac{3}{10}=4\frac{10}{10}-2\frac{3}{10}=2\frac{7}{10}$$

✓ **تفریق عدد صحیح از عدد مخلوط:**

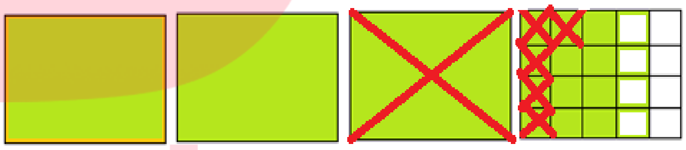
- برای تفریق عدد صحیح از عدد مخلوط، ابتدا اعداد صحیح را از هم کم کرده و سپس کسر را در مقابل حاصل می نویسیم.

$$3\frac{2}{5}-2=1\frac{2}{5}$$

به کمک شکل

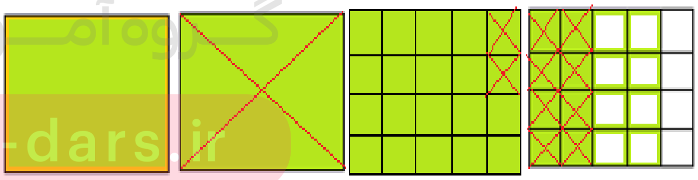
- بعد از هم مخرج کردن، برای عامل اول شکل می کشیم. و سپس شکل را به اندازه عدد مخلوط اول رنگ کرده و سپس به اندازه عدد مخلوط دوم از قسمت های رنگی کم می کنیم.

$$3\frac{3}{5}-1\frac{1}{4}=3\frac{3\times4}{5\times4}-1\frac{1\times5}{4\times5}=3\frac{12}{20}-1\frac{5}{20}=2\frac{7}{20}$$



- اگر کسر دوم از کسر اول بزرگتر بود، یکی از واحد های کامل را تقسیم بندی می کنیم.

$$3\frac{2}{5}-1\frac{2}{3}=3\frac{2\times4}{5\times4}-1\frac{2\times5}{4\times5}=3\frac{8}{20}-1\frac{10}{20}=2\frac{28}{20}-1\frac{10}{20}=1\frac{18}{20}$$



به کمک محور

- بعد از هم مخرج کردن، محور را کشیده و بین هر دو واحد کامل را به تعداد مخرج به قسمت های مساوی تقسیم می کنیم. (در تفریق دو عدد مخلوط محور را حداکثر تا ۱ واحد کامل بیشتر از عدد صحیح عامل اول تقسیم بندی می کنیم.) و سپس عامل اول را روی محور مشخص کرده از صفر یک کمان به محل مورد نظر وصل می کنیم و سپس عامل دوم را به صورت کسر در آورده و به اندازه صورت کسر حاصل از محل عامل اول به سمت عقب حرکت می کنیم.

$$۳\tfrac{۲}{۳} - ۲\tfrac{۱}{۲} = ۳\tfrac{۲\times۲}{۳\times۲} - ۲\tfrac{۱\times۳}{۲\times۳} = ۳\tfrac{۴}{۶} - ۲\tfrac{۳}{۶} = ۱\tfrac{۱}{۶}$$

درس سوم: ضرب کسرها

ضرب کسر در کسر

به روش معمول

- در ضرب دو کسر هم مخرج بودن آنها مهم نیست.
- برای ضرب دو کسر ابتدا نگاه می کنیم آیا قابل ساده شدن هستند یا خیر؟ اگر ساده شد ابتدا ساده کرده و سپس ضرب را انجام می دهیم.
- برای ضرب کسرها، صورت ها را در هم و مخرج ها را در هم ضرب می کنیم.

$$\frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۲۰}$$

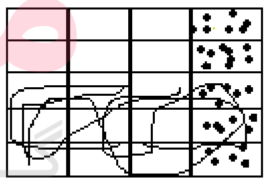
$$\frac{۱۵}{۱۸} \times \frac{۱۲}{۲۵} = \frac{۱۵}{۱۸} \times \frac{۱۲}{۲۵} = \frac{۳}{۱۸} \times \frac{۱۲}{۵} = \frac{۱}{۶} \times \frac{۱۲}{۵} = \frac{۱}{۱} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۵}$$

به کمک شکل

ابتدا یک مستطیل کشیده:

- مستطیل را از طول به اندازه مخرج کسر دوم تقسیم کرده و سپس به اندازه صورت آن قسمت های تقسیم شده را بصورت عمودی رنگ می کنیم.
- عرض مستطیل را به اندازه مخرج کسر اول تقسیم کرده و سپس به اندازه صورت آن قسمت های تقسیم شده را بصورت افقی رنگ می کنیم.
- حاصل ضرب برابر است با کسری که صورت آن برابر قسمتهای دو رنگ و مخرج آن برابر کل قسمت های مستطیل است.

$$\frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۲۰}$$



ضرب کسر درعدد صحیح

به روش معمول

- در ضرب دو کسر هم مخرج بودن آنها مهم نیست.
- برای ضرب ابتدا نگاه می کنیم آیا قابل ساده شدن هستند یا خیر؟ اگر ساده شد ابتدا ساده کرده و سپس ضرب را انجام می دهیم.
- برای ضرب کسر در عدد صحیح ، به عدد صحیح مخرج یک داده و سپس صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم.

$$\frac{۳}{۵} \times ۴ = \frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۱} = \frac{۱۲}{۵} = ۲\frac{۲}{۵}$$

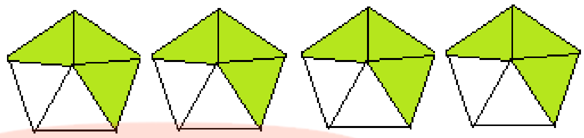
$$\frac{۱۵}{۱۸} \times ۲۷ = \frac{۱۵}{۱۸} \times \frac{۲۷}{۱} = \frac{۱۵}{۲} \times \frac{۳}{۱} = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲\frac{۱}{۲}$$

به کمک شکل

- به تعداد عدد صحیح شکل می کشیم.
- شکل ها را به اندازه مخرج کسر تقسیم کرده و به اندازه صورت آن رنگ می کنیم.

- حاصل ضرب برابر است با کسری که صورت آن برابر مجموع قسمت های رنگی و مخرج آن برابر کل قسمت های یکی از شکل ها است.

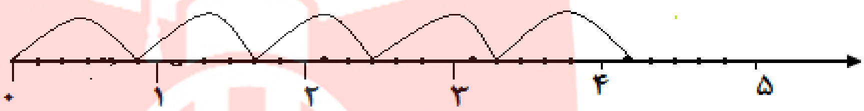
$$\frac{۳}{۵} \times ۴ = \frac{۱۲}{۵} = ۲\frac{۲}{۵}$$



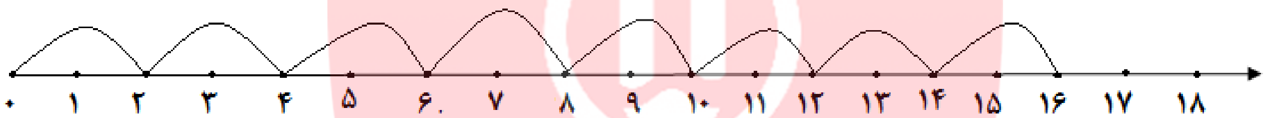
به کمک محور

- ابتدا کسر به قسمت را روی محور بین هر دو واحد کامل را به تعداد مخرج های مساوی تقسیم می کنیم. و سپس کسر مشخص کرده از صفر یک کمان به محل مورد نظر وصل می کنیم و بعد از آن به تعداد عدد صحیح کان را تکرار می کنیم.

$$\frac{۵}{۶} \times ۵ = \frac{۲۵}{۶} = ۴\frac{۱}{۶}$$



- نوع دیگری از محور نیز وجود دارد. که به شکل زیر است:



در این نوع از محور باید حاصلضرب یا صورت کسر را داده تا ما بتوانیم جاهای خالی را پر کنیم.

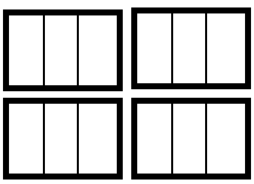
$\frac{6}{۸} \times ۱۶ = ۱۲$　　$\frac{6}{\quad} \times .... =$　　یا　　$\frac{۶}{۸} \times ۱۶ = ۱۲$　　$\frac{\quad}{\quad} \times .... = ۱۲$

عدد مد نظر یا حاصل = عددی که آخرین کمان روی آن فرود آمده × $\dfrac{\text{شماره کمانی که روی عدد مدنظر فرود آمده}}{\text{تعداد کل کمان ها}}$

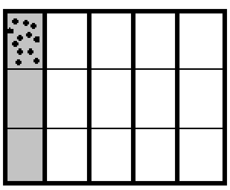
درس چهارم: تقسیم کسرها

برای انجام تقسیم کسرها دو روش وجود دارد:

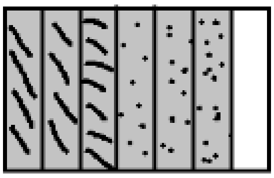
✓ ابتدا تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و سپس آن را حل می‌کنیم. برای تبدیل تقسیم به ضرب به روش زیر عمل می کنیم: کسر اول را نوشته، علامت تقسیم را به ضرب تبدیل کرده و سپس کسر دوم را معکوس می کنیم و عمل ضرب را انجام می دهیم.



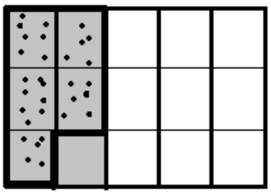
- $۴ \div \frac{۱}{۳} =$ یعنی در ۴واحد کامل چندتا $\frac{۱}{۳}$ وجود دارد؟ با توجه به سه روش بالا برای حل این تقسیم معادله را اینگونه می نویسیم: $۴ \times \frac{۳}{۱} = \frac{۱۲}{۱} = ۱۲$ اگر بخواهیم به کمک شکل این معادله را حل کنیم:



- $۳ \div \frac{۱}{۵} =$ یعنی اگر $\frac{۱}{۵}$ شکلی را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم، چه کسری از کل شکل می شود؟ با توجه به سه روش بالا برای حل این تقسیم معادله را اینگونه می نویسیم: $\frac{۱}{۵} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$ اگر بخواهیم به کمک شکل این معادله را حل کنیم:



– $\frac{۶}{۷} \div \frac{۳}{۷} =$ یعنی در $\frac{۶}{۷}$ چند تا $\frac{۳}{۷}$ وجود دارد؟ با توجه به سه روش بالا برای حل این تقسیم معادله را اینگونه می نویسیم: $\frac{۶}{۷} \times \frac{۷}{۳} = \frac{۶}{۳} = ۲$ اگر بخواهیم به کمک شکل این معادله را حل کنیم:



– $\frac{۲}{۵} \div \frac{۱}{۳} =$ ابتدا مخرج ها را یکی کرده: $= \frac{۶}{۱۵} \div \frac{۵}{۱۵}$ یعنی در $\frac{۶}{۱۵}$ چندتا $\frac{۵}{۱۵}$ وجود دارد؟ با توجه به سه روش بالا برای حل این تقسیم معادله را اینگونه می نویسیم: $\frac{۶}{۱۵} \times \frac{۱۵}{۵} = \frac{۶}{۵} = ۱\frac{۱}{۵}$ اگر بخواهیم به کمک شکل این معادله را حل کنیم: حال می بینیم که در $\frac{۶}{۱۵}$ یک عدد $\frac{۵}{۱۵}$ وجود دارد و $\frac{۱}{۵}$ باقی می ماند.

✓ دور در دور و نزدیک در نزدیک: از این روش، فقط در مواقعی که لازم باشد استفاده می کنیم.

$$\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۲}{۷}} = \frac{۴\times۷}{۲\times۵} = \frac{۲\times۷}{۱\times۵} = \frac{۱۴}{۵} = ۲\frac{۴}{۵}$$

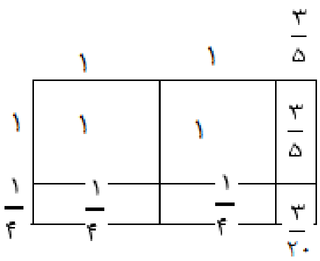
- اگر جای صورت و مخرج کسری را عوض کنیم، کسر حاصل را «**معکوس**» یا «**وارون**» کسر اول می نامند.
- اعداد مخلوط را ابتدا به کسر تبدیل کرده، سپس نعکوس می کنیم.
- در تقسیم کسرها کافی است کسر اول را در معکوس کسر دوم ضرب کنیم.
- تقسیم برعکس ضرب می باشد، یعنی می توان هر تقسیمی را به ضرب تبدیل کرد.
- معکوسِ معکوس یک کسر برابر با خود آن کسر است.
- حاصلضرب یک کسر در معکوسش برابر یک می باشد.
- صفر معکوس ندارد. زیرا برای معکوس کردن صفر باید آن را بصورت $\frac{۰}{۱}$ درآوریم و اگر بخواهیم جای صورت و مخرج را عوض کنیم، صفر به مخرج می رود و این قابل قبول نیست. یعنی کسر تعریف نشده می شود.

درس پنجم : ضرب عددهای مخلوط

برای ضرب اعداد مخلوط ابتدا آن ها را به کسر تبدیل کرده و سپس حل می نماییم.

$$۲\frac{۳}{۵} \times ۱\frac{۱}{۴} = \frac{۱۳}{۵} \times \frac{۵}{۴} = \frac{۱۳}{۱} \times \frac{۱}{۴} = \frac{۱۳}{۴} = ۳\frac{۱}{۴}$$

ضرب عدد های مخلوط با روش مساحتی (مساحت مستطیل/ به کمک شکل)



ابتدا مستطیلی رسم کرده، سپس عدد های مخلوط را روی ضلع های آن مشخص می کنیم. آن گاه مساحت قسمت های ایجاد شده را بدست آورده سپس مجموع آنها را محاسبه می کنیم. عدد حاصل، حاصلضرب دو عدد مخلوط داده شده می باشد.

$$۱\frac{۱}{۴} \times ۲\frac{۳}{۵} = ۱+۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۵}+\frac{۳}{۲۰} = ۲+\frac{۵}{۲۰}+\frac{۵}{۲۰}+\frac{۱۲}{۲۰}+\frac{۳}{۲۰} = ۲+\frac{۲۵}{۲۰} = ۲+۱\frac{۵}{۲۰} = ۳\frac{۵}{۲۰}$$

مقایسه اعداد مخلوط

برای مقایسه اعداد مخلوط باید این اصل را در نظر گرفت که عدد مخلوطی بزرگ تر است که قسمت صحیح بزرگتری داشته باشد.

اگر دو عدد مخلوط دارای قسمت صحیح برابری باشند قسمت کسری آن ها را با هم مقایسه می کنیم.

نکات تکمیلی

✓ نوشتن چند کسر بین دو کسر

چهار روش برای پیدا کردن چند بین دو کسر مشخص وجود دارد:

- **روش اول: هم مخرج کردن**

برای پیدا کردن دو کسر بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۸}$: ابتدا با هم خرج کردن معلوم می کنیم کدام کسر بزرگتر است. برای این کار صورت و مخرج هر کسر را در مخرج کسر دیگر ضرب می کنیم. $\frac{۸}{۲۴}=\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۳}{۲۴}=\frac{۱}{۸}$ پس: $\frac{۱}{۳}<\frac{۱}{۸}$

$$\frac{۸}{۲۴}>\frac{۷}{۲۴}>\frac{۶}{۲۴}>\frac{۵}{۲۴}>\frac{۴}{۲۴}>\frac{۳}{۲۴}$$

فرمول پیدا کردن تعداد مشخصی کسر بین دو کسر متوالی: صورت و مخرج هر دو کسر را در «یکی بیشتر از تعداد خواسته شده» ضرب کرده سپس می توان به تعداد خواسته شده بین آن دو کسر نوشت.

- **روش دوم: کسر بین دو کسر متوالی**

برای پیدا کردن دو کسر بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۵}$: ابتدا هم خرج میکنیم $\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$ پس: $\frac{۲}{۵}<\frac{۱}{۳}$

ظاهرا بین $\frac{۵}{۱۵}$ و $\frac{۶}{۱۵}$ کسری وجو ندارد ولی اگر صورت و مخرج کسرها را در ۳ ضرب کنیم. بین آنها دو کسر خواهیم یافت.

$\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱۵}{۴۵}$ و $\frac{۶}{۱۵}=\frac{۱۸}{۴۵}$　　$\frac{۱۵}{۴۵}>\frac{۱۶}{۴۵}>\frac{۱۷}{۴۵}>\frac{۱۸}{۴۵}$

- **روش سوم: جمع صورت ها ومخرج ها**

برای پیداکردن کسرها بین دو کسر با مخرج نا مشخص: $\text{کسربین دو کسر}=\frac{\text{مجموع صورت دو کسر}}{\text{مجموع مخرج دو کسر}}$

اگر بخواهیم چند کسر بنویسیم این کار را میتوان چندین بار تکرار کرد.

برای پیدا کردن دو کسر بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$: $\frac{۱}{۳}>\frac{۲}{۵}>\frac{۱}{۲}$ ⬅ $\frac{۱}{۳}>\frac{۳}{۸}>\frac{۲}{۵}>\frac{۱}{۲}$ ⬅ $\frac{۱}{۳}>\frac{۳}{۸}>\frac{۲}{۵}>\frac{۳}{۷}>\frac{۱}{۲}$

- **روش چهارم: میانگین دو کسر**

میانگین هر دو عدد بین آن دو قرار دارد.

برای پیدا کردن دو کسر بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۵}$: $\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳}=\frac{۶}{۱۵}+\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱۱}{۱۵}$　　$\frac{۱۱}{۱۵}\div ۲=\frac{۱۱}{۱۵}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱۱}{۳۰}$

✓ تفکیک کسرها

می دانید اگر در صورت یک کسر دو یا چند عدد با هم جمع یا از هم کم شده باشند میتوان آن را بصورت چند کسر تفکیک شده نوشت. اما دقت کنید این قاعده برای زمانی که در صورت یک کسر ضذب یا تقسیم وجود دارد کاربرد ندارد.

$$\frac{۱}{۵}+\frac{۲}{۵}=\frac{۲+۱}{۵}\qquad \frac{۱}{۵}-\frac{۲}{۵}=\frac{۲-۱}{۵}\qquad \frac{۳}{۱۵}\times\frac{۱۱}{۱۵}\neq\frac{۱۱\times ۳}{۱۵}\qquad \frac{۳}{۱۵}\div\frac{۱۱}{۱۵}\neq\frac{۱۱\div ۳}{۱۵}$$

- اگر دریک عبارت بین اعداد پرانتز یا کروشه قرار داده نشده باشد و در آن عمل های ضرب، تقسیم، جمع و تفریق وجود داشته باشد. عمل ضرب و تقسیم نسبت به جمع و تفریق زودتر باید انجام شوند.(تقدم ضرب)

➢ کسر مسلسل

این نوع کسر ها که به کسرهای مسلسل یا طبقاتی مشهورند در مخرج یا صورتشان میتوان کسرهای دیگری هم پیدا کرد که بصورت طبقه ای قرار گرفته اند. معمولا برای حل این نوع کسرها از آخرین کسر موجود در مخرج یا صورت عملیات را شروع می کنیم تا به ساده ترین کسر اولیه برسیم. =

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{3}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{4}{4}+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{4}{7}}=\frac{1}{\frac{7}{7}+\frac{4}{7}}=\frac{1}{\frac{11}{7}}=\frac{7}{11}$$

- هرگاه روی یک کسر صورت یک قرار بگیرد، آن کسر معکوس خواهد شد.

✓ اگر دو کارگر یک کار را در زمانهای مختلفی یکی در A دقیقه و دیگری در B دقیقه انجام دهند درصورتی که کار را به هر دوی آنها بسپاریم، زمان انجام کار بصورت زیر خواهد شد:

$$\text{زمان انجام کار هر دو با هم} = \frac{B\times A}{B+A} \qquad \text{یا} \qquad \text{زمان انجام کار هر دو با هم} = \frac{\text{حاصلضرب زمان انجام کار ۲ کارگر}}{\text{مجموع زمان انجام کار ۲ کارگر}}$$

اگر تعداد افراد بیش از دو نفر باشد از این فرمول استفاده می کنیم:

$$\frac{1}{\text{انجام زمان کار}}=\frac{1}{\text{زمان کار نفر اول}}+\frac{1}{\text{زمان کار نفر دوم}}+\frac{1}{\text{زمان کار نفر سوم}}+\ldots\ldots$$

✓ چنانچه دو نفر کاری را با هم در A دقیقه و یکی از آنها به تنهایی آن کار را در B دقیقه انجام دهد. اگر بخواهیم بدانیم دیگری کار را در چه مدت تمام خواهد کرد از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$\text{زمان انجام کار کارگر دوم} = \frac{B\times A}{B-A}$$

✓ اگر منبع آبی دارای دو شیر ورودی و یک شیر خروجی باشد. و هم زمان هر سه شیر را باز کنیم پر شدن منبع بصورت زیر بدست می آید.

$$\frac{1}{\text{زمان پر شدن منبع}}=\frac{1}{\text{زمان شیر ورودی اول}}+\frac{1}{\text{زمان شیر ورودی دوم}}-\frac{1}{\text{زمان شیر خروجی اول}}$$

✓ استخری به تنهایی توسط شیرآب اول در A ساعت، توسط شیر دوم به تنهایی در B ساعت، ... پر می شود. همچنین توسط چاه تخلیه اول به تنهایی در X ساعت، توسط چاه تخلیه دوم در Y ساعت، . . . خالی می شود. اگر همه با هم باز باشند، زمان پر شدن آن از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{\text{زمان پر شدن منبع}}=\left(\frac{1}{\text{زمان شیر ورودی اول}}+\frac{1}{\text{زمان شیر ورودی دوم}}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{\text{زمان شیر خروجی اول}}+\frac{1}{\text{زمان شیر خروجی دوم}}+\ldots\right)$$

فصل سوم: نسبت، تناسب و درصد

درس اول: نسبت

- هرگاه دو مقدار مختلف را با هم مقایسه کنیم. رابطه ی بین این دو مقدار را می توان با **نسبت** نمایش داد.
- هرگاه مقدار دو کمیت طوری تغییر کند که نسبت آنها ثابت بماند، آن دو کمیت را «**متناسب**» می گوییم.
- مقایسه بین دو کمیت را نسبت می گوییم و اندازه ها یا کمیت ها را در جدولی به نام «**جدول تناسب**» قرار می دهیم.
- نسبت «۱به۲» را «۱ و۲» و یا «$\frac{۱}{۲}$» نیز می توان نوشت. ولی هیچ وقت $\frac{۱}{۲}$ را مانند عدد کسری «یک دوم» نباید بخوانید.

تفاوت های کسر و نسبت

۱. کسر واحد اندازه گیری دارد، اما نسبت واحد ندارد و عدد مطلق است.
۲. کسر تقسیم کردن است اما تناسب مقایسه بین دو چیز است.
۳. صورت و مخرج کسر از یک جنس هستند ولی در نسبت الزاما اینطور نیست.
۴. صورت و مخرج کسر را نمی توان جابجا کرد ولی در نسبت جابجایی وجود دارد.
۵. نسبت ها را مانند کسرها نمی توان جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کرد

✓ نسبت طول یک ضلع لوزی به محیط آن مثل ۱به ۴ یا $\frac{۱}{۴}$ است

درس دوم: نسبت های مساوی

برای پیدا کردن نسبت مساوی با نسبت $\frac{۵}{۳}$ که مقدار بزرگ آن ۱۵ باشد باید ابتدا کسری مساوی با $\frac{۵}{۳}$ پیدا کنیم که صورت آن ۱۵ باشد. برای پیدا کردن آن، بصورت زیر عمل می کنیم.

راه حل اول : $\frac{۵}{۳} = \frac{۱۵}{?} \Rightarrow \frac{۳\times۱۵}{۵} = ۹$

راه حل دوم : $\frac{۵}{۳} = \frac{۱۵}{?}$ ($\times۳$) $\Rightarrow ? = ۹$

درس سوم: تناسب

دو نسبت مساوی، یک تناسب را تشکیل می دهند. مثلا نسبت ۲ به ۵ با نسبت ۴به۱۰ برابر است. پس می گوییم $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۴}{۱۰}$ یک تناسب تشکیل می دهند.

➢ **تناسب مستقیم :**

در دو کمیت متناسب، اگر با افزایش یا کاهش یکی، دیگری نیز به همان نسبت افزایش یا کاهش یابد رابطه ی بین آنها را «تناسب مستقیم» می گوییم.

در تناسب های مستقیم می توان نسبت ها را در یک عدد معین ضرب و یا بر یک عدد مشخص تقسیم کرد. معمولا از این روش برای تبدیل نسبت های کسری و اعشاری به نسبت های عدد صحیح، استفاده می کنیم. عددی را که در نسبت های کسری ضرب می کنیم بهتر است مخرج مشترک آنها باشد.

مثال: نسبت پول حمید به سعید $\frac{۱}{۲}$ به $\frac{۳}{۵}$ است. اگر پول سعید ۳۶۰۰۰ تومان باشد، حمید چقدر پول دارد؟

$\frac{۳}{۵}\times۱۰ = ۶$ $\frac{۱}{۲}\times۱۰ = ۵$

۵	؟ → ۳۰۰۰۰
۶	۳۶۰۰۰

➢ **تناسب مرکب:**

$30\ \% = \frac{30}{100}$

تناسبی است که گاهی ترکیب شده از دو تناسب مستقیم ،گاهی ترکیب شده از دو تناسب معکوس و گاهی ترکیب شده از یک تناسب مستقیم و یک تناسب معکوس است.

مثال: یک کارگر $\frac{2}{3}$کاری را در ۸ ساعت انجام میدهد. دو کارگر بقیه کار را در چند ساعت انجام می دهند؟

کارگر	۱	۲
کار	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
ساعت	۸	؟

$؟ \times \frac{2}{3} \times 2 = 8 \times \frac{1}{3} \times 1 \rightarrow 2 = ؟$

➢ **تناسب معکوس :**

گاهی اوقات کمیت ها با هم نسبت عکس دارند یعنی هرچه یکی را زیاد کنیم به همان نسبت ، دیگری کم می شود. در این حالت می گوییم تناسب معکوس است.

مثلاً اگر ۲ کارگر، کاری را در مدّت ۶ روز انجام می دهند ،۴ کارگر، همان کار را در مدت ۳ روز انجام می دهند.

- اگر سه نسبت که دوبه دو با هم متناسبند، داشته باشیم بطوری که یکی از کمیت ها در هر دو نسبت مشترک است، دو حالت بوجود می آید:

الف) کمیت مشترک بین دو نسبت با عدد یکسانی بیان شده است.

ب)کمیت مشترک بین دو نسبت با عددهای متفاوتی بیان شده است که در این حالت باید دو نسبت را طوری تغییر داد که کمیت مشترک در دو نسبت با یک عدد بیان شود.

- با تبدیل «نسبت بین اجزای یک مسئله» به «نسبت بین کل مسئله» حل مسائل بسیار ساده تر خواهد شد.

مثال : نسبت قد حمید به مجید ۳به۲، و نسبت قد مجید به سعید ۶ به ۵ است. کدام یک بلند قدترین است؟

حالا نسبت قد حمید به مجید به سعید، ۹ به ۶ به ۵ است. پس حمید بلندقدترین است.

$\frac{\text{حمید}}{\text{مجید}} = \frac{3\times3}{2\times3} = \frac{9}{6}$

$\frac{\text{مجید}}{\text{سعید}} = \frac{6}{5}$

- تسهیم نسبت، یعنی سهم هرکسی از کل مقداررا به نسبتی که دارد، تعیین کنیم.

مثال: نسبت وزن سارا، تارا و گل آرا به ترتیب $\frac{1}{2}$ ، ۲ و ۱ است. اگر مجموع وزن آنها ۱۴۰ کیلوگرم باشد، وزن سارا را بدست آورید.. ابتدا همه نسبت ها را در ۲ ضرب میکنیم تا از حالت کسری خارج شوند.

سارا : ۱　　تارا : ۴　　گل آرا: ۲

	۲۰
۱ سارا	
۴ تارا	۸۰
۲ گل آرا	۴۰
۷ مجموع نسبت‌ها	۱۴۰

×۲۰

- اختلاف و مجموع کمیت ها هم به همان نسبت تغییر می کند و با خود کمیت ها متناسب است.

مثال: نسبت تعداد کتاب های احسان به ایمان، ۳ به ۵ است. اگر احسان ۱۰ جلد کتاب کم تر از ایمان داشته باشد، احسان چند جلد کتاب دارد؟ اختلاف نسبت ها: ۲= ۳-۵

۳ کتابهای احسان	؟	۱۵
۲ اختلاف	۱۰	

درس چهارم: درصد

- نسبتی که مخرج آن ۱۰۰ باشد را «درصد» می گوییم. هر عددی با علامت درصد را می توانیم به صورت کسری با مخرج ۱۰۰ هم بنویسیم.
- اگر صورت کسری از مخرج آن بزرگتر باشد. درصد آن بیش از ۱۰۰٪می باشد.

مثال: بیست و پنج درصد پولی ۵۰ تومان است. ۱۸ درصد آن چقدر است؟

۲۵	۵۰	
۱۰۰	؟	۲۰۰

کل پول: ۴۰۰

۱۸	؟	۷۲
۱۰۰	۴۰۰	

- مسائل مربوط به تخفیف(کاهش): در این نوع مسائل معمولا با موارد زیر سروکار داریم:

۱. قیمت اولیه کالا
۲. قیمت کالا پس از تخفیف
۳. مقدار تخفیف
۴. درصدتخفیف
۵. تخفیفات متوالی

نکته: به جای کلمه ی «تخفیف» از کلمه «کاهش» و «درصدکاهش» نیز می توانیم استفاده کنیم.

مثال: تولیدات کارخانه ای پس از ۱۰ درصدکاهش به ۱۸۰۰تُن در سال رسیده است. میزان تولیدات این کارخانه قبل از کاهش، چقدر بوده است؟　　٪۹۰= ٪۱۰ - ٪۱۰۰

بعد کاهش	۹۰		۱۸۰۰
کل	۱۰۰	؟	۲۰۰۰

مثال: فروشنده ی کالایی ۲۰ درصد تخفیف به خریداران می دهد. ولی به دلیل عدم استقبال مشتریان، ۱۰درصد دیگر نسبت به قیمت جدید، تخفیف می دهد. اگر قیمت اولیه ی کالا ۲۰۰۰۰۰تومان بوده باشد، یک مشتری برای خرید آن چقدر باید بپردازد؟　　٪۹۰= ٪۱۰ - ٪۱۰۰　　٪۸۰= ٪۲۰ - ٪۱۰۰

درصد پرداخت نهایی $\frac{۷۲}{۱۰۰} = \frac{۹۰}{۱۰۰} \times \frac{۸۰}{۱۰۰}$

پرداخت نهایی	۷۲	؟	۱۴۴۰۰۰
قیمت اولیه	۱۰۰		۲۰۰۰۰۰

- در تخفیفات متوالی، تخفیفات اهمیتی ندارد. مثلا در مثال قبلی اگر ابتدا ۱۰ درصد و پس از آن ۲۰درصد تخفیف متوالی در نظر می گرفتیم. بازهم جواب همین بود.
- اگرقیمت جنسی برابر با W باشد و آن جنس را در مرتبه ی اول با A درصد تخفیف و در مرحله دوم با B درصد تخفیف ارائه دهیم. قیمت نهایی جنس برابر است با:

درصد قابل پرداخت در مرحله اول $(\%C) = ۱۰۰ - A$　　درصدقابل پرداخت در مرحله دوم $(\%D) = ۱۰۰ - B$

درصد پرداخت نهایی $(\%E) = \%D \times \%C$　　قیمت نهایی $= (W \times E) \div ۱۰۰$

- در بعضی مسائل کاهش و افزایش را با هم داریم.

مثال: قیمت کالایی سال پیش ۱۸۰۰۰ تومان و امسال ۲۴۰۰۰تومان است. چنددرصد افزایش داشته است؟

مقدار افزایش ۶۰۰۰= ۱۸۰۰۰- ۲۴۰۰۰

مقدارافزایش یافته	۶۰۰۰	؟	۳۳/۳
قیمت اولیه	۱۸۰۰۰	۱۰۰	

مثال: جمعیت یک روستا، سالی ۱۰٪ افزایش دارد. اگر جمعیت فعلی روستا ۲۰۰۰ نفر باشد. پس از دوسال جمعیت این روستا به چند نفر خواهد رسید؟ $\frac{۱۱۰}{۱۰۰} \times \frac{۱۱۰}{۱۰۰} = \frac{۱۲۱}{۱۰۰}$

جمعیت پس از افزایش	۱۲۱	؟ ۲۴۲۰
جمعیت اولیه	۱۰۰	۲۰۰۰

- اگرقیمت جنسی برابر با W باشد و آن جنس را در مرتبه ی اول با A درصد سود و در مرحله دوم با B درصد سود ارائه دهیم. قیمت نهایی جنس برابر است با:

B + ۱۰۰ = (٪D)درصدقابل پرداخت در مرحله دوم   A + ۱۰۰=(٪C)درصد قابل پرداخت در مرحله اول

۱۰۰ ÷ (E × W)= قیمت نهایی   ٪C × ٪D=(٪E) درصد پرداخت نهایی

✓ ترتیب تخفیف های متوالی تأثیری در مقدار تخفیف نهایی ندارد. یعنی روی یک کالا تخفیف ۲۰٪ و سپس ۳۰٪ با تخفیف ۳۰٪ و سپس ۲۰٪ هیچ تفاوتی ندارد. و پاسخ هر دو یکسان است.

✓ اگر A٪ از قیمت کالایی کم کنیم برای آنکه آن را به قیمت اولیه بازگردانیم باید به آن قیمت $\frac{۱۰۰\times A}{۱۰۰-A}$ درصد اضافه کنیم.

✓ اگر A٪ به قیمت کالایی اضافه کنیم برای آنکه آن را به قیمت اولیه بازگردانیم باید از آن قیمت $\frac{۱۰۰\times A}{۱۰۰+A}$ درصد کم کنیم.

مقدار کاهش یافته/مقدار تخفیف		درصد تخفیف
قیمت اولیه/مقدار کل	۱۰۰	درصد کل
قیمت نهایی/مقدار نهایی		درصد نهایی

مقدار افزایش یافته/مقدارسود		درصد سود
قیمت اولیه/مقدار کل	۱۰۰	درصد کل
قیمت نهایی/مقدار نهایی		درصد نهایی

درصد کل = درصد نهایی + درصد تخفیف   مقدار کل = مقدار نهایی + مقدار نخفیف

درصد نهایی= درصد کل + درصد تخفیف   مقدار نهایی= مقدار کل + مقدار تخفیف

فصل چهارم : تقارن و اندازه گیری طول و زاویه

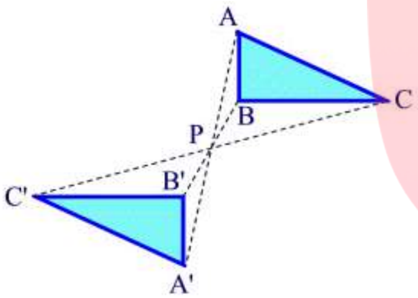
تقارن

برای پیدا کردن قرینه هر شکل ابتدا گوشه های هر شکل را با حروف الفبا نامگذاری می کنیم سپس در تقارن مرکزی از هر نقطه نامگذاری شده با خط کش به مرکز تقارن وصل کرده وبه همان اندازه ادامه می دهیم وقتی قرینه همه نقاط مشخص شد این نقاط را به ترتیب بر اساس شکل به هم وصل می کنیم.

- **قرینه نسبت به یک نقطه:**

یک شکل نسبت به یک نقطه قرینه شود که آن نقطه را نقطه مرکزی می گوییم. برای پیدا کردن قرینه هر شکل اول تمام راسهای یک شکل را نام گذاری می کنیم وفاصله هر راس را تانقطه مرکزی با خط کش اندازه می گیریم وبه همان فاصله از نقطه در جهت دیگر ادامه داده علامت می زنیم. در آخر تمام نقاط را به هم وصل می کنیم.در تقارن مرکزی اندازه شکل تغییر نمی کند.اما جهت تغییر می کند

در تصویر زیر نقاط A و C نسبت به نقطه مرکزی Pقرینه شدند. نکته: نقطه مرکزی Pنقطه میانی پاره خط $C'C$و$A'A$ قرار می گیرد.



در حقیقت شکل حول یک نقطه دوران می کند. یا دوران موافق حرکت عقربه ساعت است یا عکس حرکت عقربه های ساعت. شکل سمت چپ مخالف عقربه ساعت دوران کرده. شکل به یک اندازه (ایزومتریک- دارای یک میزان، هم اندازه)انتقال یافته

اما جهت تغییر کرده.

خصوصیات شکل قرینه شده در تقارن مرکزی (نقطه مرکزی) :

۱. فاصله (طولهای پاره خط راس تا نقطه =فاصله نقطه تا راس قرینه نظیر)
۲. اندازه زاویه ها (همان اندازه)
۳. تقارن خطوط موازی (درقرینه هم همان خطوط موازیند.)
۴. جهت (در تقارن مرگزی معکوس)
۵. نقطه میانی (نقاط واقع بر هر خط در رسم قرینه وسط خطوط می ماند)مثل نقطه مرکزی ونقطه های که شکل نسبت به ان قرینه شده وسط
۶. حروف علامت گذاری (در قرینه از همان حروف شکل اصلی می توان استفاده کرد.)

مشخصات: شکلی که نسبت به یک نقطه P قرینه شود فاصله راس A تا نقطه مرکزی P مساوی فاصله نقطه مرکزیP تا نقطه قرینه A' ونقطه Pوسط $A'A$هست.

تقارن مرکزی در حقیقت دوران یک شکل حول یک نقطه به اندازه دوران ۱۸۰°

- وقتی قرینه یک شکل را نسبت به نقطه پیدا کنیم و شکل و قرینه اش روی هم قرار بگیرند، اگر شکل مرکز تقارن داشته باشد، می گوییم آن شکل تقارن مرکزی دارد و آن نقطه، مرکزتقارن شکل است.

- **قرینه نسبت به یک خط**:

قرینه شکل نسبت به خط k به طرف دیگر(خط rk) انتقال می یابد .

یعنی هر نقطه از شکل اصلی مثلC تا خط همان اندازه فاصله دارد که نقطه قرینهC' (طرف دیگرخط) تا خط همان اندازه فاصله دارد. اندازه قرینه شکل نسبت به خط تغییر نمی کند. اما جهت شکل تغییر کرده

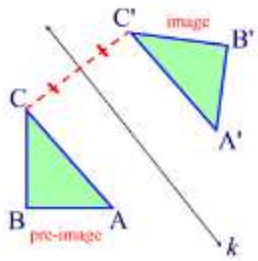
قرینه مثلث ABC= مثلث$A'B'C'$

توجه با رسم قرینه هر نقطه نسبت به خط می بینیم که خط تقارن عمود بر تمام فاصله هر نقطه تا نقطه قرینه است.

شکل به یک اندازه (ایزومتریک- دارای یک میزان، هم اندازه)انتقال یافته اما جهت تغییر کرده.

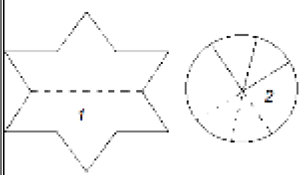
خصوصیات شکل قرینه شده در تقارن نسبت به خط :

۱. فاصله (طولهای پاره خط راس تا خط =فاصله خط تا راس قرینه نظیر)
۲. اندازه زاویه ها (همان اندازه)
۳. قرینه خطوط موازی (درقرینه هم همان خطوط موازیند.)
۴. جهت شکل (در تقارن نسبت به خط برگردان شده)
۶. حروف علامت گذاری (در قرینه از همان حروف شکل اصلی می توان استفاده کرد.)



- قرینه یک نقطه نسبت به یک خط، در صورتیکه آن نقطه، روی همان خط باشد همان نقطه خواهد بود.

- وقتی قرینه یک شکل را نسبت به خط تقارن پیدا کنیم و شکل و قرینه اش روی هم قرار بگیرند، می گوییم آن شکل تقارن محوری دارد و آن خط، خط تقارن شکل است.

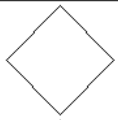
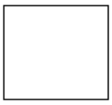
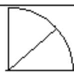
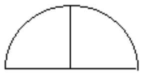
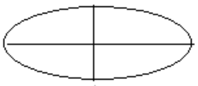
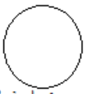
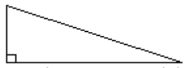
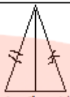
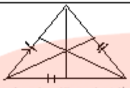
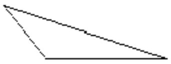
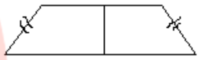
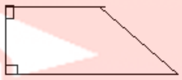
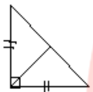
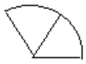
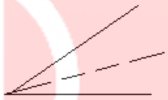
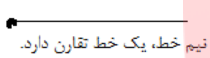


- **خط تقارن (محور تقارن)**:

محور تقارن یک شکل، خطی است که قرینه ی شکل نسبت به آن خط، بر خود شکل منطبق شود. (۱)

- **مرکز تقارن**:

نقطه ای است که قرینه ی نقاط شکل نسبت به آن نقطه، بر خود شکل کاملا منطبق شود. (۲) مرکز دایره، مرکز تقارن است. و در متوازی الاضلاع، مربع، مستطیل، لوزی، دایره و بیضی، محل برخورد قطرها، مرکز تقارن می باشد.

 متوازی الاضلاع خط تقارن ندارد. مرکز تقارن دارد	 لوزی دو خط تقارن دارد مرکز تقارن دارد	 مستطیل ۲خط تقارن دارد. مرکز تقارن دارد	 مربع ۴ خط تقارن دارد. مرکز تقارن دارد
 ربع دایره، یک خط تقارن دارد مرکز تقارن ندارد.	 نیم دایره، یک خط تقارن دارد مرکز تقارن ندارد	 بیضی، دو خط تقارن دارد مرکز تقارن دارد	 دایره، بیشمار خط تقارن دارد مرکز تقارن دارد.
 مثلث قائم الزاویه، خط تقارن ندارد مرکز تقارن ندارد	 مثلث متساوی الاضلاع، یک خط تقارن دارد مرکز تقارن ندارد	 مثلث متساوی الاضلاع، ۳خط تقارن دارد مرکز تقارن ندارد	 مثلث مختلف الاضلاع، خط تقارن و مرکز تقارن ندارد
 ذوزنقه ی متساوی الساقین،۱خط تقارن دارد. مرکز تقارن ندارد	 ذوزنقه قائم الزاویه، خط تقارن و مرکز تقارن ندارد	 ذوزنقه غیرمشخص، خطتقارن و مرکز تقارن ندارد	 مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، یک خط تقارن دارد. مرکز تقارن دارد
 بخشی از دایره، یک خط تقارن دارد. مرکز تقارن ندارد	 زاویه، یک خط تقارن داردکه نیمسازآن است مرکز تقارن ندارد.	 پاره خط، دو خط تقارن دارد، یکی خودش و دیگری عمودمنصف‌آن. مرکز تقارن ندارد.	خط بیشمار خط تقارن دارد. مرکز تقارن ندارد  نیم خط، یک خط تقارن دارد. خودش خط تقارن می باشد.

چند ضلعی منتظم:

هرگاه در چند ضلعی، همه ضلع ها با هم مساوی و همه ی زاویه ها با هم مساوی باشند به آن، چندضلعی منتظم می گویند. مثلث متساوی الاضلاع یک سه ضلعی منتظم و مربع یک چهار ضلعی منظم است. چند ضلعی های منتظم به تعداد ضلع ها خط تقارن دارند، مثلا پنج ضلعی منتظم، پنج خط تقارن دارد و یا هشت ضلعی منتظم، هشت خط تقارن دارد.

- در هشت ضلعی منتظم، محل برخورد خط های تقارن، مرکز تقارن نام دارد. اما پنج ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.
- در چند ضلعی های منتظم، اگر تعداد اضلاع چندضلعی منتظم زوج باشد، محل برخورد خطهای تقارن، مرکز تقارن می باشد. اما اگر تعداد اضلاع چندضلعی منتظم فرد باشد، این شکل مرکز تقارن ندارد.

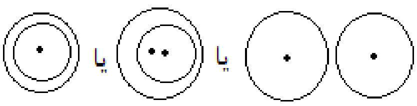
چند نکته مهم

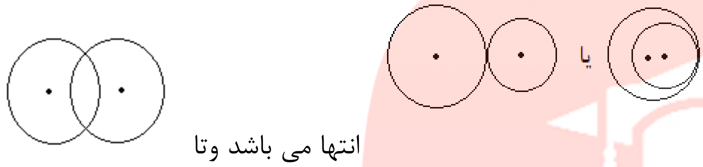
- یک مثلث حداکثر می تواند سه خط تقارن داشته باشد. (مثلث متساوی الاضلاع)
- ذوزنقه حداکثر می تواند یک خط تقارن داشته باشد. (ذوزنقه متساوی الساقین)
- دایره بی شمار، خط تقارن دارد، اما قسمتی از دایره، فقط یک خط تقارن دارد.
- متوازی الاضلاع خط تقارن ندارد، اما محل برخورد قطرها، مرکز تقارن متوازی الاضلاع می باشد.
- هر قطر دایره، یک خط تقارن آن است و مرکز دایره، مرکز تقارن آن می باشد.
- در دایره، مربع، لوزی، بیضی قطرها خط تقارن هستند.
- هرگاه قرینه ی یک مثلث قائم الزاویه ی مختلف الاضلاع را نسبت به وتر آن رسم کنیم، شکل حاصل، چهارضلعی است که حتما دو زاویه قائمه دارد.

- هرگاه قرینه ی یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین را نسبت به وتر آن رسم کنیم، شکل حاصل حتما مربع است.

دو دایره ی متمایز(جدا از هم) نسبت به هم، دارای حالات زیر هستند.

۱. دو دایره همدیگر را قطع نمی کنند.(برخورد نمی کنند)
۲. دو دایره همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
۳. دو دایره همدیگر را در دو نقطه قطع می کنند.

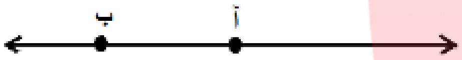




اندازه گیری طول و زاویه

خط: خط از نقطه ها تشکیل شده است که بدون ابتدا و انتها می باشد وتا بی نهایت ادامه دارد. خط انواع مختلفی دارد که شامل:

پاره خط : قسمتی از یک خط را که بین دو نقطه قرار گرفته است "پاره خط" می نامند. پاره خط را با نام نقاط دو سر آن نام گذاری میکنیم.

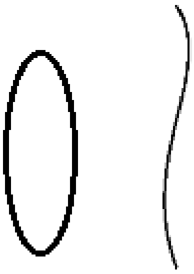


نیم خط : قسمتی از یک خط از یک طرف یا یک نقطه جدا شده است "نیم خط" مینامند. نیم خط را ابتدا با نام نقطه (حروف بزرگ) سپس نام یک سرخط نامگذاری می کنیم.

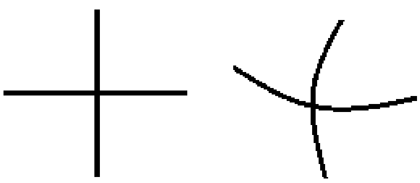
خط راست : به خطی گفته می شود که در یک امتداد و یک راستا باشد مانند خط کشی برای اندازه گیری یک ضلع مربع.

خط شکسته : به خطی که صاف و مانند خط راست نیست بلکه مانند یک مربع گوشه هایی دارد. این نوع خط به دو حالت است که عبارت است از : خط شکسته ی باز مانند دو خـــــط که همدیگر را قـــــطع ولی از هم نگذرند و خط شکسته ی بسته مانند مربع، مثلث ، مستطیل ، لوزی

خط خمیده : خطی است که مانند خط شکسته می مانند ولی با این تفاوت که گوشه ای در کار نمی باشد . این نوع خط نیز به دو حالت است که عبارت است از : خط خـــــــــــــــمیده ی باز مانند : حرف **C** در الفبای انگلیسی یا عدد هشت که اگر شکل شکسته ی بالای آن خمیده باشد خط خمیده ی باز است و خط خمیده ی بسته مانند : یک دایره یا یک بیضی.



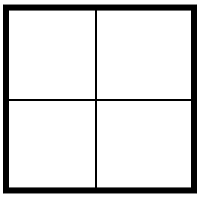
خطوط متقاطع : به دو خط که به هر یک از شکل های بالا باشد و همدیگر رادر یک نقطه قطع کنند(یک نقطه مشترک داشته باشند)دو خط متقاطع می گویند . مانند: ضربدر .



خطوط عمود : به دو خط راست که همدیگر را قطع و محل برخورد آنها یک زاویه ی ۹۰ درجه را درست کند برای فهمیدن این تعریف یک مربع یا یک مستطیل بکشید و شکل گوشه های آن را مشاهده کنید که آن گوشه را زاویه ۹۰ و رابطه ی آن دو خط همان گوشه را با هم را عمود نامیده.

خط تقارن : خط تقارن همان محل تا خوردگی است که دو نیمه کاملاً بر هم منطبق بوده و مساوی هم باشند .

- برای رسم کردن یک خط ، کافی است دو نقطه از آن را داشته باشیم .
- هر پاره خط فقط یک نقطه وسط ویک عمود منصف دارد .
- فاصله یک نقطه از خط برابر است با کوتاه ترین فاصله یعنی خط عمود از آن نقطه بر خط .



خط موازی : به دو خط که فاصله ی بین آن ها در همه نقاط یکسان بوده وهر چه آن ها را ادامه دهیم یکدیگر را قطع نکنند دو خط موازی گفته می شود .

طریقه رسم دو خط موازی :

۱– با استفاده ازخط کش (مشخص کردن دو نقطه به یک فاصله از خط)

۲– با استفاده از گونیا (رسم دو خط عمود بر یک خط)

- اگر دو خط بر یک خط عمود باشد آن دو خط با هم موازیند .
- فاصله دو خط موازی برابر است با فاصله ی یک نقطه از یک خط تا خط دیگر .

قطر: پاره خطی است که دوزاویه غیرمجاور(دو رأس غیرمجاور)را درچند ضلعی ها به هم وصل می کند.

تعداد قطرهای هر شکل = {(تعداد اضلاع)× (۳-تعداد اضلاع)}÷۲

تعداد قطر از هر رأس چند ضلعیها =تعداد اضلاع-۳

تعداد اضلاع مقابل هر رأس = تعداد اضلاع -۲

- مثلث ها قطر ندارند. چهارضلعی ها ۲قطر دارند. پنج ضلعی ها ۵قطردارند.

شش ضلعی ها ۶ قطردارند. هشت ضلعی ها۲۰قطردارند دایره بیشمار قطر دارد

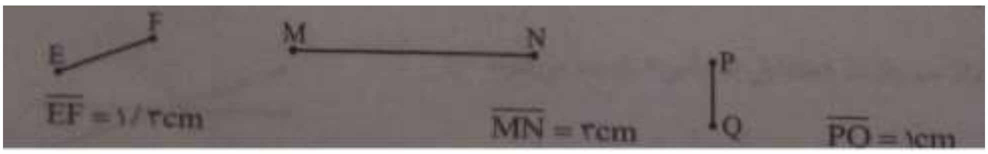
اندازه یا طول پاره خط :

فاصله ی بین نقاط دو سر هر پاره خط را که با خط کش اندازه گیری می کنیم ، اندازه یا طول پاره خط می نامند. برای نشان دادن اندازه ی پاره خط ، روی نام پاره خط یک خط تیره قرار میدهیم.

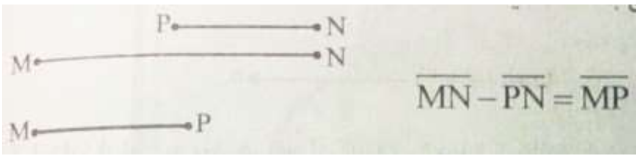
- مقایسه ی پاره خط ها معمولا با توجه به طول آن ها صورت می گیرد.

جمع و تفریق پاره خط ها:

در جمع پاره خط ها ، آن هارا دنبال هم قرار داده تا پاره خط حاصل جمع ، به دست آید.



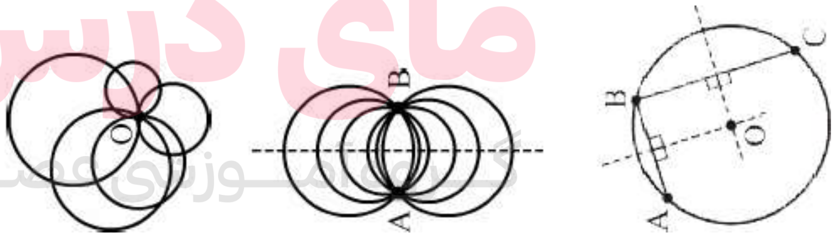
در تفریق پاره خط ها ، آن ها را روی هم قرار داده ، تا پاره خط حاصل تفریق به دست آید.



- نسبت بین پاره خط ها را میتوان با توجه به اندازه یا طول پاره خط ها به دست آورد.
- رابطه هایی که میتواند بین پاره خط ها برقرار باشد نیز بر اساس اندازه های آنهاست که با روابط بزرگتری ، کوچکتری و مساوی نشان داده میشوند.

یک سری نکات در مورد این مباحث :

- از یک نقطه بی شمار خط میگذرد.
- از دو نقطه فقط یک خط میگذرد.
- اگر نقاط تشکیل دهنده ی پاره خط ها روی یک خط قرار داشته باشند می توان با حذف نقطه ی مشترک حاصل جمع یا تفریق را به دست آورد.
- از یک نقطه بی شمار دایره می گذرد، که مرکز این دایره ها هر نقطه ای در صفحه به غیر از خود نقطه است.
- از دو نقطه ی A , B در صفحه بی شمار دایره می گذرد که مکان هندسی مراکز این دایره ها خط عمود منصف پاره خط AB می باشد
- از سه نقطه ی غیر واقع بر یک خط راست، تنها یک دایره می گذرد که همان دایره ی محیطی مثلثی است که سه نقطه ی مذکور رئوس آن می باشند.
- از سه نقطه ی واقع بر خط راست، هیچ دایره ای نمی گذرد.



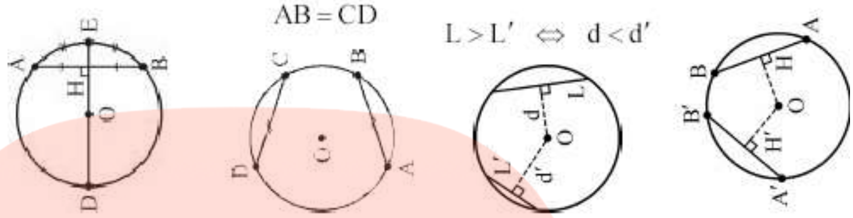
- در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف میکند. و خطی که مرکز یک دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می کند بر آن وتر عمود است.
- در یک دایره، کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند.
- در یک دایره، از دو وتر نابرابر ؛ آن که بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است.
- در هر دایره، واترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله اند و بر عکس.

$OH = OH' \Updownarrow AB = A'B'$

$L > L' \Leftrightarrow d < d'$

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Updownarrow AB = CD$

$$\begin{cases} \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \\ AH = HB \end{cases} \Updownarrow OH \perp AB$$



تعداد نیم خط ها

تعدادنیم خطها روی خط راست = تعداد نقاط ×۲

تعداد نیم خط ها روی نیم خط = تعداد نقاط ×۱

تعداد نیم خط ها روی پاره خط = تعداد نقاط ×۰

- هرگاه چند نقطه ی متمایز، بر روی یک خط راست باشند، تعداد کل نقاط برابر است با تعداد نقاط گفته شده.
- هرگاه چند نقطه ی متمایز، بر روی یک نیم خط باشند، تعداد کل نقاط برابر است با تعداد نقاط گفته شده + ۱ که این همان نقطه ی ابتدایی نیم خط است.
- هرگاه چند نقطه ی متمایز، بر روی یک پاره خط باشند، نیم خطی در شکل وجود ندارد.

تعداد پاره خط ها

تعداد پاره خط ها = (تعداد نقاط × تعدادفاصله ها)÷۲

روش دوم برای این کار این است که ابتدا فاصله ی بین نقاط را شماره گذاری کرده و سپس آنها را با هم جمع کنیم.

- فرمول ذکر شده فقط زمانی کاربرد دارد که شکل ما فقط یک خط یا نیم خط یا پاره خط باشد.
- چنانچه شکل از چند پاره خط یا ... تشکیل شده باشد باید نیم خط یا پاره خط های هر قسمت را بطور جداگانه محاسبه کرده و با هم جمع کرد.

مقایسه و اندازه گیری زاویه ها

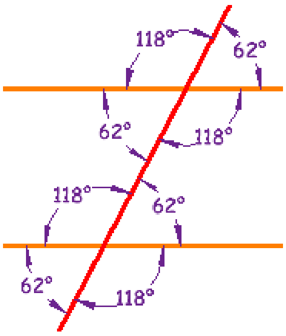
زاویه: دو نیم خط با مبدأ مشترک را زاویه گویند. بعبارتی دو نیم خط همدیگر را در نقطه ای قطع کنند زاویه تشکیل می گردد و نقطه برخورد دو نیم خط را رأس زاویه می نامند.

اضلاع زاویه: به هر کدام از دو نیم خط تشکیل دهنده زاویه اضلاع زاویه می نامند.

رأس زاویه : محل برخورد و نقطه مشترک دو نیم خط را رأس زاویه می گویند .

نام گذاری زاویه : برای نام گذاری زاویه از سه حرف یا یک حرف (حرف رأس) استفاده می شود . اگر با سه حرف نام گذاری کردیم حتماً باید حرف رأس زاویه در وسط دو حرف دیگر باشد .

گونیا : وسیله ای است که به کمک آن می توان زاویه راست (قائمه) رسم کرد .



- برای تشخیص دادن زاویه راست از گونیا استفاده می کنیم .

نقاله: وسیله ای است برای اندازه گیری و رسم زاویه ها.

نیمساز زاویه : نیم خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند .

- با استفاده از پرگارنیمساز زاویه را رسم می کنیم .

صفحه بین دو ضلع: فاصله بین دو ضلع زاویه را صفحه زاویه می نامند.

- واحد اندازه گیری زاویه, درجه است. که اندازه ان برابر ۱/۹۰ زاویه قائمه است.
- وسیله اندازه گیری زاویه ، نقاله است.

انواع زاویه

زاویه صفر : زاویه ای است که دو ضلع آن کاملا بر هم منطبق شده است و طبیعتا اندازه ی آن صفر درجه است.

زاویه تند (حاده) : زاویه ای که از زاویه راست(قائمه- ۹۰درجه) کوچکتر است. اندازه ی آن بین صفر و ۹۰درجه است

زاویه راست (قائمه یا ۹۰درجه) : بوسیله ی گوشه ای گونیا آن را رسم می کنیم.برابر با ۹۰ درجه است.

زاویه باز (منفرجه) : زاویه ای که از زاویه راست یا قائمه(۹۰درجه) بزرگتر است و از زاویه نیم صفحه (۱۸۰درجه)کوچکتر است. اندازه ی آن بین ۹۰ و ۱۸۰درجه است

زاویه نیم صفحه(۱۸۰درجه) : زاویه ای که دو برابر زاویه راست است. برابر با ۱۸۰درجه است. با خط کش می توان رسم کرد.

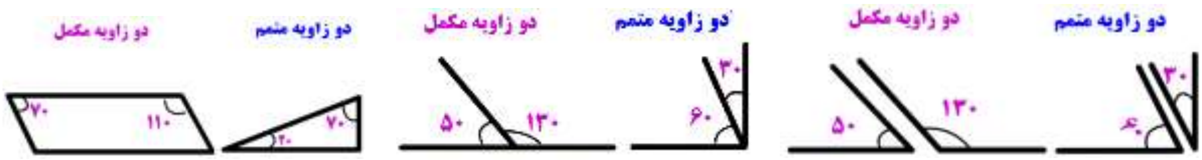
- در حقیقت زاویه نیم صفحه نوعی زاویه ی باز خاص است که دو ضلع زاویه در امتداد هم بوده و در خلاف جهت همدیگر هستند.

زاویه های متمم: دو زاویه را متمم گویند که مجموعشان ۹۰درجه باشد.

انواع زاویه های متمم: مجاور هم درون شکل جدا از هم

زاویه های مکمل: دو زاویه را مکمل گویند که مجموعشان ۱۸۰درجه باشد.

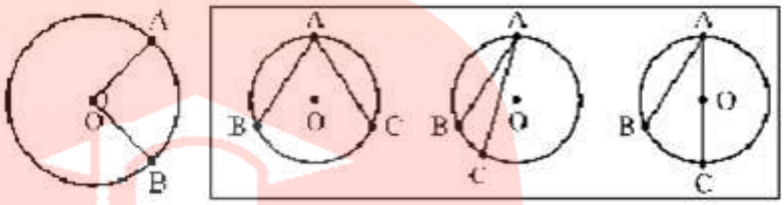
انواع زاویه های مکمل: مجاور هم درون شکل جدا از هم



زاویه های متقابل به رأس: دو زاویه که رأس مشترک دارند و اضلاع آنها دو به دو بر امتداد یکدیگر و در جهات مختلف باشد.

زاویه مرکزی: زاویه ای است که رأس آن بر مرکز دایره و اضلاعش شعاع هایی از دایره است و اندازه اش برابر است با کمان رو به رویش لذا واحد اندازه گیری کمان هم، همان واحد اندازه گیری زاویه نام دارد.

زاویه محاطی: زاویه ای است که رأس آن بر محیط دایره و اضلاعش وترهایی از دایره است و اندازه اش برابر است با نصف کمان روبه رویش؛ لذا واحد اندازه گیری کمان هم، همان واحد اندازه گیری زاویه نام دارد. هر تعداد زاویه ی محاطی که کمان روبرویشان با هم برابر باشد از نظر اندازه با هم برابرند.



زاویه مجاور: به دو زاویه که در رأس و یک ضلع مشترک هستند. و دو ضلع دیگر زاویه ها در دو طرف ضلع مشترک قرار دارد.

زاویه مجانب: به دو زاویه مجاور و مکمل دو زاویه مجانب می گویند.

- هر زاویه مجانب ، زاویه مکمّل است ولی هر زاویه مکمّل، زاویه مجانب نیست

زاویه کاو(برآمده یا محدب): زاویه ای است که اندازه آن بین ^{O} ۱۸۰ و۳۶۰ درجه است.

زاویه کوژ : زاویه ای که اندازه آن کمتراز ۱۸۰درجه باشد.

زاویه تمام صفحه: یا دایره ی کامل. زاویه ای که اندازه اش ۳۶۰درجه است.

- بزرگترین زاویه، زاویه تمام صفحه است.
- دوعدد طبیعی باید با هم برابر باشند تا حاصلضرب آنها بیشترین مقدار ممکن باشد.
- زاویه ی بین دو نیمساز همیشه برابر است با نصف مجموع دو زاویه.
- اگر یک برگ کاغذ را به هر صورت دو بار تا بزنید. مجموع زوایای حاصل در محل تا خوردگی همیشه برابر ۳۶۰ درجه است.
- از برخورد یک خط اریب با دو خط موازی ۸ زاویه ی حاده و منفرجه به وجود می آید. که زوایای حاده با یکدیگر برابر دو زوایای منفرجه نیز با یکدیگر مساوی می باشند.

اندازه گیری زاویه

وسیله ی اندازه گیری زاویه نقاله نام دارد.

واحد استاندارد اندازه گیری زاویه درجه نام دارد.

یک درجه برابر (یک ، سیصدو شصتم) یک دایره ی کامل است. به عبارت دیگر اگر یک دایره ی کامل را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت آن یک درجه است.

برای اندازه ی گیری زاویه، همانند طول که واحد هایی همچون متر،اینچ و ... دارد و قابل تبدیل به یکدیگر می باشند، ۳ واحد مرسوم وجود دارد.

۱- درجه: هرگاه محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویه ی مرکزی رو به رو هر قسمت را یک درجه می نامند درجه را با D نشان می دهیم.

۲- گراد: هرگاه محیط دایره را به ۴۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، زاویه ی مرکزی روبرو به هر قسمت را یک گراد می نامند و گراد را با G یا gr کنار یک عدد نشان می دهیم.

۳- رادیان: هرگاه کمانی از دایره را انتخاب کنیم که در ازای آن (طول) مساوی شعاع دایره باشد، زاویه ی مرکزی رو به روی آن را یک رادیان می نامند و آن را با R نشان می دهیم.

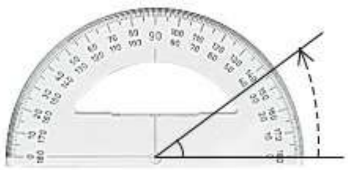
روش اندازه گیری زاویه با نقاله :

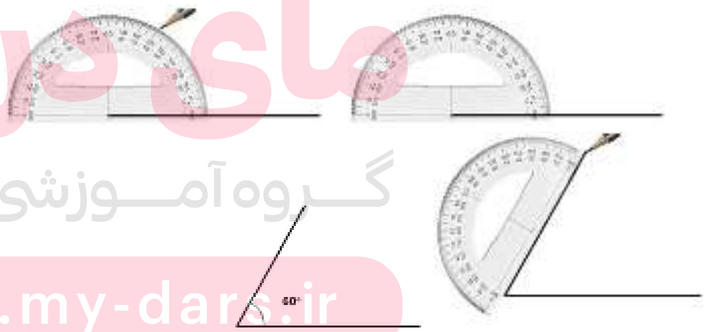
نقاله را روی زاویه طوری قرار دهید که یکی از ضلع ها روی خط راست پایین نقاله باشد. نقاله را طوری حرکت بدهید که ضلع روی خط نقاله حرکت کند و نقطه ی مرکز نقاله روی راس زاویه قرار گیرد. حالا ضلع دیگر زاویه روی درجه بندی نقاله قرار دارد . دقت کنید که برای خواندن زاویه از صفر شروع کرده و اندازه ی زاویه را بخوانید. این زاویه $36°$ است.

روش رسم زاویه با نقاله

رسم کردن زاویه به همان سادگی اندازه گیری آن است. مثال: یک زاویه $60°$ رسم کنید.

۱. با یک خط صاف شروع می کنیم. اول یک خط صاف می کشیم. ۲. خط نقاله را روی خط (یک ضلع زاویه) قرار می دهیم. دقت کنید که مرکز نقاله روی نقطه ی آخر خط قرار گیرد. این نقطه راس زاویه است. ۳. از صفر شروع کرده و ۶۰ درجه را علامت می زنیم. ۴. با خط کش از نقطه علامت گذاری یک خط به راس زاویه رسم می کنیم ۵. زاویه را با یک منحنی مشخص می کنیم و روی آن اندازه ی زاویه را می نویسیم.





مجموع زوایای داخلی

- مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.

۱۸۰×(۲-تعداد اضلاع) = **مجموع زوایای داخلی**

۲- تعداد اضلاع= **تعداد مثلثهای حاصل از رسم قطرهای یک رأس**

۱۸۰×(۴-تعدادپر) = **مجموع زوایای داخلی ستاره**

۱+۲÷(۱+تعداد خط)×(تعداد خط ها) = **محاسبه خطوطی که صفحه را به قسمت های مختلف تقسیم می کند.**

مجموع زوایای خارجی

مجموع زوایای خارجی تمام اشکال هندسی ۳۶۰ درجه می باشد.

تعداد زاویه ها

۲÷(تعدادنیم خط ها×تعداد پاره خط ها) = **تعداد زاویه ها**

- اندازه زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور
- هرشکلی به اندازه اضلاع خودش زاویه دارد.
- اشکال منتظم اشکالی هستند که اضلاع و زاویه هایشان با هم برابر باشد.
- هرگاه دو یا چند خط موازی را یک خط مورب قطع کند زاویه های تند بدست آمده با هم برابرند و همه ی زاویه ها ی باز بدست آمده باهم برابرند.
- وتر دایره, پاره خطی است که یک نقطه روی محیط دایره را به نقطه ای دیگر روی محیط دایره وصل می کند.
- یک دایره بی شما وتر دارد.
- بزرگترین وتر دایره قطر دایره است.

فرمول بدست آوردن زاویه بین عقربه های ساعت

برای محاسبه زاویه‌ی بین دو عقربه‌ی ساعت شمار و دقیقه شمار ، مقدار ساعت را در عدد ۳۰ ضرب کرده، مقدار دقیقه را در عدد۵/۵ ضرب کرده، عدد کوچک تر را از عدد بزرگ تر کم می کنیم.

(۵/۵ × دقیقه) **−** (۳۰ × ساعت) = **زاویه داخلی بین عقربه های ساعت**

اندازه ی زاویه داخلی **−** ۳۶۰درجه = **زاویه خارجی بین عقربه های ساعت**

- در صورتی که جواب به دست آمده از ۱۸۰ درجه بیش‌تر باشد در این صورت زاویه محدب بین دو عقربه محاسبه شده است در نتیجه باید آن را از ۳۶۰ کم می کنیم.
- اگر پس از اینکه عددهای داخل پرانتزها را بدست آوردید، حاصل پرانتز دوم از اول بیشتر شد جای پرانتزها را عوض می کنیم.
- اگر در مسئله ای زاویه بین عقربه های ساعت در زمان ۱۸:۴۲ را خواستند. حتما عدد چنین ساعت هایی را به بعدازظهر تبدیل کنید. (ساعت: ۱۸:۶) در این فرمول نباید عدد ساعت از ۱۲ بیشتر باشد.
- در یک دور صفحه ساعت که معادل ۱۲ ساعت است. عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار ۱۱بار از روی هم عبور می کنند پس در هر شبانه روز این دو عقربه ۲۲بار از روی هم عبور می کنند و در نتیجه ۲۲ بار زاویه بین عقربه ها صفر می شود.
- در یک دور صفحه ساعت که معادل ۱۲ ساعت است. عقربه های ساعت شمار و دقیقه شمار ۲۲بار با هم زاویه قائمه می سازند. پس در هر شبانه روز این دو عقربه ۴۴بار با هم زاویه قائمه می سازند.

درمورد مثلث ها

اجزای اصلی مثلث: ضلع ها و زاویه ها

اجزای فرعی مثلث: ارتفاع، میانه، نیمساز، عمودمنصف

نیمساز: پاره خطی است که زاویه را نصف می کند. (هرمثلث سه نیمساز زاویه داخلی و سه نیمساز زاویه خارجی دارد.)

میانه: پاره خطی است که از یک رأس به وسط ضلع مقابل رسم می شود. میانه مثلث را به دو مثلث با مساحت های مساوی تقسیم می کند.

- کابرد نیمساز در زندگی روزانه: اگر ساعت مچی عقربه دار خود را در کف دست به حالت افقی نگه داریم. طوریکه عقربه ساعت شمار بطرف خورشید باشد، در این حالت نیمساز زاویه ای که بین عقربه ی ساعت شمار و عدد ۱۲ تشکیل شده جنوب را نشان می دهد.

ارتفاع: پاره خطی است که از یک رأس بر ضلع روبرو عمود رسم شود.

وتر : به ضلع رو به روی زاویه قائمه در مثلث قائم الزاویه وتر می گویند .

عمود منصف : خطی است که از یک رأس بر ضلع مقابل عمود باشد وآن را به دوقسمت مساوی تقسیم کند. هر مثلثی که عمود منصف داشته باشد، متساوی الساقین است.

مثلث قائم الزاویه : به مثلثی که یکی از زاویه های آن راست (قائمه) باشد مثلث قائم الزاویه می گویند.

تساوی دو مثلث : حالت های سه گانه ی تساوی دو مثلث در زیر آمده است.

حالت اوّل : اگر در دو مثلث دو ضلع و زاویه ی بین آن ها مساوی باشند آن دو مثلث با هم مساوی اند.

حالت دوم : اگر دو زاویه و ضلع بین آن ها از مثلثی با دو زاویه وضلع بین آن ها از مثلثی دیگر مسا وی باشند این دو مثلث با هم مساوی اند.

حالت سوم : اگر سه ضلع مثلثی با سه ضلع مثلث دیگری به ترتیب مساوی باشند این دو مثلث با هم مساوی اند.

- هر مثلث سه ارتفاع دارد که حداقل یکی از آنها در داخل مثلث قرار دارد.
- در مثلث قائم الزاویه دو ارتفاع روی اضلاع مثلث قرار می گیرند.
- اگر یکی از زاویه های مثلث باز باشد دو ارتفاع مثلث در خارج آن قرار می گیرند.
- اگر هر سه زاویه مثلثی تند باشد سه ارتفاع آن مثلث داخلی می باشند.
- در هر مثلث مجموع اندازه های ارتفاع مثلث از محیط آن مثلث کوچکتر است.
- اگر وسط دو ضلع مثلثی را بهم وصل کنیم پاره خط حاصل موازی با ضلع سوم و نصف آن می باشد. و مساحت قسمت کوچکتر ۱/۳ مساحت قسمت بزرگتر است.
- اگر وسط های سه ضلع مثلث را بطور متوالی به هم وصل کنیم شکل به ۴ مثلث با مساحت های مساوی تقسیم می شود.
- فاصله ی هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.
- در مثلث، حاصلضرب هر قاعده در ارتفاع نظیرش برابر است با حاصلضرب قاعده ی دیگر در ارتفاع نظیرش.

- در مثلث متساوی الساقین، زاویه های پای ساق با هم برابرند.
- در مثلث متساوی الاضلاع, زاویه های آن با هم برابر و اندازه ی هر کدام از آنها برابر ۶۰ درجه می باشد.
- فاصله ی هر نقطه روی نیمساز یک زاویه تا دو ضلع زاویه با هم برابر است.
- اگر وسط اضلاع یک مثلث را بطور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل یک مثلث خواهدبود.
- در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه ۳۰ درجه نصف وتر است.
- در هر مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.
- اندازه ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه ای که یک زاویه تند ۱۵ درجه دارد ، یک چهارم اندازه وتـــــر است.
- در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر وتر نصف وتر است.
- مساحت هر مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین همواره مساوی است با ربع مجذور وتر(یا ربع حاصلضرب وتر در خودش)

انواع مثلث :

۱-**مثلث متساوی الاضلاع** : مثلثی است که سه ضلع و سه زاویه ی مساوی دارد. و اندازه ی هر سه زاویه آن ۶۰ درجه است.

۲-**مثلث متساوی الساقین** : مثلثی که دو ضلع (دوساق)مساوی دارد.و دو زاویه ی مجاور آن دو ضلع برابرند.

۳-**مثلث قائم الزاویه** : مثلثی که یک زاویه ی قائمه (۹۰ درجه) دارد. به ضلع روبرو به زاویه ی قائمه وتر می کویند.

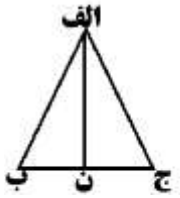
۴-**مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین** : مثلثی که یک زاویه ی قائمه دارد و دو ضلع زاویه ی قائمه ی آن برابرند.

۵-**مثلث مختلف الاضلاع** : اندازه ی ضلع های آن باهم فرق دارند.

رسم مثلث: برای رسم یک مثلث سه روش وجود دارد: ۱- سه ضلع را به ما بدهد ۲- دو زاویه و یک ضلع را بدهد ۳- دو ضلع و یک زاویه را بدهد.

- در رسم یک مثلث به روش سه ضلع باید مجموع دو ضلع کوچک تر، بیشتر از ضلع بزرگتر شود.
- در هر مثلث همیشه اندازه یک ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر است.
- یک مثلث نمی تواند بیش از یک زاویه قائمه داشته باشد.
- یک مثلث نمی تواند بیش از یک زاویه ی باز داشته باشد.
- یک مثلث حداقل دو زاویه تند دارد.
- در هر مثلث نقطه ای که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله باشد، آن نقطه محل برخورد عمودمنصف های آن مثلث است.
- در هر مثلث میانه ی نظیر هر ضلع از نصف مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر است.
- در هر مثلث میانه ی نظیر هر ضلع از نصف قدرمطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است.
- در هر مثلث میانه ها در یک نقطه داخل مثلث همرسند. این نقطه همواره داخل مثلث قرار می گیرد.
- نقطه ی همرسی سه میانه به فاصله ی $\frac{۲}{۳}$ طول هر میانه از رأس و به اندازه ی $\frac{۱}{۳}$ طول هر میانه از وسط ضلع مقابل واقع است.
- اگر نیمسازهای مثلثی را رسم کنیم، نقطه ی تقاطع نیمسازها از سه ضلع به یک اندازه است.
- در یک مثلث اندازه ی یک زاویه ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه ی غیرمجاور داخلی.

- در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع وارد بر هر ضلع از قاعده کوچکتر است. یعنی حدود ۸۵٪ قاعده است.
- هر مثلثی که دو ارتفاعش خارج از مثلث رسم شود، منفرجه الزاویه(باز) است.
- در مثلثی که یک زاویه ی منفرجه(باز) داشته باشد، محل برخورد عمود منصف ها در خارج از مثلث است.
- هر مثلثی که دو ارتفاع مساوی داشته باشد، متساوی الساقین است.
- هر مثلثی که مجموع دو زاویه ی آن با زاویه ی سوم آن برابر باشد، قائم الزاویه است.
- در مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصلضرب دو ضلع عمود بر هم تقسیم بر وتر
- اگر ارتفاع مثلث بر وسط ضلع مقابل رسم شده باشد، عمود منصف و میانه هم نامیده می شود.



۲ ÷ الف.ج + الف.ب > میانه

- از دوران مثلث قائم الزاویه دور اضلاع قائمه، مخروط ایجاد می شود.
- در هر مثلث اندازه ی زاویه ای که از برخورد دو نیمساز زاویه ی داخلی مثلث درست می شود

را می توان از رابطه ی زیر بدست آورد.

۹۰ + ۲ ÷ زاویهٔ‌داده شده

۲ ÷ ۱۸۰ + زاویهٔ‌داده شده

- نیمساز دو زاویه ی تند در مثلث قائم الزاویه همواره یک زاویه ی ۱۳۵ درجه است.
- در هرمثلث قائم الزاویه بین اضلاع آن رابطه ی زیر برقرار است.

(یک ضلع قائم ×خودش) + (یک ضلع قائم ×خودش) = وتر × وتر

- در مثلث قائم الزاویه اگر دو ضلع عمود برهم ۳ و ۴ باشند، وتر مثلث حتما ۵ می باشد. این رابطه در مثلث های دیگر هم برقرار است.
- اگر اندازه ی سه ضلع مثلث را در یک عدد بزرگتر از صفر ضرب کنیم اعداد حاصل فیثاغورثی می شوند.

در مورد چهارضلعی ها

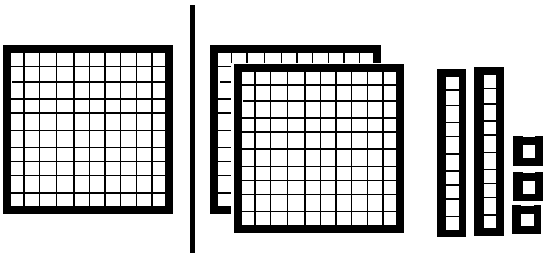
- اگر وسط اضلاع یک مربع را بطور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل یک مربع خواهدبود.
- اگر وسط اضلاع یک مستطیل را بطور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل یک لوزی خواهدبود.
- اگر وسط اضلاع یک متوازی الاضلاع را بطور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل یک متوازی الاضلاع خواهدبود.
- اگر وسط اضلاع یک لوزی را بطور متوالی به هم وصل کنیم، شکل حاصل یک مستطیل خواهدبود.

- در متوازی الاضلاع مجموع زوایا ۳۶۰درجه است و هر دو زاویه ی مجاور آن با هم ۱۸۰درجه می شود.
- در متوازی الاضلاع ۴ جفت زاویه مکمل داریم.
- در ذوزنقه ی متساوی الساقین هر دو زاویه ی مجاور با هم برابرند در نتیجه تنها دو جفت زاویه ی مکمل داریم
- خطی که وسط های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می کند نصف مجموع دوقاعده است واگر آن را ضرب در ارتفاع

کنیم مساحت بدست می آید

- **ذوزنقه** : به هر چهار ضلعی که فقط دو ضلع موازی داشته باشد ذوزنقه می گویند .
- **ذوزنقه قائم الزاویه** : به ذوزنقه ای که یکی از زاویه های آن قائمه باشد ذوزنقه قائم الزاویه می گویند .

فصل پنجم : اعشار



نمایش اعشاری اعداد

برای نمایش بصورت کسر، کل تقسیم ها را بر روی تعداد تقسیم های (ریزواحدهای) یک واحدکامل می نویسیم.

برای نمایش بصورت عدد مخلوط، تعداد واحدهای کامل را نوشته و بقیه ی تقسیم ها را بر روی تعداد تقسیم های یک واحد کامل می نویسیم.

برای نمایش بصورت عدد اعشاری، تعداد واحدهای کامل را نوشته، علامت ممیز را قرار داده سپس تعداد واحدهای کوچکتر را به ترتیب می نویسیم.

$\frac{۲۲۳}{۱۰۰}$ ، $۲\frac{۲۳}{۱۰۰}$ ، ۲/۲۳

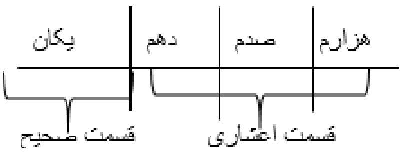
- کسر به معنای شکستن است و اگر این شکستن به قسمت های ۱۰۰۰،۱۰۰،۱۰ویا........... باشد کسر اعشاری نامیده می شود و می توان آنرا بصورت عدد اعشاری نوشت.
- در شکل هایی که تعداد تقسیم ها۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ . . . باشد، می توان عدد را بصورت اعشاری نوشت. در این حالت ها نمایش بصورت اعشاری از نمایش بصورت کسری و عدد مخلوط بهتر است.

تبدیل کسر به اعشار و اعشار به کسر

- برای تبدیل یک کسر به عدد اعشاری باید مخرج آن را به اعداد ۱۰ یا۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ...... تبدیل کرده، سپس عدد را بصورت اعشاری بنویسیم. برای انجام این کار از تساوی کسرها استفاده می کنیم.

$\frac{۷۱}{۵۰۰}=\frac{۱۴۲}{۱۰۰۰}=$ ۰/۱۴۲ $\qquad$ $\frac{۱}{۲۰}=\frac{۵}{۱۰۰}=$ ۰/۰۵

- در تبدیل کردن کسربه عدد اعشاری به تعداد صفرهای مخرج کسر باید پس از ممیز عدد قرار بگیرد.
- برای تبدیل کسرهایی که مخرج آنها ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ یا . . . است به عدد اعشاری، ابتدا عدد صورت را نوشته، سپس از سمت راست به چپ عدد، به تعداد صفرهای مخرج شمارش کرده، آن گاه ممیز می زنیم. (اگر رقمی برای شمارش وجود نداشت، صفر قرار می دهیم.)
- به مرتبه های اعداد اعشاری از ممیز به طرف راست«دهم، صدم، هزارم و...» می گویند.



- برای تبدیل کسرهای بزرگتر از واحد به عدد اعشاری باید ابتدا کسر را به عدد مخلوط تبدیل کرده و سپس عدد اعشاری برابر با آن را بنویسیم. $\frac{۱۷}{۱۰}=۱\frac{۷}{۱۰}=$ ۱/۷

- برای تبدیل اعداد اعشاری به کسر، ابتدا ممیز را حذف کرده و عدد حاصل را در صورت کسر می نویسیم. سپس در مخرج در مقابل عدد یک به تعداد رقم های اعشاری، عدد صفر قرار می دهیم.
- با توجه به نوع مسئله یا تمرین از شکل کسری یا اعشاری عدد استفاده می کنیم.

اعداد اعشاری برابر

برای نوشتن گسترده ی اعشاری یک عدد ابتدا آن را در جدول ارزش مکانی قرار داده، سپس هر عدد را با توجه به ارزش مکانی آن می نویسیم. (بهتر است برای مختصر نویسی از رسم جدول ارزش مکانی صرف نظر می کنیم.)

= ۱۰ + ۶ + ۰/۳ + ۰/۰۷ + ۰/۰۰۹

دهگان	یکان	دهم	صدم	هزارم
۱	۶	۳	۷	۹

- اگر در سمت راست رقم های اعشاری عددی، آخرین عدد صفر قرار گیرد، این عدد ارزشی نداشته و می توان آن را حذف نمود.　۳/۳ = ۳/۳۰
- با حذف صفرهای آخر در اعداد اعشاری عدد ساده تر نوشته شده و محاسبات آسان تر می شود.

مقایسه ی اعداد اعشاری

برای مقایسه ی اعداد اعشاری، ابتدا قسمت صحیح یا واحدهای کامل را با هم مقایسه می کنیم. سپس به ترتیب دهم، صدم، هزارم و .... را با هم مقایسه می کنیم.

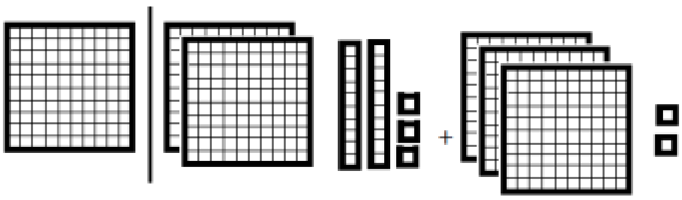
۲۴/۳۲۳ > ۲۳/۳۲۳　　　۱۱/۹۸۷ < ۱۲/۰۸۵　　　۹/۰۱۲ > ۹/۰۰۲۶

- در نمایش اعداد اعشاری روی محور، اگر تعداد تقسیم ها ی هر واحد ۱۰ قسمت نبود، ابتدا عدد مربوط را به صورت کسر یا عدد مخلوط می نویسیم. سپس با استفاده از کسرهای مساوی، مخرج کسرها را به ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ یا .... تبدیل کرده، آنگاه عدد اعشاری را می نویسیم.
- در نمایش اعداد اعشاری روی محور، اگر تعداد تقسیم ها ی هر واحد ۱۰ قسمت نبود، و تعداد تقسیم ها قابل تبدیل به اعداد ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ یا . . . نباشد کسر را نمی توان به سادگی به صورت اعشاری نوشت و لازم است در صورت امکان صورت بر مخرج تقسیم شود.

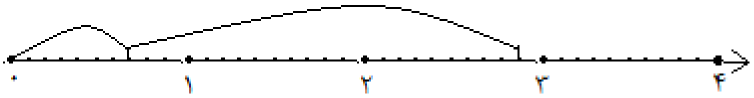
جمع و تفریق اعداد اعشاری

با توجه به تعداد تقسیم های هر واحد(۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ یا .....) حرکت ها را انجام می دهیم.

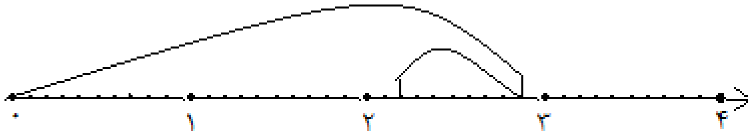
- در جمع و تفریق اعداد اعشاری ابتدا آنها را طوری زیر هم می نویسیم که ممیزها زیر هم قرار گیرند. آن گاه حاصل جمع و تفریق ها را بدست آورده و ممیز حاصل را زیر ممیزها قرار می دهیم. (هرکجا رقم کم بود به جای آن صفر قرار می دهیم.)　　۲/۲۳ + ۳/۰۲ = ۵/۲۵



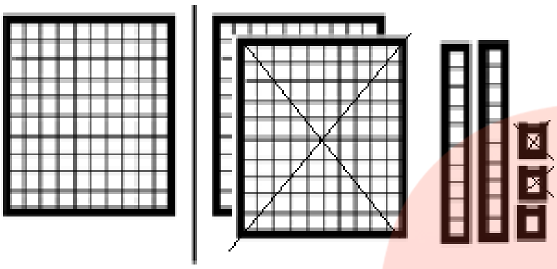
۰/۷ + ۲/۲ = ۲/۹



۲/۹ – ۰/۷ = ۲/۲



۲/۲۳ – ۱/۰۲ = ۱/۲۱

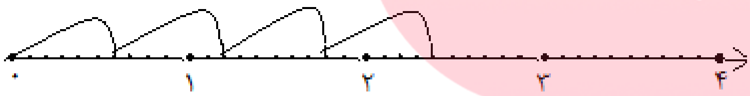


- در جمع و تفریق اعداد اعشاری ترتیب قرار گرفتن اعداد زیر هم بسیار مهم است. یعنی یکان زیر یکان – دهگان زیر دهگان و . . . همچنین دهم زیر دهم- صدم زیر صدم و . . . و ممیزها نیز زیر هم قرار گیرند.

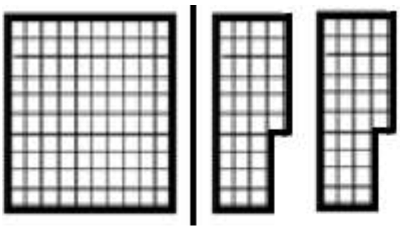
$$\begin{array}{r} ۲/۱۸ \\ -\ ۱/۹ \\ \hline ۰/۲۸ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۲/۱۸ \\ +\ ۱/۹ \\ \hline ۴/۰۸ \end{array}$$

ضرب اعداد اعشاری

نقطه ی انتها حاصلضرب می باشد. ۴ × ۰/۶ = ۲/۴



بر روی شکل تعداد شکل ها را در عدد آن ها ضرب کرده و حاصلضرب کل شکل را می نویسیم. ۲ × ۰/۳۶ = ۰/۷۲



- در ضرب اعداد اعشاری می توان ممیزها را نادیده گرفته، اعداد را در هم ضرب کرده، سپس حاصلضرب را به تعداد مجموع رقم های اعشاری ممیز زد. بعبارت دیگر از سمت راست حاصلضرب به تعداد ارقام اعشاری جدا می کنیم.
- حاصلضرب را میتوان بوسیله ی محور، شکل یا تبدیل اعشار به کسر بدست آورد. ولی روش فوق سریع ترین و مطمئن ترین روش برای ضرب اعداد اعشاری می باشد.

محاسبات ذهنی اعداد اعشاری

در ضرب و تقسیم اعداد اعشاری می توان اعداد را به کسر تبدیل کرده، سپس بعد از ساده کردن کسرها، حاصل را بدست آورید.

$$۰/۹ \times ۱۰ = \frac{۹}{۱۰} \times \frac{۱۰}{۱} = ۹ \qquad ۰/۷ \div ۱۰۰ = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۷}{۱۰۰۰} = ۰/۰۰۷ \qquad ۰/۴ \div ۰/۰۸ = \frac{۴}{۱۰} \div \frac{۸}{۱۰۰} = \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۱۰۰}{۸} = ۵$$

- اگر هر عدد اعشاری را در ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ یا . . . ضرب کنیم، ممیز آن به تعداد صفرهای عدد ضرب شده به جلو حرکت می کند. (به سمت راست)
- اگر هر عدد اعشاری را بر ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ یا . . . تقسیم کنیم، ممیز آن به تعداد صفرهای عدد تقسیم شده به عقب حرکت می کند. (به سمت چپ)
- با استفاده از محاسبات ذهنی، احتمال اشتباه در محاسبات بسیار کم و سرعت محاسبه بسیار بالا می رود.

برخی از فرمول های نورد نیاز در این فصل:

محیط چرخ ÷ مسافت طی شده = تعداد دور چرخ   تعداد دور چرخ ÷ مسافت طی شده = محیط چرخ

محیط چرخ × تعداد دور چرخ = مسافت طی شده   ۳/۱۴ × قطر = محیط دایره   ۳/۱۴ ×شعاع ×شعاع = مساحت دایره

فصل ششم: حجم و مساحت

- اگر یک سطح را باواحدهای مختلف اندازه گیری کنیم، عددهای متفاوتی بدست خواهد آمد. برای یکسان شدن اعداد حاصل ، نیاز به واحدهای ثابت و همیشگی و استانداردی داریم که آن را با مربعی به ابعاد یک سانتی متر مشخص می کنیم.
- اگر یک حجم را باواحدهای مختلف اندازه گیری کنیم، عددهای متفاوتی بدست خواهد آمد. برای یکسان شدن اعداد حاصل ، نیاز به واحدهای ثابت و همیشگی و استانداری داریم که آن را با مکعبی به ابعاد یک سانتی متر مشخص می کنیم.
- محاسبه ی اندازه ی یک سطح بوسیله ی واحدهای اندازه گیری کاری بسیار دشوار بوده و خیلی از اوقات پاسخ ها بصورت تقریبی به دست می آید. به همین دلیل برای محاسبه ی اندازه ی سطح ها از دستورهای محاسبه(فرمول) استفاده می کنیم.
- محاسبه ی اندازه ی یک حجم بوسیله ی واحدهای اندازه گیری کاری بسیار دشوار بوده و خیلی از اوقات پاسخ ها بصورت تقریبی به دست می آید. به همین دلیل برای محاسبه ی اندازه ی حجم ها از دستورهای محاسبه(فرمول) استفاده می کنیم.
- دقت و سرعت محاسبات ، زمانی که از رابطه ها(فرمول ها) استفاده می کنیم بالاتر است.
- واحد استاندارد اندازه گیری سطح «مترمربع» می باشد. برای دقیق تر شدن اندازه گیری ها می توان از واحدهای کوچکتر «دسی متر مربع»، «سانتی متر مربع» و «میلی متر مربع» استفاده کرد. همچنین برای اندازه های بسیار بزرگ می توان از کیلومتر مربع استفاده کرد.
- واحد استاندارد اندازه گیری حجم «مترمکعب» می باشد.برای دقیق تر شدن اندازه گیری ها می توان از واحدهای کوچکتر«دسی مترمکعب»،«سانتی مترمکعب»و«میلی مترمکعب» استفاده کرد.همچنین برای اندازه های بسیار بزرگ می توان از کیلومتر مکعب استفاده کرد.
- بوسیله ی جدول تناسب می توان واحدهای اندازه گیری سطح را به یکدیگر تبدیل کرد.
- در نمایش مساحت ها باید سعی کرد از واحدهایی استفاده کرد که عدد آنها با اعشار کمتر یا صفر کمتر نوشته شود.
- انتخاب واحد مناسب برای نمایش مساحت و یا حجم یک جسم، از اهمیت فراوانی برخوردار است.

محیط: یعنی دور شکل، به دور شکل پیرامون آن نیز گفته می شود.

مساحت: سطح داخل محیط را مساحت گویند.

اشکال فضایی: به اشکالی که تمام ضلع های آنها در یک سطح قرار نگرفته و برخی از اضلاعشان در فضا قرار دارد، اشکال فضایی گفته می شود و حجم نیز مربوط به اشکال فضایی است.

حجم: قسمتی از فضا که توسط یک جسم اشغال می شود را گویند.

قاعده: قسمتی از اجسام که روی زمین قرار می گیرد.

ارتفاع: به فاصله ی بین دو قاعده را در شکل های هندسی گویند.

گنجایش: همان حجم جسم است. می توان گفت گنجایش یک ظرف، فضایی است که آن ظرف اشغال کرده است و می تواند از یک ماده دیگر که اکثرا مایع است را در خود جای دهد.

- برای اندازه گیری گنجایش اجسام نیاز به یک واحد داریم. برای اینکه عدد اندازه گیری گنجایش یکسان به دست آید از واحد استاندارد سانتی متر مکعب یعنی مکعبی که هر سه ضلع آن یک سانتی متر باشد استفاده می کنیم.
- در اجسام بسیار بزرگ یا بسیارکوچک با تبدیل واحدها می توان گنجایش را بر حسب سایر واحدهای حجم بدست آورد.
- در اجسام هندسی غیرمعروف با انتخاب یک واحد مشخص و انتقال محتویات جسم به داخل واحد ها می توان گنجایش ظرف را بدست آورد.
- برای محاسبه حجم اجسام هندسی ناشناخته می توان با انتقال محتویات جسم به داخل اجسامی با گنجایش مشخص، گنجایش پایین تر جسم اصلی را بدست آورد.
- چنانچه حجم دو جسم با هم برابر باشد آن دو جسم را متعادل می گوییم.
- در اشکال فضایی به هر کدام از اضلاع «یال» گفته می شود. (مثلا مکعب ۱۲ بعد دارد)
- در اشکال فضایی به هر سمت یا طرف «وجه» گفته می شود. (مثلا مکعب ۶ وجه دارد)

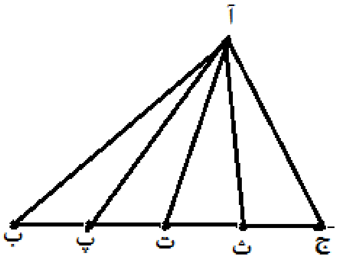
چند وجهی: به هر کدام از اشکال فضایی که دارای چند وجه باشد. چند وجهی گویند. (مثلا: مکعب، مکعب مستطیل، منشور و ...)

چند وجهی منتظم: اگر تمام وجه های یک چند وجهی با هم مساوی باشند، آن شکل را چند وجهی منتظم گویند.

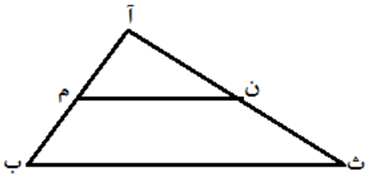
چند وجهی غیر منتظم: اگر تمام وجه های یک چند وجهی با هم مساوی نباشند، آن شکل را چند وجهی غیر منتظم گویند.

- واحد اندازه گیری سطح کل یا سطح جانبی بر حسب «مربع» است. (مثلا مترمربع، سانتی متر مربع)
- واحد اندازه گیری حجم بر حسب «مکعب» است. (مثلا متر مکعب، سانتی متر مکعب)
- در حجم های مساوی کمترین سطح مربوط به «کره» است.
- «هرم» دارای سه بعد و چهار وجه است.
- در بین اشکال فضایی چند وجهی ، «هرم» دارای کمترین وجه است.
- شکل های فضایی علاوه بر طول و عرض ، ارتفاع نیز دارند.
- قاعده در شکل فضایی سطحی است که روی صفحه قرار می گیرد.
- قاعده در شکل مسطح پاره خطی است که ارتفاع بر آن عمود می شود.
- اندازه ی محیط دایره تقریبا ۳ برابر قطر دایره است.
- هر گاه قطر دایره ای را A برابر کنیم، محیط آن نیز A برابر می شود.
- اگر ابعاد مربعی را A برابر کنیم، مساحت آن نیز $A \times A$ برابر خواهد شد.
- اگر ابعاد مربعی را ۴ برابر کنیم، عدد مساحت و محیط آن برابر خواهد بود.

- هرگاه ابعاد مربعی را نصف کنیم، اندازه ی مساحت آن $\frac{1}{4}$ برابر خواهد شد.
- هرگاه ابعاد مربعی را A برابر کنیم، اندازه ی محیط آن A برابر می شود.
- اگر طول مستطیلی را A برابر کنیم، مساحت آن نیز A برابر خواهد شد.
- اگر طول مستطیلی را A برابر کنیم، مساحت آن نیز A برابر خواهد شد.
- اگر طول مستطیلی را A برابر و عرض آن را B برابر کنیم، مساحت آن نیز $A \times B$ برابر خواهد شد.
- هرگاه طول و عرض مستطیلی را A برابر کنیم، اندازه ی محیط آن فقط به اندازه ی A برابر خواهد شد.
- اگرارتفاع متوازی الاضلاعی را A برابر کنیم، مساحت آن A برابر خواهد شد.
- اگر قاعده ی متوازی الاضلاعی را A برابر و ارتفاع آن را B برابر کنیم، مساحت آن نیز $A \times B$ برابر خواهد شد.
- اگرابعاد متوازی الاضلاعی را A برابر کنیم، محیط آن A برابر خواهد شد.
- اگر قاعده و ارتفاع مثلثی را A برابر کنیم، مساحت آن $A \times A$ برابر خواهد شد.
- اگر یک قطر لوزی راA برابر کنیم، مساحت آن A برابر خواهد شد.
- اگر قطرهای لوزی راA برابر کنیم، مساحت آن $A \times A$ خواهد شد.
- اگر مجموع دو قاعده ی ذوزنقه ای را A برابر کنیم، مساحت آن A برابر خواهد شد.
- اگر ارتفاع ذوزنقه ای را A برابر کنیم، مساحت آن A برابر خواهد شد.
- اگر مجموع دو قاعده و ارتفاع ذوزنقه ای راA برابر کنیم، مساحت آن $A \times A$ برابر خواهد شد.
- اگر شعاع دایره ای راA برابر کنیم، مساحت آن $A \times A$ برابر خواهد شد.
- هر گاه شعاع دایره ای را نصف کنیم، اندازه ی مساحت آن $\frac{1}{4}$ برابر خواهد شد.
- اگر شعاع دایره ای A برابر کنیم، محیط آن A برابر خواهد شد.
- در تمام چندضلعی هایی که اضلاع آنها برابر است. نسبت محیط به تعداد اضلاع مقدار ثابتی است.
- هرگاه قطرهای ذوزنقه ای را رسم کنیم، چهار مثلث ایجاد می شود که دو به دو مساحت برابر دارند.
- هرگاه محیط چند شکل مختلف با هم برابر باشند؛ مساحت شکلی بیشتر است که خط تقارن بیشتری دارد.
- هرگاه مساحت چند شکل مختلف برابر باشند؛ محیط شکلی بیشتر است که خط تقارن کمتری دارد.
- اگر در چند شکل تعداد اضلاع برابر باشد مساحت شکلی بیشتر است که منتظم باشد.
- مساحت هر چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمود باشند برابر با نصف حاصل ضرب دو قطر است.
- **کایت(بادکنک):** چهار ضلعی است که اضلاع مجاور آن دو به دو مساویند. توجه فرمایید که در هر کایت فقط یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است. مساحت آن برابر نصف حاصلضرب دو قطر است.

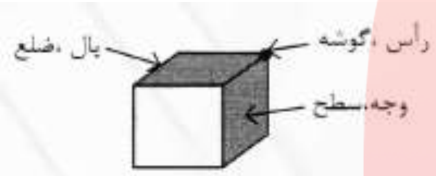


- اگر روی قاعده ی مثلثی پاره خط های مساوی وجود داشته باشد و از رأس به سر آن پاره خط ها وصل کنیم. مساحت مثلث های حاصل با هم برابر است.
- مساحت چهار مثلث داخلی که درون مثلث(آ ب ج) قرار گرفته اند با هم برابر است. بنابراین اگر مساحت مثلث بزرگ بطور مثال ۶۰سانتی متر مربع باشد. مساحت هر یک از مثلث های کوچک برابر با ۱۵ سانتی متر مربع خواهد بود.



- اگر دو ضلع مثلثی را به نسبت های مشخصی از اضلاع قطع کنیم و پاره خط های بدست آمده را به هم وصل کنیم. مساحت مثلث ایجاد شده بصورت زیر به دست می آید.

$$\frac{\text{مساحت مثلث (آ ث ب)}}{\text{نسبت ضلع آ ن به آ ث} \times \text{نسبت ضلع آ م به آ ب}} = \text{مساحت مثلث (آ ن م)}$$



مکعب

- شش وجهی منتظم نام دیگر آن است.
- هر مکعب ۸ رأس دارد.
- هر مکعب ۲۴ زاویه قائمه دارد.
- هر مکعب ۶ وجه برابر دارد.
- هر مکعب ۱۲ ضلع یا ۱۲ یال برابر دارد.
- هر مکعب ۴ قطر برابر دارد.
- در هر مکعب سه بعد آن (طول، عرض، ارتفاع) برابرند.
- گسترده هر مکعب ۱۴ضلع دارد.
- گسترده ی چهار وجهی منتظم محور تقارن بیشتری دارد.
- اگر از گوشه های یک مکعب، مکعبی بریده شود، مساحت مکعب جدید با مساحت کل مکعب اولیه برابر است.
- اگر از وسط ابعاد یک مکعب، مکعبی بریده شود، مساحت مکعب جدید از مساحت کل مکعب اولیه برابر است.
- هر گاه ابعاد مکعبی را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A\times A\times A$ برابر خواهد شد.
- هر گاه ابعاد مکعبی را A برابر کنیم، مساحت کل آن به اندازه $A\times A$ برابر خواهد شد.
- هرگاه ابعاد مکعبی را ۱۰۰٪ افزایش دهیم، یعنی دو برابر کرده ایم؛ پس حجم آن ۸ برابر می شود.
- هرگاه ابعاد مکعبی را ۱۰۰٪ افزایش دهیم،یعنی دو برابر کرده ایم؛ پس مساحت کل آن ۴ برابر می شود.
- هرگاه ابعاد قاعده ی مکعبی را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A\times A$ برابر خواهد شد.

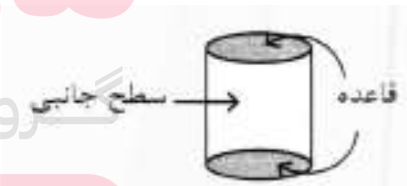
مکعب مستطیل

- سه بعد (طول, عرض، ارتفاع) دارد.

- در مکعب مستطیل تمام وجه ها الزاما مستطیل نیستند.
- هر مکعب مستطیل ۶ وجه یا ۶ طرف دارد.
- هر مکعب مستطیل دارای ۴طول برابر، ۴عرض برابر ، ۴ارتفاع برابر و ۴قطر برابر دارد.
- در گسترده ی این شکل فضایی ۶ مستطیل وجود دارد که دو به دو با هم برابرند.
- به وجه های بالا و پایین آن قاعده و به وجه های دور آن وجوه جانبی می گویند. قاعده ها با هم و وجوه جانبی روبرو با هم مساویند.
- اگر از گوشه های یک مکعب مستطیل، مکعبی بریده شود، مساحت مکعب مستطیل جدید با مساحت کل مکعب مستطیل اولیه برابر است.
- اگر از وسط ابعاد یک مکعب مستطیل، مکعبی بریده شود، مساحت مکعب مستطیل جدید از مساحت کل مکعب مستطیل اولیه برابر است.
- هر گاه ابعاد مکعب مستطیلی را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A\times A\times A$ برابر خواهد شد.
- هر گاه ابعاد مکعب مستطیلی را A برابر کنیم، مساحت کل آن به اندازه $A\times A$ برابر خواهد شد.
- هرگاه ابعاد قاعده ی مکعب مستطیلی را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A\times A$ برابر خواهد شد.
- هرگاه بخواهیم حجم مکعب مستطیل به بیشترین مقدار برسد، به کوچک ترین بعد آن مقداری اضافه می کنیم.
- هرگاه بخواهیم کمترین تغییر در حجم مکعب مستطیل ایجاد شود، به بزرگترین ضلع آن مقداری اضافه می کنیم.

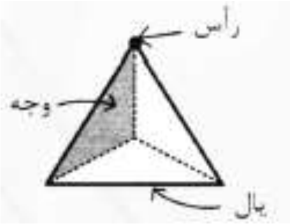
استوانه

- هر گاه شعاع قاعده ی استوانه ای را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A\times A$ برابر خواهد شد.
- هر گاه شعاع قاعده و ارتفاع استوانه ای را A برابر کنیم، حجم آن به اندازه $A\times A\times A$ برابر خواهد شد.



مخروط

هرم قاعده مثلث



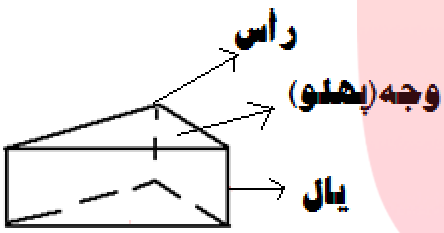
- به هرم با قاعده مثلث، چهاروجهی منتظم نیز می گویند.
- دارای چهاروجه مساوی که مثلث متساوی الاضلاع هستند می باشد.
- ۴ رأس و ۶ بعد(ضلع) دارد.
- ۴ رأس و ۴ وجه دارد.

هرم قاعده مربع

۵رأس و ۵ وجه دارد.

منشور

- هر جسمی که دارای قاعده بالا و پایین یکسان باشد و پهلوهای آن از مربع یا مستطیل ساخته شده باشد را منشور قائم می گویند. که معروف ترین آنها مکعب، مکعب مستطیل و استوانه است.



- تعداد یال های هر منشور سه برابر تعداد پهلوهای آن است.
- هر وجه منشور یک متوازی الاضلاع است.
- اگر قاعده ی منشور یک چندضلعی باشد آنگاه :

تعداد یال ها = ۳× تعداد اضلاع　　　　تعداد پهلوها= تعداد اضلاع قاعده ها + ۲

واحد های طول

ترا	گیگا	مگا	کیلو	هکتو	دکا	متر	دسی	سانتی	میلی	میکرو	نانو	پیکو

÷ ۱۰　　　　× ۱۰

واحدهای سطح

ترا	گیگا	مگا	کیلو	هکتو	دکا	متر مربع	دسی	سانتی	میلی	میکرو	نانو	پیکو

÷ ۱۰۰　　　　× ۱۰۰

واحدهای حجم

۱سانتی متر مکعب = ۱سی سی= ۱میلی متر = ۳۰قطره ۱دسی متر مکعب= ۱ لیتر

ترا	گیگا	مگا	کیلو	هکتو	دکا	مترمکعب	دسی	سانتی	میلی	میکرو	نانو	پیکو

÷ ۱۰۰۰

× ۱۰۰۰

واحدهای گنجایش

۱ متر مکعب = ۱۰۰۰دسی متر مکعب= ۱۰۰۰لیتر = ۱۰۰۰۰۰۰سانتی مترمکعب = ۱۰۰۰۰۰۰سی سی

واحد های جرم

۱ تن = ۱۰۰۰کیلوگرم ۱کیلوگرم=۱۰۰۰گرم ۱تن= ۱۰۰۰۰۰۰گرم

فرمول مساحت و محیط اشکال هندسی

مربع و مکعب

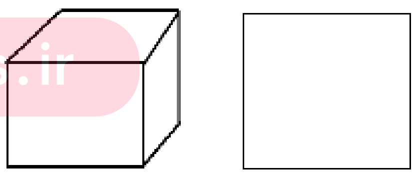
۱) مساحت مـــربع = یـــک ضلع × خـــودش

محیـــط مـــربـــــع = یک ضلع × ۴

مساحت کل مکعب = ۶× یک ضلع×یک ضلع

مساحت جانبی مکعب = ۴× یک ضلع×یک ضلع

حجم مکعب = یک ضلع×یک ضلع×یک ضلع = ارتفاع × مساحت قاعده = طول یال × مساحت یک وجه



مستطیل و مکعب مستطیل

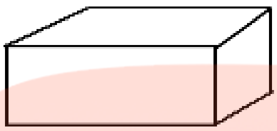
۲) مساحت مســتطیـــــــــل = طـول × عـرض

محیط مستطیل = (طول + عرض) × ۲

مساحت جانبی مکعب مستطیل= محیط قاعده × ارتفاع

مساحت کل مکعب مستطیل= مساحت جانبی+ دو برابر مساحت قاعده =دو برابر مجموع مساحت های جانبی و فوقانی و زیری

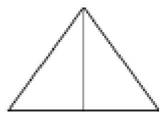
حجم مکعب مستطیل = طـول × عـرض × ارتفاع




مثلث

۳) مساحت مثلث = (قاعده × ارتـــــــفاع) ÷ ۲

محیط مثلث = مجموع سه ضلع



۴) مساحت مثلث متساوی الاضلاع = (قاعده × ارتفاع) ÷ ۲

محیط مثلث متساوی الاضلاع = یک ضلع × ۳

۵) مساحت مثلث متساوی الساقین = (قاعده × ارتفاع) ÷ ۲

محیط مثلث متساوی الساقین= مجموع سه ضلع

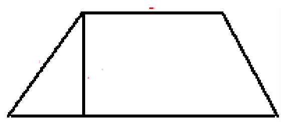
۶) مساحت مثلث قائم الزاویه = (قاعده × ارتفاع) ÷ ۲

محیط مثلث قائم الزاویه = مجموع سه ضلع

ذوزنقه

۷) مساحت ذوزنقه = (قاعده بزرگ + قاعده کوچک) × ارتفاع ÷ ۲

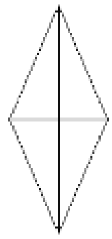
محیط ذوزنقه = مجموع چهار ضلع



لوزی

۸) مساحت لوزی = (قطر بزرگ × قطر کوچک) ÷ ۲

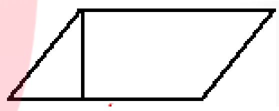
محیط لوزی = یک ضلع × ۴



متوازی الاضلاع

۹) مساحت متوازی الاضلاع = قاعده × ارتفاع

محیط متوازی الاضلاع = مجموع دو ضلع متوالی × ۲



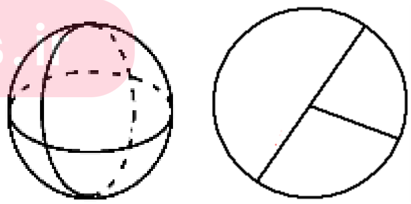
دایره ، کره و بیضی

۱۰) مساحت دایره = عدد پی × شعاع × شعاع = عدد پی × مجذور شعاع

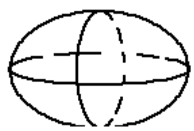
محیط دایره = عدد پی × قطر

مساحت کره = چهار ×عدد پی × مجذور شعاع = ۴ × عدد پی × شعاع × شعاع

حجم کره = چهار سوم × عدد پی × شعاع × شعاع× شعاع



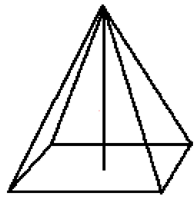
۱۱) مساحت بیضی = (نصف قطر بزرگ × نصف قطر کوچک) × عدد پی



هرم

۱۲) حجم هرم = مساحت قاعده × ارتفاع × یک سوم

مساحت کل هرم(با قاعده مثلث) = مساحت یک وجه ×۴



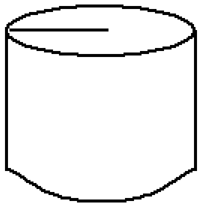
استوانه

۱۳) مساحت جانبی استوانه = محیط قاعده × ارتفاع

حجم استوانه = مساحت قاعده × ارتفاع = مجذور شعاع در ارتفاع در عدد پی

سطح کل استوانه = سطح دو قاعده + مساحت جانبی (مساحت مجموع دو قاعده + ارتفاع × پیرامون قاعده)

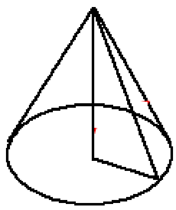
مساحت استوانه=دو برابر شعاع در ارتفاع در عدد پی



مخروط

۱۴) حجم مخروط = مساحت قاعده × یک سوم × ارتفاع

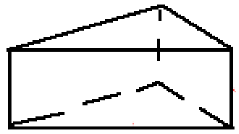
مساحت مخروط = شعاع در مولد مخروط در عدد پی



منشور

۱۵) مساحت جانبی منشور = مجموع مساحت سطوح جانبی = محیط قاعده × ارتفاع

مساحت کلی منشور = مجموع مساحت دو قاعده + مجموع مساحت سطوح جانبی

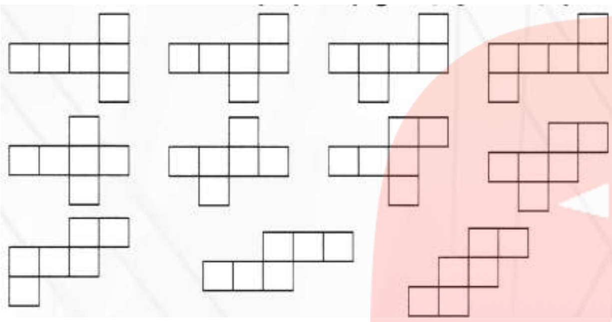


۱۶) حجم متوازی السطوح = مساحت قائده در ارتفاع

۱۷) محیط چند ضلعی منتظم = یک ضلع × تعداد اضلاعش

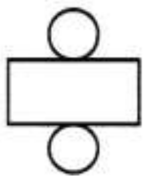
گسترده ی حجم های هندسی

مکعب



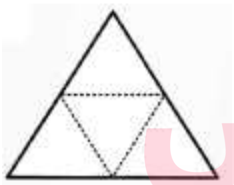
مکعب مستطیل

استوانه

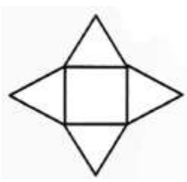


مخروط

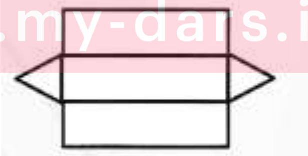
هرم قاعده مثلث



هرم قاعده مربع



منشور



فصل هفتم: بررسی داده ها

جمع آوری و نمایش داده ها

داشتن اطلاعات عددی و یا آمار یکی از ضروری ترین مقدمات یک تصمیم گیری و برنامه ریزی درست است. این نیاز امروزه برای همه قابل لمس است. مثلا در یک مدرسه برای آزمون می خواهند سوال برای دانش آموزان تکثیر کنند در این جا داشتن اطلاع دقیق از تعداد دانش آموزان کمک می کند که در تکثیر سوالات دچار اشتباه نشویم ومشکلی پیش نیاید. در مواردی که اطلاعات جمع آوری شده زیاد و متنوع است برای استفاده بهتر از این اطلاعات آنها را در یک جدول به طور منظم ارائه می دهند، که به آن جدول داده ها می گویند.

فراوانی	دسته

در جدول داده ها ابتدا موضوعات را در سطرها قرار می دهیم. سپس تعداد مربوط به هر گروه را یک بار به صورت عدد و یکبار به صورت چوب خط (خط نشان) مشخص می کنیم. توجه داشته باشید که اگر تعداد چوب خط ها از مضرب های ۵ گذشت، آنها در دسته های ۵ تایی دسته بندی می کنیم.

نکته :

- علم آمار، علم جمع آوری اطلاعات عددی، سازماندهی و بررسی آنهاست.
- اطلاعات جمع آوری شده در یک مسئله ی آمرای را «داده های آمار» می گویند.
- جدولی که داده های آماری را در آن قرار می دهیم، «جدول داده های آماری» نامیده می شود.
- جدول داده های آماری را می توان به صورت افقی یا عمودی رسم کرد.

نتیجه : با مرتب کردن اطلاعات یک مسئله آماری در جدول داده ها، دسترسی و مقایسه ی اطلاعات آسان تر می شود.

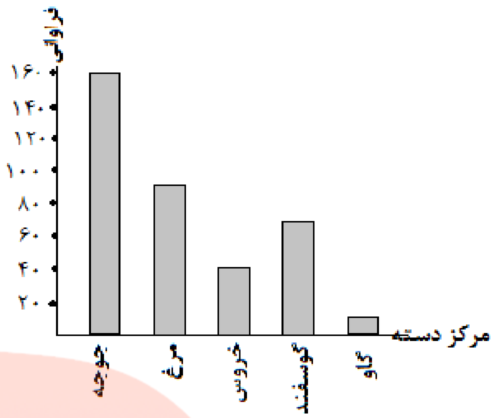
نمودار های آماری

۱. نمودار ستونی (میله ای یا نرده ای)
۲. نمودار مستطیلی (هیستوگرام)
۳. نمودار خط شکسته (چندبرفراوانی)
۴. نمودار تصویری
۵. نمودار دایره ای (لوله ای)

۱. نمودار ستونی (میله ای یا نرده ای)

در رسم نمودار میله ای پس از رسم دو محور عمود بر هم، «عنوان» ها را روی محور افقی و اعداد را بر روی محور عمودی مشخص می کنیم. سپس از هر عنوان، میله یا ستونی تا مقابل عدد مربوط به آن در جدول رسم می کنیم.

برای مثال نمونه ی یک نمودار میله ای در شکل زیر آمده است:



تعداد حیوانات یک روستا

تعداد	حیوان
۱۶۰	جوجه
۹۰	مرغ
۴۰	خروس
۷۰	گوسفند
۲۰	گاو

نکته :

- نمودار میله ای برای مقدارهای ثابت، گسسته (جدا) و کیفی رسم می شود. بطور مثال برای تعداد دانش آموزان کلاس های اول تا پنجم.
- نمودار میله ای جهت مقایسه ی تعداد و پیدا کردن بیشترین و کمترین داده ها مناسب می باشد.
- انتخاب مقیاس برای نمودار دلخواه می باشد. اگر مقیاس(واحدها روی محور عمودی) بزرگ انتخاب شود رسم نمودار سریع تر و راحت تر انجام می شود، ولی دقت آن کم می باشد. ولی اگر مقیاس کوچک انتخاب شود رسم نمودار طولانی تر و سخت تر انجام می شود، ولی دقت آن بالا و مقایسه ی اعداد راحت تر می باشد.
- در نمودار میله ای، محور افقی مرکز دسته و محور عمودی فراوانی هر دسته را نشان می دهد.
- نمودار میله ای برای مقایسه ی نتایج آماری و تعیین کردن کمترین و بیشترین مقدار کاربرد دارد.

نتیجه :

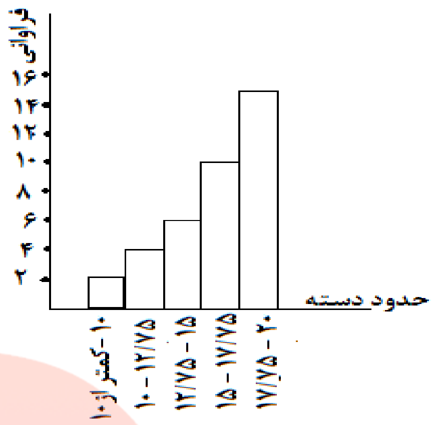
- برای مقایسه و بررسی بهتر و سریع تر داده های آماری، از نمودارها استفاده می کنیم.
- نمودار میله ای و ستونی تفاوتی با هم ندارند.

۲. نمودار مستطیلی

این نوع نمودار زمانی بکار می رود که بیشترین مقدار یک دسته از داده ها با کمترین مقدار دسته ی بعدی داده ها برابر باشد در این نوع نمودارها ستون ها به هم چسبیده هستند.

برای مثال نمونه ی یک نمودار مستطیلی در زیر آمده است:

نمرات ریاضی دانش آموزان	
تعداد	نمره
۲	۱۰ -کمتر از ۱۰
۴	۱۰ – ۱۲/۷۵
۶	۱۲/۷۵ – ۱۵
۱۰	۱۵ – ۱۷/۷۵
۱۵	۱۷/۷۵ – ۲۰



نکته :

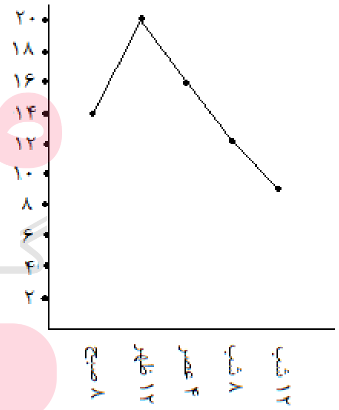
- نمودار میله ای را برای نمایش مقدارهای یک فاصله هم به کار می برند.(مقدارهای پیوسته و کمی) که در این صورت آن را نمودار مستطیلی یا هستوگرام نامید. بطور مثال ۶ تا ۸ و یا ۳۰ تا ۴۰
- در نمودار مستطیلی، محور افقی حدود دسته و محور عمودی فراوانی را نشان می دهد.

۳. نمودار خط شکسته

در رسم نمودار خط شکسته ابتدا در مقابل عدد مربوط به هر عنوان یک نقطه قرار می دهیم و سپس نقاط را به ترتیب به یکدیگر وصل می کنیم.

برای مثال نمونه ی یک نمودار خط شکسته در زیر آمده است:

تغییرات دما (درجه سانتیگراد)	
دما	ساعت
۱۴	۸ صبح
۲۰	۱۲ ظهر
۱۶	۴ عصر
۱۲	۸ شب
۹	۱۲ شب



نکته :

- نمودار خط شکسته بیشتر برای نمایش تغییرات بکار می رود.
- در بازارهای ملی مانند قیمتنفت، تغییرات سهام، رشد یا افت اقتصادی و . . . . . از این نمودار استفاده می شود.
- در این نمودار بیشترین تغییرات بین دو متغیری است که طول پاره خط بین آن دو بیشترین مقدار باشد.
- در این نمودار کمترین تغییرات بین دو متغیری است که طول پاره خط بین آن دو کمترین مقدار باشد.
- در این نمودار، محور افقی مرکز دسته و محور عمودی فراوانی خواهد بود.

- میانگین = $\frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}$

نتیجه : بسیاری از اطلاعات مربوط به یک مسئله آماری را می توان از روی نمودارها به دست آورد.

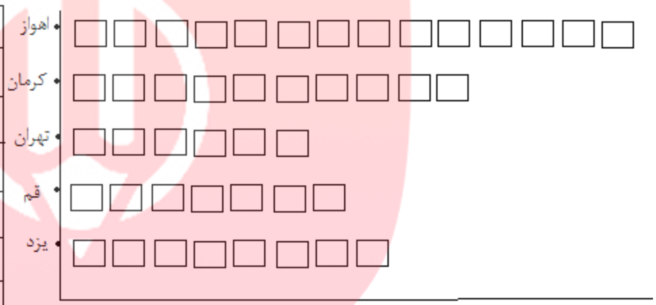
۴. نمودار تصویری

در رسم نمودار تصویری عنوان ها را بر روی محور عمودی می نویسیم. سپس اعداد را با تقریب مناسب گرد کرده، آن گاه با توجه به واحد انتخاب شده به تعداد لازم تصویر رسم می کنیم.

برای مثال نمونه ی یک نمودار تصویری در زیر آمده است:

(هر ۱۰۰ کیلومتر را با ☐ نمایش دهید.)

فاصله تا شهر مشهد (کیلومتر مربع)		
شهر	تعداد	تقریب
یزد	۸۱۰	۸۰۰
قم	۷۰۷	۷۰۰
تهران	۶۲۳	۶۰۰
کرمان	۱۰۱۵	۱۰۰۰
اهواز	۱۴۲۰	۱۴۰۰



نکته :

- در برنامه ریزی های کلان کشوری نیاز به عدد های واقعی و بسیار دقیق نیست. به این دلیل اعداد را به صورت تقریبی به کار می برند. به طور مثال برای بررسی جمعیت کشورهای جهان از تقریب کمتر از یک میلیون استفاده می کنیم. یعنی نفرات کمتر از یک میلیون در بررسی ها اهمیتی ندارند و گرد شده ی عدد ها را به کار می برند.
- نمودار تصویری برای کوچک کردن و ساده کردن آمارهایی که داده های بسیار زیاد دارند، به کار می رود.

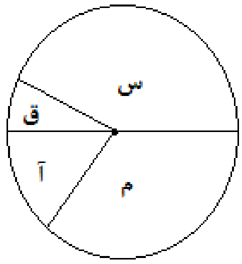
نتیجه : از نمودار تصویری بیشتر برای بررسی مقدارهای بسیار زیاد استفاده می شود.

۵. نمودار دایره ای

در رسم نمودار دایره ای ابتدا مقدارها را به درصد تبدیل می کنیم به این صورت که هر عدد را بر مجموع آنها تقسیم کرده و حاصل را در ۱۰۰ ضرب می کنیم. سپس با فرض این که دایره به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم شده باشد اندازه ی هر قسمت را مشخص می کنیم.

برای مثال نمونه ی یک نمودار دایره ای در زیر آمده است:

زاویه = $\frac{\text{فراوانی}}{\text{تعداد کل}} \times ۳۶۰$		درصد = $\frac{\text{فراوانی}}{\text{تعداد کل}} \times ۱۰۰$



زاویه	درصد	فراوانی	رنگ
۱۴۴	۴۰	۴	سفید
۳۶	۱۰	۱	قرمز
۷۲	۲۰	۲	آبی
۱۰۸	۳۰	۳	مشکی

نکته :

- از نمودارهای دایره ای برای نشان دادن مقدارهای کیفی یا گسسته استفاده می کنیم. بطوریکه نمایش فراوانی هر دسته یا گروه با بخشی از سطح دایره است.
- از نمودار دایره ای نشان می دهیم که چگونه یک مقدار مشخص به بخش های کوچکتر تقسیم می شود. در این نمودار سهم هر بخش را با تقسیم دایره مشخص می کنیم.
- در نمودار دایره ای به طور معمول سهم هر بخش را بصورت درصد محاسبه و سپس روی نمودار نمایش می دهیم.
- نمودار دایره ای نتایج داده ها و آمارگیری را به صورت درصدی نشان می دهد.

نتیجه : امروزه انواع نمودارها توسط رایانه و به کمک نرم افزارهای مختلف با دقت بسیار زیاد رسم می شود. هدف از آموزش رسم آنها در این فصل آشنایی دانش آموزان با اجزا و مفهوم نمودارها می باشد.

میانگین

میانگین چند داده ی آماری از تقسیم مجموع آنها بر تعدادشان به دست می آید.

نکته :

- میانگین = $\frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}}$
- میانگین چند داده را متوسط آن داده ها نیز می نامند.
- اگر به همه ی داده های یک گروه مقداری ثابت اضافه شود، همان مقدار به میانگین داده ها اضافه می شود.
- اگر از همه ی داده های یک گروه مقداری ثابت کم شود، همان مقدار ثابت از میانگین داده ها کم می شود.
- اگر همه ی داده های یک گروه را در مقداری ثابت ضرب کنیم، میانگین داده ها نیز در همان مقدار ضرب می شود.
- اگر همه ی داده های یک گروه را بر مقداری ثابت تقسیم کنیم، میانگین داده ها نیز بر همان مقدار تقسیم می شود.
- در یک سری از داده های مرتب و متوالی که فاصله های برابر دارند اگر تعداد اعداد فرد باشد، میانگین کل آنها با عدد وسطی برابر است.
- در یک سری از داده های مرتب و متوالی که فاصله های برابر دارند اگر تعداد اعداد زوج باشد، میانگین کل آنها با عدد میانگین دو عدد وسط برابر است.

- اگر تعدادی عدد را به یک گروه اضافه کنیم و یا از آن ها کم کنیم و میانگین این اعداد اضافه شده یا کم شده با میانگین گروه اصلی برابر باشد، میانگین اعداد در گروه جدید هیچ تغییری نمی کند.

احتمال

برای هر پیشامد امکان وقوع حالت های مختلفی وجود دارد. با شناخت آن پیشامد می توانیم حالت های ممکن برای اتفاق افتادن آن را بنویسیم.

نکته :

- برای این که امکان وقوع یک پیشامد را در ریاضی مشخص کنیم، از کلمه ی «احتمال» استفاده می کنیم.
- به وسیله ی حالت های ممکن برای یک پیشامد، می توان «احتمال» رخ داده آن را به دست آورد.

هیچ پیشامدی نمی تواند خارج از این ۳ حالت باشد: بطور قطع اتفاق می افتد، احتمال دارد اتفاق بیفتد، امکان ندارد اتفاق بیفتد.

بنابراین با شناخت شرایط هر پیشامد یکی از حالت های فوق را انتخاب می کنیم.

نکته :

- در ریاضی احتمال رخ دادن یک پیشامد را با یک کسر کوچکتر از یک بیان می کنیم.
- اگر پیشامدی به طور قطع اتفاق بیفتد، آن را با عدد ۱ نشان می دهیم.
- اگر پیشامدی امکان اتفاق افتادن نداشته باشد آن را با عدد صفر نشان می دهیم.
- اگر در یک بازی شانسی، امکان برنده شدن بازیکنان با هم مساوی باشد، می گوییم بازی عادلانه است.
- احتمال رخ دادن هر پیشامد از صفر شروع شده و تا یک ممکن است پیش برود.

اگر احتمال رخ دادن پیشامد زیاد باشد، آن را نزدیک تر به یک انتخاب می کنیم و اگر احتمال رخ دادن پیشامد کم باشد آن را نزدیک تر به صفر انتخاب می کنیم. به طور قطع عددی که به یک نزدیک تر است بزرگتر خواهد بود.

نکته :

- در بسیاری از موارد احتمال رخ دادن پیشامدها قابل مقایسه می باشند.
- در مقایسه احتمال ها هرچه احتمال رخ دادن پیشامدی بیشتر باشد، عدد احتمال به یک نزدیکتر است.
- گاهی اوقات احتمال رخ دادن دو پیشامد با هم برابر است.
- در احتمال، هرچه تعداد دفعات آزمایش را بیشتر کنیم، نسبت ها به کسرهای واقعی و دقیق تر نزدیک می شوند.
- در یک کیسه حاوی تعدادی مهره به رنگ های سبز ، زرد و قرمز . با خرج کردن مهره از داخل کیسه احتمال اینکه مهره خارج شده رنگ مد نظر ما باشد، برابر است با :

احتمال خروج رنگ سبز = $\frac{\text{تعداد مهره های سبز}}{\text{تعداد کل مهره ها}}$

احتمال خروج رنگ زرد = $\frac{\text{تعداد مهره های زرد}}{\text{تعداد کل مهره ها}}$

احتمال خروج رنگ قرمز = $\frac{\text{تعداد مهره های قرمز}}{\text{تعداد کل مهره ها}}$

- برای بدست آوردن احتمال وقوع یک پیشامد بطور کلی از رابطه ی زیر استفاده می کنیم:

احتمال وقوع یک پیشامد = $\frac{\text{تعداد حالت های موردنظر}}{\text{تعداد کل حالت های ممکن}}$

- در هر مسئله ی احتمال، همیشه مجموع نسبت های تمام حالت های ممکن برابر عدد یک است. برای مثال در نکته قبلی مجموع نسبت های (احتمال های) خروج هر رنگ، برابر یک می شود.
- مجموع احتمال تمام حوادث رخ داده در یک پیشامد همیشه برابر یک می باشد. درست مانند درصدها که درصد کامل را ۱۰۰٪ فرض می کنیم. در احتمال نیز بالاترین احتمال را با عدد یک نمایش می دهیم.
- اگر دو تاس یا دو سکه همزمان پرتاب شوند، تعداد حالت های ممکن برابر با حاصلضرب حالت های هر یک از آن ها است. برای مثال زمانیکه دو تاس را با هم بیندازیم تعداد کل حالت های ممکن برابر است با ۳۶ = ۶ × ۶

مثال: یک تاس و یک سکه با هم انداخته می شوند، احتمال های زیر را به دست آورید.

الف) تاس عدد زوج باشد یا سکه رو بیاید.

ب) تاس عدد زوج باشد و سکه رو بیاید.

حل:　　کل حالت های ممکن = ۲ × ۶ = ۱۲

الف) $\frac{۹}{۱۲}$ = {(۱،ر)– (۲،ر)– (۳،ر)–(۴،ر)– (۵،ر)–(۶،ر)– (پ،۶)– (پ،۴)– (پ،۲)}

ب) $\frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۱۲}$ = {(۲،ر)– (۴،ر)– (۶،ر)}