بسم الله الرحمن الرحیم

نکات مهم ریاضی ششم

نکات مهم فصل ۱ و ۲
ریاضی پایه ششم دبستان

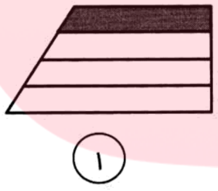
۱

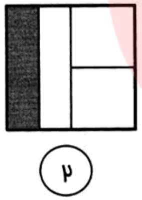
مفهوم کسر – رابطه‌ی کسر و شکل

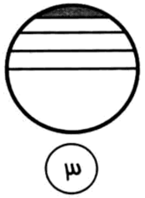
☐ کسر در لغت به **معنی** شکستن است و در ریاضی به معنی بخشی از قسمت‌های مساوی از یک واحد کامل است.

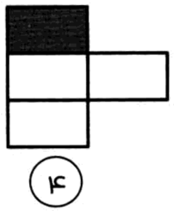
☐ اگر بخواهیم برای یک شکل «کسر» بنویسیم، ابتدا باید آن شکل را به قسمت‌های «مساوی» تقسیم کنیم. مثلاً در کسر $\frac{۳}{۵}$ ، عدد «۵» مخرج کسر نام دارد و نشان دهنده‌ی تمام قسمت‌های مساوی شکل است و عدد «۳» صورت کسر است و نشان دهنده‌ی قسمت‌های مساوی انتخاب شده‌ی شکل است.

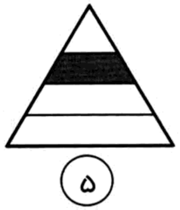
مثال ۱. $\frac{۱}{۴}$ کدام شکل‌ها، رنگ شده‌است؟

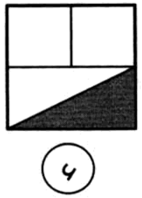

۱


۲


۳


۴

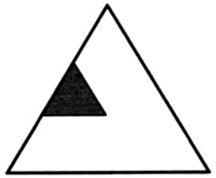

۵

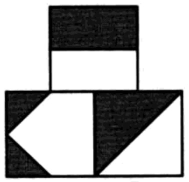

۶

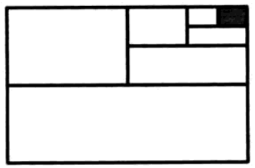
پاسخ : شکل‌های: ۲، ۴، ۶

مثال ۲. چه کسری از شکل‌های زیر رنگ شده‌است؟

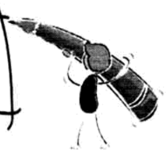

شکل «د»


شکل «ج»


شکل «ب»


شکل «الف»

پاسخ : شکل «الف»: $\frac{۱}{۶۴}$ ، شکل «ب»: $\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۱۲}$ ، شکل «ج»: $\frac{۱}{۹}$ ، شکل «د»: $\frac{۷}{۱۶}=\frac{۱۴}{۳۲}$



انواع کسر

☐ **کسرهای کوچک‌تر از واحد:** کسرهایی که صورتشان از مخرجشان کوچک‌تر است. این کسرها از یک واحد کامل کوچکترند. مثل: $\frac{۳}{۴}$, $\frac{۷۷}{۷۸}$, $\frac{۱۰۰۰۲}{۱۰۰۰۵}$.

☐ **کسرهای بزرگ‌تر از واحد:** کسرهایی که صورتشان از مخرجشان بزرگ‌تر است. این کسرها از یک واحد کامل بزرگ‌ترند. مثل: $\frac{۱۱}{۹}$, $\frac{۹۹}{۸۹}$, $\frac{۲۲۲۲۲}{۱۱۱۱۱}$.

☐ **کسرهای برابر واحد:** کسرهایی که صورت و مخرجشان برابر است. این کسرها با یک واحد کامل برابرند. مثل: $\frac{۵}{۵}$, $\frac{۳۰۰۲}{۳۰۰۲}$, $\frac{۷۰۰۰۷}{۷۰۰۰۷}$.

☐ **کسرهای برابر با صفر:** کسرهایی که صورتشان «صفر» است. این کسرها برابر با صفرند. مثل: $\frac{۰}{۴}$, $\frac{۰}{۷۵}$.

☐ **توجه! توجه!** هیچ کسری وجود ندارد که مخرج آن صفر باشد. این چنین عددی در ریاضی نداریم. مثل: $\frac{۷}{۰}$, $\frac{۱۹}{۰}$.

مثال **۳. با عددهای { ۱,۲,۳,۴,۵ } چند کسر کوچک‌تر از واحد می‌توان نوشت؟**

پاسخ: $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۴},\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵}$

۲

آشنایی با اسامی بعضی کسرها

☐ کسر $\frac{۱}{۲}$ را نصف می‌گوییم و برای به دست آوردن نصف یک عدد، آن را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

☐ کسر $\frac{۱}{۳}$ را ثلث می‌گوییم و برای به دست آوردن ثلث یک عدد، آن را بر ۳ تقسیم می‌کنیم.

☐ کسر $\frac{۱}{۴}$ را ربع می‌گوییم و برای به دست آوردن ربع یک عدد، آن را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

☐ کسر $\frac{۱}{۵}$ را خمس می‌گوییم و برای به دست آوردن خمس یک عدد، آن را بر ۵ تقسیم می‌کنیم.

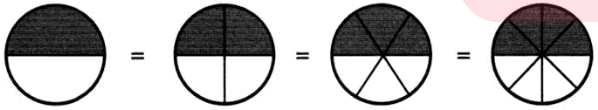
مثال **۴. ثلث دانش‌آموزان یک کلاس عینک می‌زنند. تعداد کل دانش آموزان این کلاس چند نفر است؟**

۱) ۳۴ نفر
۲) ۵۷ نفر
۳) ۴۰ نفر
۴) ۳۷ نفر

پاسخ: تعداد آن‌ها باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد و فقط ۵۷ بر ۳ بخش‌پذیر است.

کسرهای مساوی

☐ اگر صورت و مخرج یک کسر را در یک عدد (غیر از صفر) ضرب کنیم، کسری مساوی با آن کسر، به دست می‌آید. یعنی مقدار کسر تغییری نمی‌کند. مثل:



$\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۳}{۶} = \frac{۴}{۸}$

$$\frac{۳}{۷} \xrightarrow{\times ۲} \frac{۶}{۱۴} = \frac{۹}{۲۱} = \dots \qquad (\times ۲,\ \times ۳)$$

ساده کردن کسرها

☐ اگر صورت و مخرج یک کسر را بر یک عدد (غیر از صفر) تقسیم کنیم، کسری مساوی با آن کسر به دست می‌آید. به این عمل «ساده کردن» می‌گوییم.

مثال ۵. کسر $\frac{۱۲}{۵۲}$ را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

پاسخ: روش اول:

$$\frac{۱۲_{\div ۲}}{۵۲_{\div ۲}}=\frac{۶_{\div ۲}}{۲۶_{\div ۲}}=\frac{۳}{۱۳}$$

روش دوم:

$$\frac{۱۲}{۵۲}=\frac{۶\times \cancel{۲}}{۲۶\times \cancel{۲}}=\frac{۶}{۲۶}=\frac{۳\times \cancel{۲}}{۱۳\times \cancel{۲}}=\frac{۳}{۱۳}$$

روش سوم: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۲ و ۵۲ را پیدا می‌کنیم و صورت و مخرج را بر آن تقسیم می‌کنیم. در این صورت ساده‌کردن فقط در یک مرحله انجام می‌گیرد.

$$\frac{۱۲_{\div ۴}}{۵۲_{\div ۴}}=\frac{۳}{۱۳}$$

☐ ممکن است چندین عدد که در هم ضرب شده‌اند در صورت و مخرج مشاهده کنید. در این صورت باز هم می‌توانید عمل ساده کردن را انجام دهید.

مثال ٦. ساده‌ترین شکل کسر مقابل را به دست آورید.

$$\frac{۴۵\times ۲۰}{۳۰\times ۱۶}=$$

پاسخ:

$$\frac{\overset{۳}{\cancel{۴۵}}\times \overset{۵}{\cancel{۲۰}}}{\underset{۲}{\cancel{۳۰}}\times \underset{۴}{\cancel{۱۶}}}=\frac{۱۵}{۱۸}$$

۳

مقایسه‌ی کسرها

☐ در کسرهایی که صورت‌های مساوی دارند، کسری بزرگ‌تر است که، مخرجش کوچک‌تر باشد.

مثال ۷. کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید و بنویسید.

$$\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۱۵},\frac{۱}{۴},\frac{۲}{۶},\frac{۱}{۶}$$

پاسخ:

$$\frac{۱}{۲},\frac{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\underset{۵}{\cancel{۱۵}}},\frac{۱}{۴},\frac{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\underset{۳}{\cancel{۶}}},\frac{۱}{۶}\Rightarrow\frac{۱}{۲}>\frac{۲}{۶}>\frac{۱}{۴}>\frac{۳}{۱۵}>\frac{۱}{۶}$$

☐ در کسرهایی که مخرج مساوی دارند، کسری بزرگ‌تر است که صورتش بزرگ‌تر باشد.

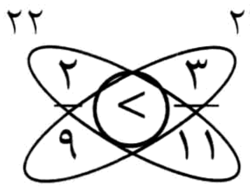
مثال ۸. کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید و بنویسید.

$$\frac{۴}{۵},\frac{۹}{۱۰},\frac{۸}{۲۰},\frac{۲۷}{۴۰}$$

پاسخ:

$$\frac{۴_{\times ۸}}{۵_{\times ۸}},\frac{۹_{\times ۴}}{۱۰_{\times ۴}},\frac{۸_{\times ۲}}{۲۰_{\times ۲}},\frac{۲۷}{۴۰}\Rightarrow\frac{۹}{۱۰}>\frac{۴}{۵}>\frac{۲۷}{۴۰}>\frac{۸}{۲۰}$$

☐ یکی از روش‌های مقایسه این است که صورت کسر اول را در مخرج کسر دوم ضرب می‌کنیم و بالای کسر اول می‌نویسیم. و صورت کسر دوم را در مخرج کسر اول ضرب کرده و بالای کسر دوم می‌نویسیم. عدد بالای هر کسر که بزرگ‌تر باشد، آن کسر، بزرگ‌تر است. به این روش «طرفین، وسطین» می‌گوییم.



مثال ۹. کسرهای زیر را با هم مقایسه کنید و از کوچک به بزرگ بنویسید.

$$\frac{۹}{۲۰},\frac{۵}{۱۱},\frac{۴}{۹},\frac{۳}{۸},\frac{۴}{۵},\frac{۶}{۷}$$

پاسخ:

$$\frac{۹}{۲۰},\frac{۵}{۱۱},\frac{۴}{۹},\frac{۳}{۸},\frac{۴}{۵},\frac{۶}{۷}\Rightarrow\frac{۶}{۷}>\frac{۴}{۵}>\frac{۵}{۱۱}>\frac{۹}{۲۰}>\frac{۴}{۹}>\frac{۳}{۸}$$

☐ در حالتی که صورت و مخرج کسرها عددهای بزرگی باشند و اختلاف صورت و مخرج دو کسر برابر باشد، به یکی از روش‌های زیر مقایسه می‌کنیم:

الف) اگر کسرها کوچک‌تر از واحد باشند، کسری بزرگ‌تر است که صورت آن بزرگ‌تر باشد. مانند:

$$\frac{۲۲۲}{۲۲۵} \quad \textcircled{>} \quad \frac{۱۹۹}{۲۰۲}$$

ب) اگر کسرها بزرگ‌تر از واحد باشند، کسری بزرگ‌تر است که صورت آن کوچک‌تر باشد. مانند:

$$\frac{۷۸۹۹}{۷۸۹۱} \quad \textcircled{<} \quad \frac{۳۳۳۸}{۳۳۳۰}$$

تعیین کسرهای بین دو کسر

☐ برای یافتن کسر بین دو کسر، صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را نیز با هم جمع می‌کنیم. کسر به وجود آمده، بین دو کسر اولیه می‌باشد. مانند:

$$\frac{۱}{۲} \quad \overset{\frac{۴}{۹}}{\vee} \quad \frac{۳}{۷}$$

☐ چون عمل بالا را بارها و بارها می‌توان تکرار کرد، پس بین دو کسر، بی‌نهایت کسر وجود دارد.

مثال ۱۰. سه کسر بین دو کسر $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۷}{۱۰}$ بنویسید.

پاسخ: $\frac{۷}{۱۰}, \frac{۱۶}{۲۳}, \frac{۹}{۱۳}, \frac{۱۱}{۱۶}, \frac{۲}{۳}$

مثال ۱۱. یک عدد صحیح بین دو کسر $\frac{۱۳۹۱}{۱۳۹۰}$ و $\frac{۱۳۹۰}{۱۳۹۱}$، پیدا کنید.

پاسخ: $\frac{۱۳۹۰}{۱۳۹۱}$ کوچک‌تر از یک است و $\frac{۱۳۹۱}{۱۳۹۰}$ بزرگ‌تر از یک است. پس عدد صحیح بین آن‌ها عدد «۱» است.

☐ اگر فقط صورت یک کسر را در عدد غیر صفری، ضرب و یا بر آن عدد، تقسیم کنیم، همان بلا بر سر کل کسر نیز، خواهدآمد. اگر باور نداری به مثال‌های زیر توجّه کن:

٤

$\frac{۳}{۵} \xrightarrow{\times ۳} \frac{۹}{۵} \Rightarrow$ کسر اولیه ۳ برابر شده‌است.

$\frac{۸}{۳} \xrightarrow{\div ۲} \frac{۴}{۳} \Rightarrow$ کسر اولیه نصف ($\frac{۱}{۲}$ برابر) شده‌است.

مثال ۱۲. اگر صورت کسری را ۵ برابر کنیم و مخرج آن را تغییر ندهیم، آن کسر چه تغییری خواهد کرد؟

پاسخ: پنج برابر می‌شود.

☐ اگر فقط مخرج یک کسر را در عدد غیرصفری، ضرب و یا بر آن عدد، تقسیم کنیم، برعکس آن بلا سر کل کسر، خواهد آمد.

مثال ۱۳. اگر مخرج کسری را نصف کنیم و صورت کسر را تغییر ندهیم، آن کسر چه تغییری خواهدکرد؟

پاسخ: دوبرابر می‌شود.

➢ ترکیب دو نکته‌ی بالا نیز ممکن است به وجود بیاید.

مثال ۱۴. مخرج کسری را نصف و صورت آن را ۵ برابر می‌کنیم. آن کسر چه تغییری خواهدکرد؟

پاسخ: ۲×۵ برابر یعنی ده برابر می‌شود.

عدد مخلوط

☐ اعداد مخلوط شکل دیگری از نمایش اعداد کسری هستند. مثلاً $۱\frac{۱}{۵}$ همان $\frac{۶}{۵}$ است.

☐ کسرهای بزرگ‌تر از واحد را می‌توان به صورت مخلوطی از یک عدد صحیح و یک عدد کسری، هم نوشت. مانند: $۳\frac{۱}{۵}$, $۷\frac{۱۱}{۱۸}$

☐ هر عدد مخلوط را به صورت‌های حاصل‌جمع یک عدد صحیح و یک عدد کسری، هم می‌توان نوشت.

$$\frac{۳۸}{۵} = ۹\frac{۳}{۵} = ۹ + \frac{۳}{۵}$$

عدد کسری که باید کوچک‌تر از واحد باشد.   عدد صحیح نشان‌دهنده‌ی تعداد واحدهای کامل

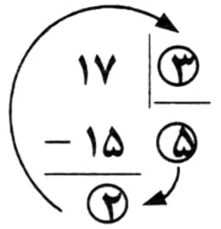
۱۵. عدد مخلوط $۱۳۷\frac{۱۳۷}{۱۳۷}$، برابر است با:

:

$$۱۳۷\frac{۱۳۷}{۱۳۷} = ۱۳۷ + \frac{۱۳۷}{۱۳۷} = ۱۳۷ + ۱ = ۱۳۸$$

☐ برای تبدیل کسر بزرگ‌تر از واحد به یک عدد مخلوط، ابتدا صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم. سپس خارج‌قسمت را عدد صحیح، باقی‌مانده را در صورت کسر قرار می‌دهیم. مخرج کسر هم همان مخرج کسر اولیه خواهد بود. (روش چرخ و فلک!!!)

مثلاً: $\frac{۱۷}{۳} \rightarrow$



عدد صحیح $\rightarrow ۵\frac{۲}{۳}$

۱۶. در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید:

$$\frac{۳۱}{۶} = \frac{۶}{۶} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{۶} = \square\frac{\square}{۶}$$

:

$$\frac{۳۱}{۶} = \frac{۶}{۶} + \frac{۶}{۶} + \frac{۶}{۶} + \frac{۶}{۶} + \frac{۶}{۶} + \frac{۱}{۶} = ۵\frac{۱}{۶}$$

☐ برای تبدیل عدد مخلوط به کسر به روش زیر عمل می‌کنیم:

جمع

$$\text{عدد صحیح}\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}} = \frac{\text{صورت} + \text{عدد صحیح} \times \text{مخرج}}{\text{مخرج}}$$

ضرب

☐ در مقایسه‌ی دو عدد مخلوط، مانند عددهای کسری عمل می‌کنیم.

جمع و تفریق کسرها

☐ جمع و تفریق با مخرج‌های مساوی را قبلاً یاد گرفته‌اید. اما اگر مخرج‌ها برابر نبودند ۲ حالت به وجود می‌آید:

حالت اول: مخرج‌ها بر هم بخش‌پذیر باشند، که صورت و مخرج کسری که مخرج کوچک‌تر دارد را در عددی ضرب می‌کنیم که دو کسر هم‌مخرج شوند.

$$\frac{۵}{۶} + \frac{۱۷}{۱۸} = \frac{۱۵}{۱۸} + \frac{۱۷}{۱۸} = \frac{۳۲}{۱۸} = ۱\frac{۱۴}{۱۸} = ۱\frac{۷}{۹}$$

حالت دوم: مخرج‌ها بر هم بخش‌پذیر نباشند، که در این‌صورت مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{۱}{۴} + \frac{۷}{۱۱} = \frac{۱۱}{۴۴} + \frac{۲۸}{۴۴} = \frac{۳۹}{۴۴}$$

جمع و تفریق اعداد مخلوط

☐ در جمع عددهای مخلوط ابتدا قسمت‌های صحیح آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم. سپس قسمت‌های کسری را با هم جمع می‌کنیم. مثال:

$$۱۱\frac{۱}{۲} + ۳\frac{۱}{۶} = (۱۱+۳) + (\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}) = ۱۴ + \frac{۴}{۶} = ۱۴\frac{۴}{۶} = ۱۴\frac{۲}{۳}$$

☐ در تفریق عددهای مخلوط ابتدا قسمت‌های صحیح آن‌ها را از هم کم می‌کنیم. سپس قسمت‌های کسری را از هم کم می‌کنیم. مثال:

$$۱۶\frac{۴}{۹} - ۷\frac{۱}{۴} = ۹\frac{۴}{۹} - \frac{۱}{۴} = ۹\frac{۱۶}{۳۶} - \frac{۹}{۳۶} = ۹\frac{۷}{۳۶}$$

ضرب و تقسیم کسرها

☐ در ضرب عدد صحیح در یک کسر (با ضرب کسر در یک عدد صحیح)، عدد صحیح را <u>فقط</u> در صورت کسر ضرب می‌کنیم.

$$۷ \times \frac{۲}{۳} = \frac{۷ \times ۲}{۳} = \frac{۱۴}{۳} \quad \text{و} \quad \frac{۴}{۵} \times ۳ = \frac{۴ \times ۳}{۵} = \frac{۱۲}{۵}$$

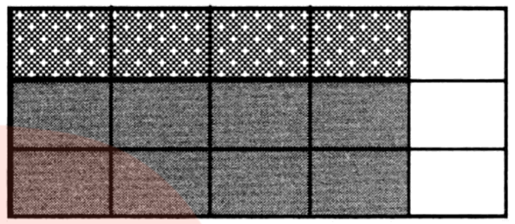
☐ در ضرب کسر در کسر، صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۷}{۵}\times\frac{۲}{۹}=\frac{۷\times۲}{۵\times۹}=\frac{۱۴}{۴۵}$$

مثال ۱۷. $\frac{۱}{۳}$ از $\frac{۴}{۵}$ شکلی، چه کسری از تمام آن شکل است؟ با رسم شکل نشان دهید.

پاسخ:

$$\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۱\times۴}{۳\times۵}=\frac{۴}{۱۵}$$



☐ برای یافتن جواب تقسیم دو کسر با مخرج‌های مساوی، صورت کسر اول را بر صورت کسر دوم تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{۱۲}{۲۰}\div\frac{۸}{۲۰}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

☐ برای تقسیم عدد صحیح بر کسر (یا کسر بر عدد صحیح)، ابتدا عدد صحیح را به کسری تبدیل می‌کنیم که مخرج آن برابر با مخرج کسر دیگری باشد. سپس مانند نکته‌ی قبل عمل می‌کنیم.

$$۶\div\frac{۷}{۳}=\frac{۱۸}{۳}\div\frac{۷}{۳}=\frac{۱۸}{۷}$$

☐ برای تقسیم دو کسر که مخرج‌های نامساوی دارند، ابتدا دو کسر را هم مخرج کرده و سپس مانند روش‌های بالا عمل می‌کنیم.

$$\frac{۸}{۵}\div\frac{۴}{۳}=\frac{۲۴}{۱۵}\div\frac{۲۰}{۱۵}=\frac{۲۴}{۲۰}=\frac{۶}{۵}$$

☐ به طور کلی، برای تقسیم هر کسری بر کسر دیگر، کسر اول را در معکوس کسر دوم ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۶}{۲۰}\div\frac{۱۲}{۸}=\frac{۶}{۲۰}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۶}}\times\overset{۲}{\cancel{۸}}}{\underset{۵}{۲۰}\times\underset{۲}{۱۲}}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

☐ روش دیگر برای تقسیم دو کسر بر هم، روش «دور در دور - نزدیک در نزدیک» است.

$$\frac{\;\frac{۳}{۴}\;}{\frac{۶}{۱۰}}\quad\frac{۳\times۱۰}{۴\times۶}=\frac{۳۰}{۲۴}=\frac{۵}{۴}$$

مثال ۱۸. حاصل کسر مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{\frac{۰}{۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}+\frac{۰}{۴}\times\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۶}\div\frac{۱}{۵}}=$$

٦

پاسخ:

$$\frac{\overset{۰}{\boxed{\frac{۰}{۲}}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}+\overset{۰}{\boxed{\frac{۰}{۴}\times\frac{۱}{۳}}}}{\frac{۱}{۶}\div\frac{۱}{۵}}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۵}{۶}}=\frac{۶}{۶۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

ضرب و تقسیم اعداد مخلوط

☐ به طور کلی، ابتدا عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنید، سپس به روش‌های فوق عمل کنید.

$$۶\frac{۲}{۳}\div۵\frac{۱}{۴}=\frac{۲۰}{۳}\div\frac{۲۱}{۴}=\frac{۲۰}{۳}\times\frac{۴}{۲۱}=\frac{۲۰\times۴}{۳\times۲۱}=\frac{۸۰}{۶۳}$$

مثال ۱۸. حاصل کسر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$(۱+\frac{۱}{۲})\times(۱+\frac{۱}{۳})\times(۱+\frac{۱}{۴})\times(۱+\frac{۱}{۵})=$$

پاسخ:

$$(۱+\frac{۱}{۲})\times(۱+\frac{۱}{۳})\times(۱+\frac{۱}{۴})\times(۱+\frac{۱}{۵})=\frac{\cancel{۳}}{۲}\times\frac{\cancel{۴}}{\cancel{۳}}\times\frac{\cancel{۵}}{\cancel{۴}}\times\frac{۶}{\cancel{۵}}=\frac{۶}{۲}=۳$$

چند الگوی ویژه

$\frac{۲}{۱\times۳}=\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱\times۲}=\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}$
$\frac{۲}{۳\times۵}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۲\times۳}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}$
⋮	⋮
$\frac{۲}{۱۱\times۱۳}=$ ـــــ − ـــــ	$\frac{۱}{۱۰\times۱۱}=$ ـــــ − ـــــ

مثال ۱۹. حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید.

$$\frac{۵}{۱\times۶}+\frac{۵}{۶\times۱۱}+\frac{۵}{۱۱\times۱۶}=$$

پاسخ :

$$\frac{۵}{۱\times۶}+\frac{۵}{۶\times۱۱}+\frac{۵}{۱۱\times۱۶}=\frac{۱}{۱}-\cancel{\frac{۱}{۶}}+\cancel{\frac{۱}{۶}}-\cancel{\frac{۱}{۱۱}}+\cancel{\frac{۱}{۱۱}}-\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱۵}{۱۶}$$

مثال ۲۰. حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید.

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۱۵}+\frac{۲}{۳۵}+\frac{۲}{۶۳}=$$

پاسخ :

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۱۵}+\frac{۲}{۳۵}+\frac{۲}{۶۳}=\frac{۲}{۱\times۳}+\frac{۲}{۳\times۵}+\frac{۲}{۵\times۷}+\frac{۲}{۷\times۹}$$

$$=\frac{۱}{۱}-\cancel{\frac{۱}{۳}}+\cancel{\frac{۱}{۳}}-\cancel{\frac{۱}{۵}}+\cancel{\frac{۱}{۵}}-\cancel{\frac{۱}{۷}}+\cancel{\frac{۱}{۷}}-\frac{۱}{۹}=\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

➢ به کسرهای مقابل «کسرهای مسلسل» می‌گویند. (آنها را از پایین به بالا (آخر به اول) حل کنید.)

$$\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱}}}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+۱}}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$

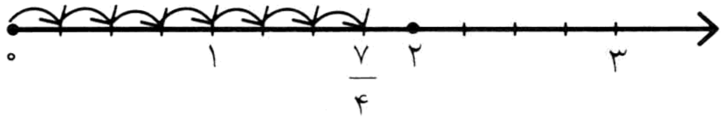
نشان دادن کسر و عدد مخلوط روی محور

☐ هر کسر یا عدد مخلوطی را می‌توان روی محور نشان داد. به این طریق که ابتدا فاصله‌ی بین هر دو عدد صحیح روی محور را به تعداد عددی که در مخرج قرار دارد، به قسمت‌های مساوی تقسیم می‌کنیم. سپس به تعداد عددی که در صورت قرار گرفته می‌شماریم و جلو می‌رویم.

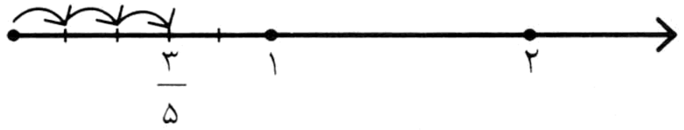
مثال ۲۱. عددهای $\frac{۳}{۵}, \frac{۷}{۴}, ۲\frac{۲}{۳}$ را روی محور نشان دهید.

پاسخ :

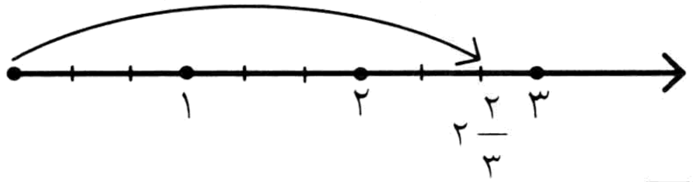
$\frac{۷}{۴}$:



$\frac{۳}{۵}$:

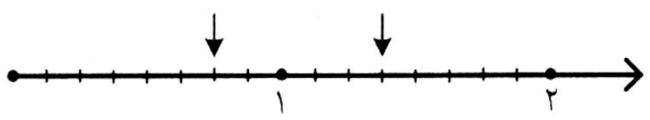


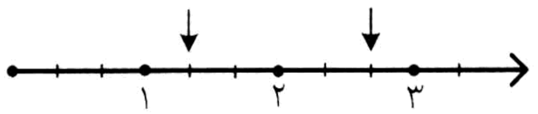
$۲\frac{۲}{۳}$:



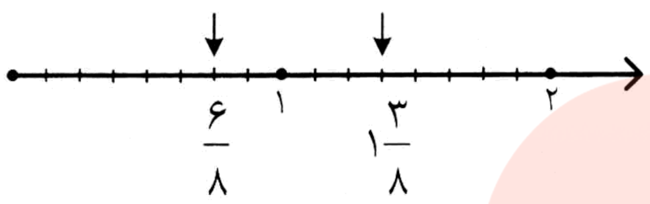
۷

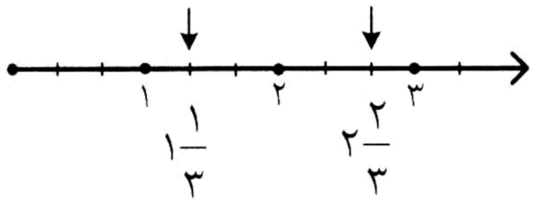
مثال ۲۲. نقاط مشخص شده روی محورها چه اعدادی را نشان می‌دهند؟





پاسخ :





جمع و تفریق با استفاده از محور

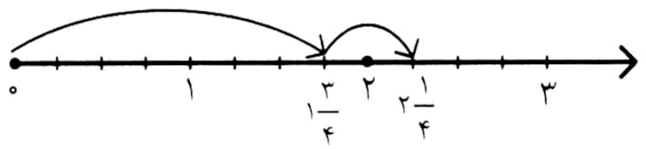
☐ برای مشخص شدن چگونگی تقسیم‌بندی واحدها روی محور اعداد، کوچک‌ترین مخرج مشترک کسرها را به‌دست می‌آوریم.

مثال ۲۳. با استفاده از محور حاصل جمع و تفریق‌های زیر را به‌دست آورید.

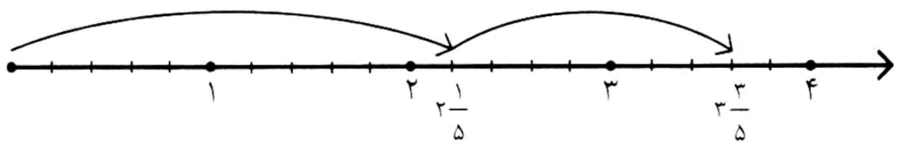
$۲\frac{۴}{۵}-۱\frac{۱}{۲}$ $\quad$ $۲\frac{۱}{۵}+۱\frac{۲}{۵}$ $\quad$ $۱\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۲}$

پاسخ :

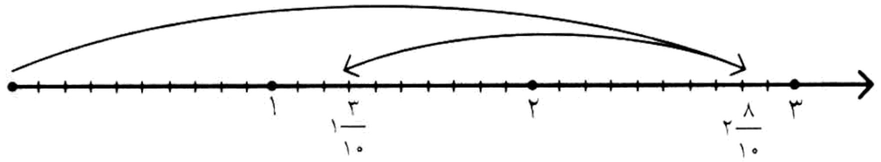
$۱\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۲}=۱\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۴}=۲\frac{۱}{۴}$

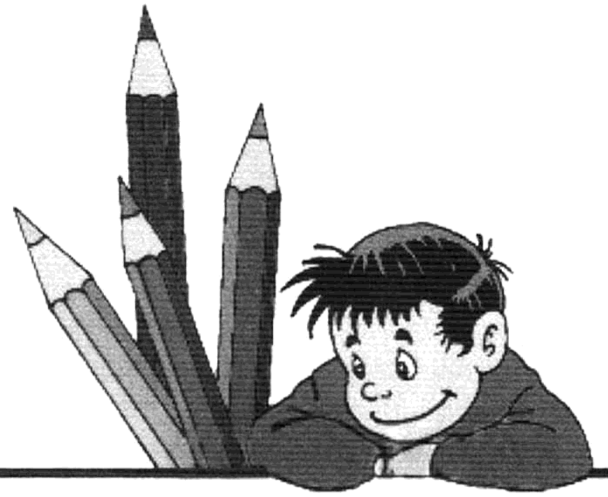


$۲\frac{۱}{۵}+۱\frac{۲}{۵}=۳\frac{۳}{۵}$



$۲\frac{۴}{۵}-۱\frac{۱}{۲}=۲\frac{۸}{۱۰}-۱\frac{۵}{۱۰}=۱\frac{۳}{۱۰}$





نکات مهم فصل ۲
عددهای اعشاری

تعریف عددهای اعشاری

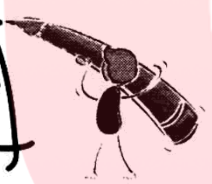
☐ اعداد اعشاری شکل دیگری از نمایش اعداد کسری هستند. (مثل ۰/۵ که برابر با $\frac{۵}{۱۰}$ است.) این اعداد از جزء «صحیح» و جزء «کسری» تشکیل شده‌اند. مثلاً: **۵/۳۶**

جزء اعشاری ←   جزء صحیح ←

☐ **جدول** ارزش **مکانی اعداد صحیح به شکل زیر است:**

...	ده‌هزارم	هزارم	صدم	دهم	یکان	دهگان	صدگان	هزارگان	...

قسمت اعشاری   قسمت صحیح



چهار عمل اصلی در عددهای اعشاری

☐ در جمع و تفریق این اعداد، باید طوری آن‌ها را زیر هم بنویسیم که ممیزها زیـر هـم قـرار گیرنـد. همچنین رقم‌هایی که ارزش مکانی یکسانی دارند نیز زیر هم قرار می‌گیرند.

۱. مجموع و تفاضل قد امیر و حسن را محاسبه کنید.

(قدّ امیر = ۱/۴۸ سانتی‌متر ، قدّ حسن = ۰/۹۹ سانتی‌متر)

:

$$\begin{array}{r} ۱/۴۸ \\ -\ ۰/۹۹ \\ \hline ۰/۴۹ \end{array} \qquad \begin{array}{r} ۱/۴۸ \\ +\ ۰/۹۹ \\ \hline ۲/۴۷ \end{array}$$

☐ در ضرب از سه روش کلی می‌توان استفاده کرد.

روش اول: در این روش اعداد اعشاری را به صورت کسر، نوشته و سپس به روش ضرب کسـرها آن دو عدد را در هم ضرب می‌کنیم. در آخر حاصل‌ضرب را مجدداً به صورت عدد اعشاری می‌نویسیم. مثال:

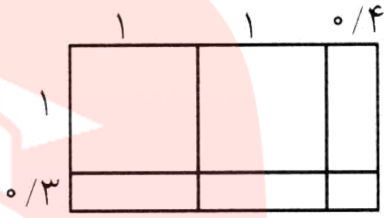
$$۱/۶\times ۲/۳=\frac{۱۶}{۱۰}\times\frac{۲۳}{۱۰}=\frac{۱۶\times ۲۳}{۱۰\times ۱۰}=\frac{۳۶۸}{۱۰۰}=۳/۶۸$$

روش دوم: دو عدد را بدون درنظر گرفتن ممیز، در هم ضرب می‌کنیم. سپس تعداد رقم‌های اعشاری دو عدد را جمع می‌کنیم و در حاصل‌ضرب به همان تعداد، رقم اعشاری در نظر می‌گیریم و ممیز می‌زنیم. مثال:

$$\begin{array}{r} ۱/۲ \\ \times\ ۰/۲۶ \\ \hline ۰/۳۱۲ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} ۱۲ \\ \times\ ۲۶ \\ \hline ۳۱۲ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} ۱/۲ \\ \times\ ۰/۲۶ \\ \hline \end{array}$$

روش سوم: استفاده از شکل به صورت زیر:

مثلاً: حاصل‌ضرب ۱/۳ × ۲/۴ را با استفاده از شکل به دست آورید.

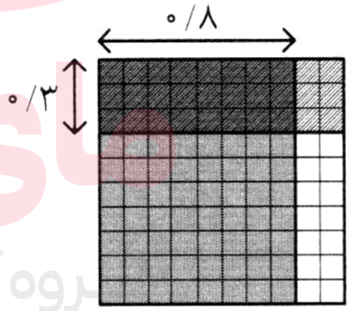


(۱×۱) + (۱×۱) + (۱ × ۰/۴) + (۱ × ۰/۳) + (۱ × ۰/۳) + (۰/۳ × ۰/۴)

۱ + ۱ + ۰/۴ + ۰/۳ + ۰/۳ + ۰/۱۲ = ۲ + ۱/۱۲ = ۳/۱۲

مثال ۲. حاصل‌ضرب ۰/۸ × ۰/۳ را با استفاده از شکل به دست آورید.

پاسخ :



☐ ضرب یک عدد اعشاری در ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰، ... موجب انتقال ممیز به تعداد صفرهای این اعداد به سمت راست می‌شود.

مثال ۳. حاصل ضرب‌های زیر را بدون انجام عملیات ضرب و به طور ذهنی به دست آورید.

الف) ۱۰۰ × ۳۰/۱۷۲ = **ب) ۰/۹۲۰۱ × ۱۰۰۰۰ =** **ج) ۰/۱۲ × ۱۰۰۰۰۰۰ =**

پاسخ : الف) ۳۰۱۷/۲ ب) ۹۲۰۱ ج) ۱۲۰۰۰۰

☐ در تقسیم، ۳ حالت وجود دارد:

* **حالت اول:** مقسوم، عدد اعشاری و مقسوم‌علیه، عدد صحیح باشد.

در این حالت مانند تقسیم معمولی عمل می‌کنیم و هرجا به اعشار رسیدیم در خارج قسمت اعشار می‌زنیم و مجدداً تقسیم را ادامه می‌دهیم. توجه داشته‌باشید که تعداد رقم‌های اعشاری باقی مانده با مقسوم برابر است.

* **حالت دوم:** مقسوم‌علیه اعشاری باشد.

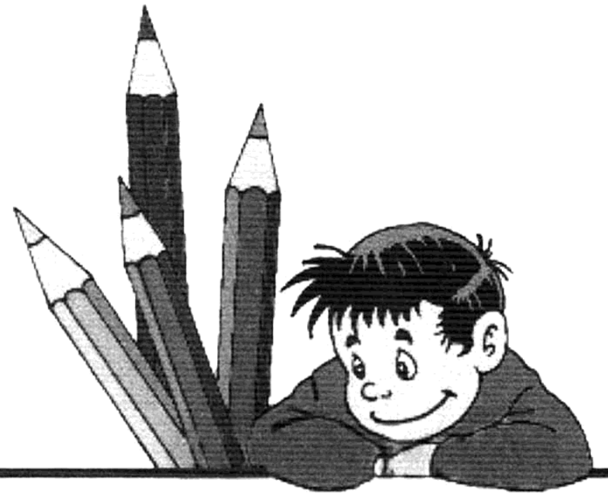
در این حالت ابتدا مقسوم و مقسوم‌علیه را در ۱۰ یا ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا ... ضرب می‌کنیم تا مقسوم‌علیه از حالت اعشاری خارج شود، سپس تقسیم را مانند حالت قبلی انجام می‌دهیم. در آخر باقی‌مانده را بر همان عددی که مقسوم و مقسوم‌علیه را در آن ضرب کرده‌بودیم، تقسیم می‌کنیم. مثلاً:

$$\begin{array}{r|l} ۱۴/۵ & ۰/۱۹ \\ \hline & ۷۶/۳ \\ \vdots & \\ \hline ۰/۰۰۳ & \end{array} \quad \underset{\xleftarrow{\div ۱۰۰}}{\xrightarrow{\times ۱۰۰}} \quad \begin{array}{r|l} ۱۴۵۰/۰ & ۱۹ \\ \hline & ۷۶/۳ \\ \vdots & \\ \hline ۰/۳ & \end{array}$$

* **حالت سوم:** مقسوم‌علیه توان‌هایی از ۱۰ باشد. {۱۰,۱۰۰,۱۰۰۰,...}

در این حالت، علامت ممیز مقسوم را به تعداد صفرهای مقسوم‌علیه به طرف چپ می‌بریم. مثلاً:

$$۳۱۰/۴۶ \div ۱۰۰ = \frac{۳۱۰/۴۶}{۱۰۰} = ۳/۱۰۴۶$$



نکات مهم فصل ۳
اندازه‌گیری طول و زاویه

اندازه‌گیری

☐ برآورد و تعیین اندازه‌ی ویژگی‌های یک کمیت مانند طول، جرم، سرعت، دما و ... را «اندازه‌گیری» می‌گوییم.

☐ در اندازه‌گیری با سه موضوع زیر سروکار داریم:

الف) وسیله‌ی اندازه‌گیری: برای اندازه‌گیری نیاز به ابزار مناسب داریم. مثلاً برای اندازه‌گیری طول از خط‌کش یا متر، برای اندازه‌گیری جرم از ترازو، و برای اندازه‌گیری دما از دماسنج، استفاده می‌کنیم.

ب) واحد اندازه‌گیری: برای اندازه‌گیری نیاز به واحدهای مناسب و استاندارد داریم. مثلاً نمی‌توانیم از واحد «وجب» به عنوان یک واحد اندازه‌گیری مناسب استفاده کنیم. چون اندازه‌ی وجب هر شخصی با دیگری متفاوت است.

ج) دقت اندازه‌گیری: دقت وسیله‌ی اندازه‌گیری، متناسب با نیازمان تعیین می‌گردد. مثلاً برای اندازه‌گیری زمان مسافرتمان دقتی در حد ساعت و دقیقه نیاز داریم. ولی برای اندازه‌گیری زمان مسابقات دوی المپیک، نیاز به دقتی در حدود دهم و صدم ثانیه، هم داریم.

مثال ۱. کدام وسیله برای اندازه‌گیری مناسب انتخاب شده‌است؟

۱) متر برای اندازه‌گیری زاویه
۲) نقاله برای اندازه‌گیری سرعت
۳) دماسنج برای اندازه‌گیری دما
۴) ساعت برای اندازه‌گیری مساحت

پاسخ: گزینه (۳).

مثال ۲. کدام «واحد» برای اندازه‌گیری طول درست است؟

۱) وجب
۲) قدم
۳) متر
۴) فاصله‌ی بین دو دست

پاسخ: گزینه (۳).

مثال **۳ . طول سنجاق ۳۵، .... است. در جای خالی واحد اندازه‌گیری مناسب قرار دهید.**

۱) کیلومتر　　۲) متر　　۳) سانتی‌متر　　۴) میلی‌متر

پاسخ **: گزینه (۴).**

☐ **با برخی از واحدهای اندازه‌گیری طول، از گذشته تا حال، آشنا شوید:**

۱- **گره:** هر گره برابر با ۶/۵ سانتی‌متر است.

۲- **ذرع:** هر ذرع برابر با ۱۶ گره و ۱۰۴ سانتی‌متر است.

۳- **گز:** مانند ذرع است.

۴- ذراع: واحدی قدیمی برای اندازه‌گیری طول است که از آرنج تا سرانگشتان یک مرد بوده‌است.

۵- فرسنگ یا فرسخ: حدود ۶ کیلومتر یا ۱۲۰۰۰ ذراع بوده‌است.

۶- **فوت یا پا:** برابر با ۳۰/۴۸ سانتی‌متر و یا ۱۲ اینچ

۷- یارد: واحد اندازه‌گیری پارچه در انگلستان است و معادل با حدوداً ۹۲ سانتی‌متر می‌باشد.

۸- **مایل:** مایل انگلیسی ۱۶۰۹ متر است و مایل دریایی ۱۸۵۲ متر است.

۹- **اینچ:** در لغت به معنی $\frac{۱}{۱۲}$ می‌باشد. برابر با حدود ۱۲ فوت و ۲/۵۴ سانتی‌متر است.

☐ **و امّا واحدهای استاندارد جهانی**

۱۰- **متر:** اندازه‌ای معین که برای تمام جهانیان یکسان است.

۱۱- **کیلومتر:** هزار برابر یک متر

۱۲- **سانتی‌متر:** برابر با $\frac{۱}{۱۰۰}$ متر.

۱۳- **میلی‌متر:** برابر با $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ متر.

۱۴- **دسی‌متر:** برابر با $\frac{۱}{۱۰}$ متر.

۱۵- **میکرون:** برابر با $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ میلی‌متر. برای اندازه‌گیری اشیاء بسیار کوچک

* ما باید از هر کدام از واحدهای اندازه‌گیری تصور درستی داشته‌باشیم تا بتوانیم تخمین‌های نسبتاً درستی بزنیم.

☐ برای تبدیل واحدهای بزرگ به کوچک از عمل «ضرب»، و برای تبدیل واحدهای کوچک به بزرگ از عمل «تقسیم» استفاده می‌کنیم.

۱۱

مثال **۴ . جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.**

- **۰/۳۸ کیلومتر برابر با .... متر است.**
- **۱/۲ متر برابر با .... سانتی‌متر است.**
- **۲/۳۴ سانتی‌متر برابر با .... میلی‌متر است.**
- **۱۲۵/۶ میکرون برابر با .... میلی‌متر است.**

پاسخ :

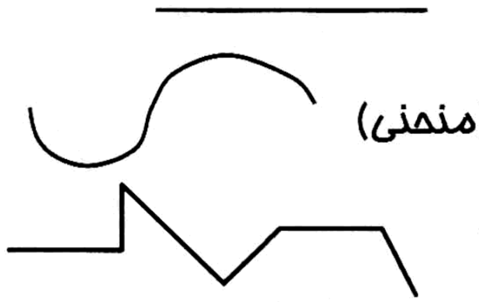
متر	۰/۳۸ × ۱۰۰۰ = ۳۸۰
سانتی‌متر	۱/۲ × ۱۰۰ = ۱۲۰
میلی‌متر	۲/۳۴ × ۱۰ = ۲۳/۴
میلی‌متر	۱۲۵/۶ ÷ ۱۰۰۰ = ۰/۱۲۵۶

نقطه، خط، پاره‌خط

☐ **نقطه:** چیزی است که تعریف مشخصی ندارد ولی برای شناخت آن چنین می‌گوییم: کوچک‌ترین اثر قلم بر کاغذ است و یا چیزی است که نه درازا دارد و نه پهنا. آن را با یک حرف نشان می‌دهند. مانند نقطه‌ی «م». (م) •

☐ **خط:** از بی‌شمار نقطه تشکیل شده که دو سرش باز و از دو طرف نامحدود است.

➢ **انواع خط**
- **خط راست**
- **خط خمیده (منحنی)**
- **خط شکسته**



☐ قرارداد ما این است که اگر نوع خط در مسائل مشخص نشود، منظور «خط راست» است.

☐ از هر نقطه واقع در یک صفحه بی‌نهایت خط می‌گذرد.

☐ از دو نقطه واقع در یک صفحه فقط یک خط راست می‌گذرد.

☐ **پاره‌خط:** قسمتی از خط است که از دو طرف محدود است.

☐ برای یافتن سریع تعداد پاره‌خط‌ها از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

۲ ÷ (یکی کم‌تر از تعداد نقاط × تعداد نقاط)

مثال ۵. **ده نقطه را روی یک خط قرار می‌دهیم. روی این خط چند پاره‌خط مشاهده می‌شود؟**

پاسخ: (۱۰ × ۹) ÷ ۲ = ۴۵

مثال ٦. **در شکل مقابل چند پاره‌خط مشاهده می‌کنید؟**

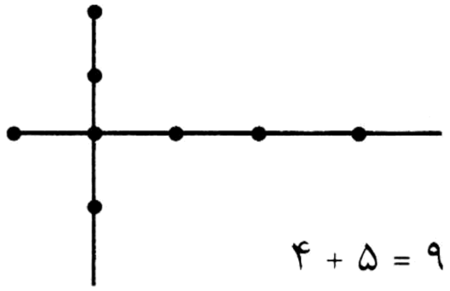
پاسخ: (۵×۴) ÷ ۲ = ۱۰ و (۶ × ۵) ÷ ۲ = ۱۵

مجموع: ۱۵ + ۱۰ = ۲۵

☐ **نیم‌خط:** قسمتی از خط که از یک طرف باز و از طرف دیگر، بسته است.

☐ تعداد نیم‌خط‌های روی یک نیم‌خط برابر با تعداد نقاط است.

مثال ۷. **درشکل مقابل چند نیم‌خط مشاهده می‌کنید؟**



پاسخ: ۴ + ۵ = ۹

☐ تعداد نیم‌خط‌های روی یک خط، برابر است با: (۲ × تعداد نقاط)

مثال ۸. **بر روی یک خط راست ۲۰ نقطه‌ی متمایز (جدا از هم) وجود دارد. تعداد نیم‌خط‌ها و پاره‌خط‌های روی آن خط را به دست آورید.**

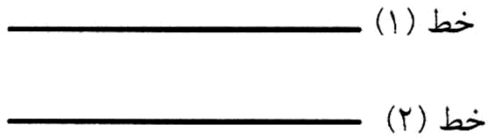
پاسخ:

تعداد نیم‌خط‌ها = ۲۰ × ۲ = ۴۰

تعداد پاره‌خط‌ها = (۲۰ × ۱۹) ÷ ۲ = ۱۹۰

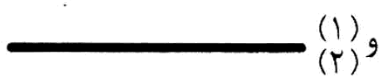
☐ دو خط در یک صفحه نسبت به هم، ۳ حالت دارند:

الف) موازی‌اند: یعنی دو خط نقطه‌ی مشترکی ندارند.



ب) متقاطع‌اند: یعنی دو خط فقط یک نقطه‌ی مشترک دارند.

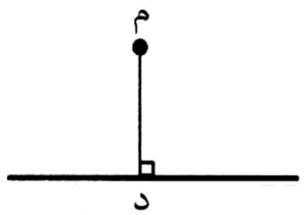
ج) منطبق‌اند: یعنی دو خط بیش از یک نقطه‌ی مشترک دارند و یا بی‌نهایت نقطه‌ی مشترک دارند.



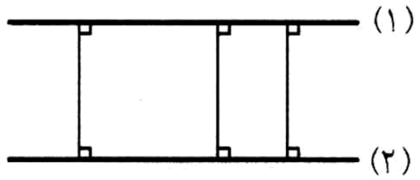
☐ کوتاه‌ترین مسیر بین دو «چیز» را فاصله‌ی آن دو نسبت به هم می‌گوییم.

☐ برای یافتن فاصله‌ی بین دو نقطه، آن‌ها را با خط‌کش به هم وصل می‌کنیم. طول این پاره‌خط، فاصله‌ی دو نقطه است.

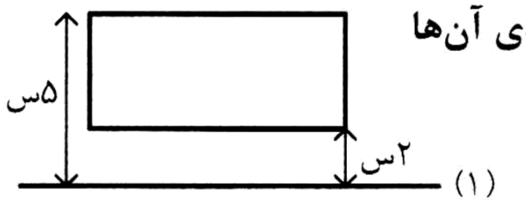
☐ فاصله‌ی یک نقطه با یک خط، برابر با طول پاره‌خطی است که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود.



☐ فاصله‌ی دو خط موازی همیشه مقدار ثابتی است.

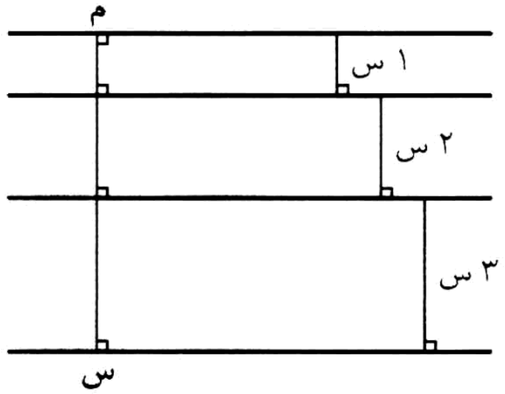


مثال ۹. **چند نقطه روی محیط مستطیل وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها از خط (۱) برابر با ۳ سانتی‌متر باشد؟**



پاسخ: خط (۲) را به موازات خط (۱) و به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از آن رسم می‌کنیم. به طوری که مستطیل را در دو نقطه قطع کند.

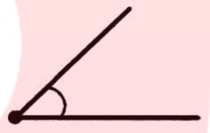
مثال **۱۰. در شکل مقابل چهار خط افقی با هم موازیند. با توجه به اندازه‌های مشخص شده روی شکل، طول پاره‌خط «م‌س» چه‌قدر است؟**



پاسخ: س ۶ = ۳ + ۲ + ۱ = طول پاره‌خط «م‌س»

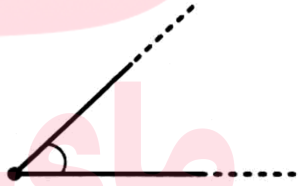
زاویه

☐ **زاویه:** شکلی است که از دو نیم‌خط که دارای یک نقطه‌ی مشترک هستند، به وجود می‌آید. نقطه‌ی مشترک را «رأس زاویه» و دو نیم‌خط را «دو ضلع زاویه» می‌نامند.



☐ واحد اندازه‌گیری زاویه، «درجه» است. یک درجه $\frac{۱}{۳۶۰}$ یک دایره می‌باشد. وسیله‌ی اندازه‌گیری زاویه، «نقّاله» می‌باشد.

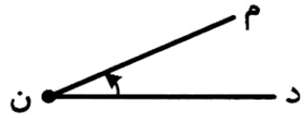
☐ هرگاه طول اضلاع یک زاویه را امتداد دهیم، اندازه‌ی زاویه تغییری نمی‌کند.



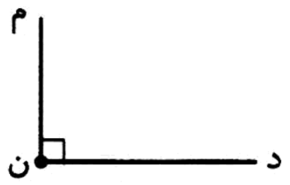
☐ **انواع زاویه:**

الف) زاویه‌ی صفر: زاویه‌ای که دو ضلع آن بر هم منطبق است. (یعنی دو ضلع روی هم قرار می‌گیرند.)

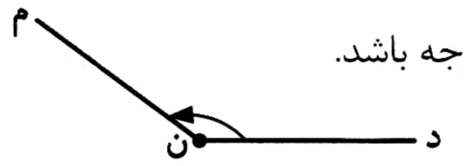
ب) زاویه‌ی تند (حاده): زاویه‌ای که اندازه‌ی آن بین صفر تا ۹۰ درجه است.



ج) زاویه‌ی قائمه (راست): زاویه‌ی ۹۰ درجه است.

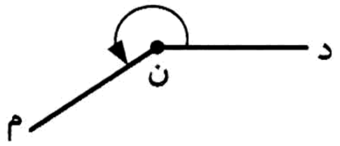


د) زاویه‌ی باز (منفرجه): زاویه‌ای که اندازه‌ی آن بین ۹۰ تا ۱۸۰ درجه باشد.

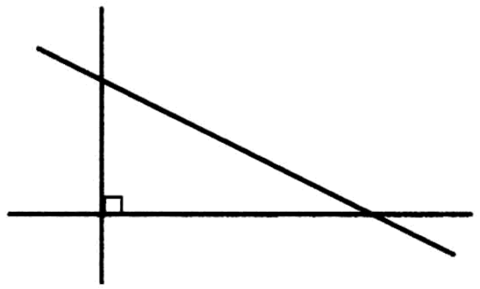


هـ) زاویه‌ی نیم‌صفحه: زاویه‌ای که دو ضلع آن در امتداد هم است و اندازه‌ی آن ۱۸۰ درجه می‌باشد.

و) زاویه‌ی کاو: زاویه‌ای که اندازه‌ی آن بیشتر از ۱۸۰ درجه می‌باشد.



مثال **۱۱. در شکل مقابل چند زاویه‌ی تند و چند زاویه‌ی باز و چند زاویه‌ی راست، مشاهده می‌کنید؟**

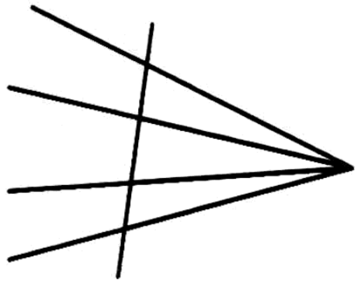


پاسخ: ۴ زاویه‌ی تند، ۴ زاویه‌ی باز، ۴ زاویه‌ی راست یا قائمه

☐ برای یافتن تعداد زاویه‌ها، در داخل یک زاویه‌ی دیگر، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

۲ ÷ (یکی کم‌تر از تعداد ضلع‌ها × تعداد ضلع‌ها)

مثال **۱۲. در شکل روبه‌رو چند زاویه‌ی کوچک‌تر از نیم‌صفحه، قابل مشاهده است؟**



پاسخ: (۴×۳) ÷ ۲ = ۶ → ۶ + ۱۶ = ۲۲

☐ اجزای کوچک‌تر از «درجه» عبارتند از: دقیقه و ثانیه

☐ **تعریف دقیقه:** اگر زاویه‌ی یک درجه به ۶۰ قسمت مساوی تقسیم شود، هر قسمت یک «دقیقه» نامیده می‌شود. پس هر دقیقه $\frac{۱}{۶۰}$ زاویه‌ی یک درجه است. دقیقه را با علامت (') نشان می‌دهیم.

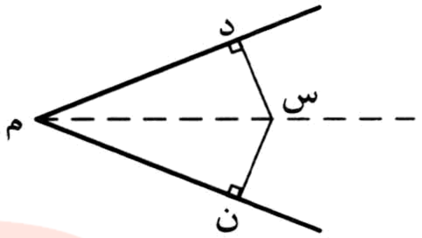
درجه $۱' = \frac{۱}{۶۰}$ یا $۱^\circ = ۶۰'$

☐ **تعریف ثانیه:** اگر یک دقیقه را به ۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت یک ثانیه نامیده می‌شود. پس هر ثانیه $\frac{۱}{۶۰}$ دقیقه است و در نتیجه هر ثانیه $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ درجه است. ثانیه را با علامت (") نشان می‌دهیم.

درجه $\frac{۱}{۳۶۰۰} =$ دقیقه $\frac{۱}{۶۰} = ۱''$ یا $۱' = ۶۰''$

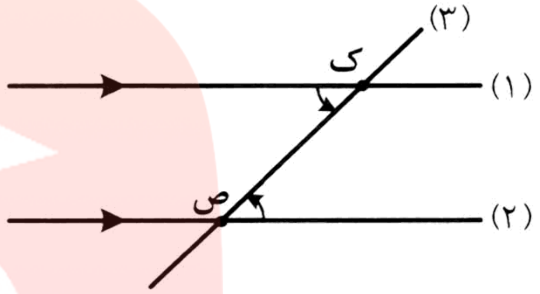
به عنوان مثال زاویه‌ی ۵۲ درجه و ۲۳ دقیقه و ۱۸ ثانیه را به صورت "۵۲°,۲۳',۱۸ نشان می‌دهیم.

☐ نیمساز، نیم‌خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند و هر نقطه روی آن از دو ضلع زاویه به یک فاصله می‌باشد.



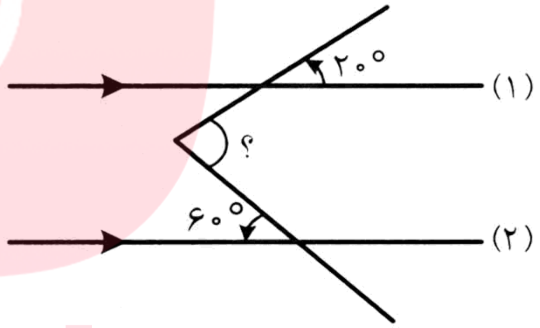
«س‌د» = «س‌ن»

☐ یک خطّ مورّب (غیرموازی)، دو خط موازی را قطع می‌کند.

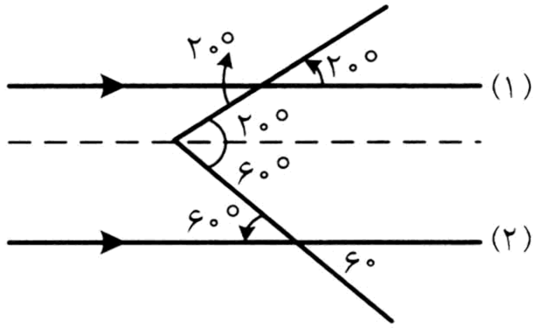


در این صورت: زاویه‌ی «ک» = زاویه‌ی «ص»

مثال ۱۳. دو خط (۱) و (۲) با هم موازیند. اندازه‌ی زاویه‌ی مجهول را به دست آورید.

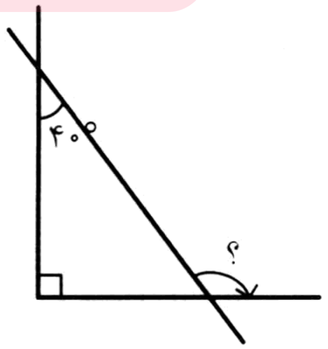


پاسخ :

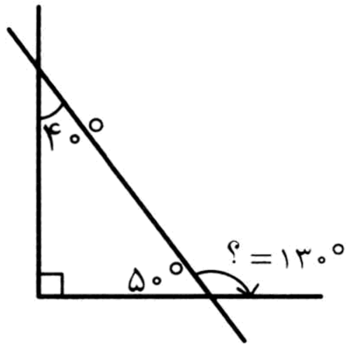


☐ مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

مثال ۱۴. در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی مجهول را به دست آورید.

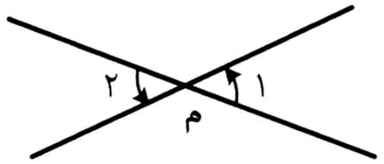


پاسخ :



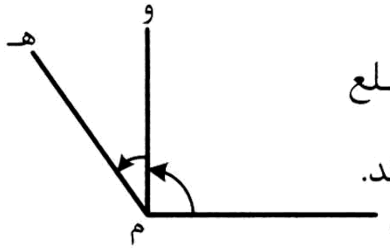
☐ **حالت‌های مختلف دو زاویه نسبت به هم:**

الف) دو زاویه‌ی متقابل به رأس: دو زاویه‌ای که در رأس مشترکند و اضلاع آن‌ها در امتداد یکدیگر باشند. این دو زاویه با هم برابرند.



در این حالت ۴ زاویه به وجود می‌آید که دوبه‌دو با هم مساویند. م̂۱ = م̂۲

ب) دو زاویه‌ی مجاور: دو زاویه که در رأس و یک ضلع مشترکند و ضلع مشترک بین دو ضلع دیگر باشد. مثلاً دو زاویه‌ی «ن‌مو» و «هـ مو» مجاورند.



ج) دو زاویه‌ی متمم: دو زاویه‌ای که مجموع‌شان ۹۰ درجه باشد. این دو زاویه لزوماً مجاور نیستند.

د) دو زاویه‌ی مکمل: دو زاویه‌ای که مجموع‌شان ۱۸۰° باشد. این دو زاویه لزوماً مجاور نیستند.

هـ) دو زاویه‌ی مجانب: دو زاویه‌ای که هم مجاور باشند و هم مکمل، دو زاویه‌ی مجانبند.

مثال ۱۵. درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) دو زاویه‌ی مجاور حتماً متمم‌اند.
ب) دو زاویه‌ی مجاور حتماً مکمل‌اند.
ج) دو زاویه‌ی متقابل به رأس حتماً متمم‌اند.
د) دو زاویه‌ی متقابل به رأس حتماً مکمل‌اند.

پاسخ : «الف» و «ب» درست نیستند. چون دو زاویه می‌توانند مجاور باشند ولی متمم و مکمل نباشند. «ج» و «د» هم درست نیستند، به دلیل قبلی.

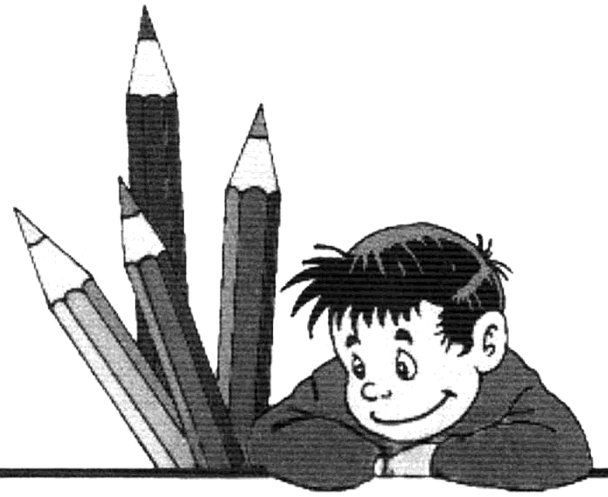
☐ برای یافتن زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار یک ساعت، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$(\text{دقیقه} \times \frac{۱۱}{۲}) - (\text{ساعت} \times ۳۰)$$

اگر عدد پرانتز دوم بزرگ‌ترشد، جای پرانتز اول و دوم را عوض می‌کنیم.

مثال ۱٦. زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت در ۳ و ۲۰ دقیقه را محاسبه کنید.

پاسخ : $(۳۰\times۳)-(\frac{۱۱}{۲}\times۲۰)=۹۰-۱۱۰ \rightarrow ۱۱۰-۹۰=۲۰$ درجه



نکات مهم فصل ۴
عددهای اعشاری

عددهای تقریبی

☐ تقریب به معنی «نزدیک کردن» است. هر گاه مقدار محاسبه شده با مقدار واقعی برابر نباشد، به آن «مقدار تقریبی» می‌گوییم.

معمولاً از عددهای تقریبی برای ساده شدن محاسبات و بررسی‌های عددی، استفاده می‌کنیم.

در زندگی روزمره متناسب با موضوعاتی که سر و کار داریم از عددهای تقریبی به جای عددهای دقیق و واقعی، استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. در کدام یک از گزینه‌های زیر عدد بیان شده دقیق است؟

۱) میانگین قد بچه‌های کلاس ۱/۵ متر است.
۲) وزن علیرضا ۴۰ کیلوگرم است.
۳) نصف کیک تولد را ما می‌خوریم.
۴) ما دو برادر و سه خواهر بودیم.

پاسخ: گزینه (۴)، چون تعداد برادرها و خواهرها تعداد دقیقی است.

☐ وسایل و ابزاری که ما برای اندازه‌گیری استفاده می‌کنیم، دقت‌های متفاوتی دارند. مثلاً دقت خط‌کش‌های معمولی در حدّ میلی‌متر است ولی با خط‌کش‌های مهندسی، اندازه‌گیری در حد دهم میلی‌متر را نیز می‌توانیم انجام دهیم و طول یک جسم را با دقتی در حد دهم میلی‌متر بیان کنیم.

☐ به دو روش تقریب می‌زنیم:

الف) روش قطع کردن　　　ب) روش گرد کردن

که روش گرد کردن دقیق‌تر از روش قطع کردن است.

روش قطع کردن

☐ در این روش رقم‌هایی که ارزش مکانی آن‌ها کم‌تر از «تقریب» است را از عدد جدا کرده (قطع می‌کنیم) و به جای آن‌ها صفر می‌گذاریم. مثلاً وقتی می‌گوییم با تقریب کم‌تر از ۱۰۰ یعنی رقم‌هایی با ارزش مکانی کم‌تر از «صدگان» را نادیده گرفته و به جای آن‌ها صفر می‌گذاریم.

☐ فرقی نمی‌کند که«عدد» و یا «تقریب» ما عدد صحیح باشند یا عدد اعشاری.

☐ تقریب یک عدد را با علامت ≃ نشان می‌دهیم.

مثال ۲. به روش قطع کردن و با تقریب‌های داده شده، عددهای تقریبی را بنویسید.

۱) $\text{۳۵۶} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۱۰}} \simeq \text{...............}$

۲) $\text{۱۲۳۴} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۱۰۰}} \simeq \text{...............}$

۳) $\text{۳۹/۱۴} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۱}} \simeq \text{...............}$

۴) $\text{۲۳۷/۴۵۹} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۰/۱}} \simeq \text{...............}$

پاسخ:

۱) $\text{۳۵۶} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۱۰}} \simeq \text{۳۵۰}$

ارزش مکانی ۶ کم‌تر از ۱۰ است پس آن را قطع کرده و به جای آن صفر می‌گذاریم.

۲) $\text{۱۲۳۴} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۱۰۰}} \simeq \text{۱۲۰۰}$

ارزش مکانی ۳۴ کم‌تر از ۱۰۰ است پس آن را قطع کرده و به جای آن صفر می‌گذاریم.

۳) $\text{۳۹/۱۴} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۱}} \simeq \text{۳۹/۰۰=۳۹}$

ارزش مکانی ۰/۱۴ کم‌تر از ۱ است پس آن را قطع کرده و به جای آن صفر می‌گذاریم.

۴) $\text{۲۳۷/۴۵۹} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۰/۱}} \simeq \text{۲۳۷/۴۰۰} \simeq \text{۲۳۷/۴}$

ارزش مکانی ۰/۰۵۹ کم‌تر از ۰/۱ است پس آن را قطع کرده و به جای آن صفر می‌گذاریم.

☐ برای این‌که مقدار یک کسر را به‌صورت عدد اعشاری نشان دهیم، صورت را بر مخرج تقسیم کرده و ادامه می‌دهیم.

مثال ۳. مقدار تقریبی کسر $\frac{۷}{۱۵}$ با تقریب کم‌تر از ۰/۰۱ به روش قطع کردن، کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۶ ۳) ۰/۴۶۶ ۴) صفر

پاسخ: گزینه (۲)،

۷۰ | ۱۵
−۶۰ | ۰/۴۶۶...
۱۰۰
−۹۰
۱۰۰
−۹۰
۱۰

$\text{۰/۴۶۶...} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۰/۰۱}} \simeq \text{۰/۴۶}$

روش گرد کردن

در این روش مانند روش قطع کردن عمل می‌کنیم. با در نظر گرفتن این موضوع که اگر اولین رقم از رقم‌هایی که حذف می‌کنیم (رقم سمت چپ) برابر با ۵ و یا بیش‌تر از ۵ باشد باید به آخرین رقمی که حذف نمی‌شود یک واحد اضافه کنیم. مثلاً عدد ۱۷۹۸۳ با تقریباً کم‌تر از ۱۰۰۰ و به روش گرد کردن تبدیل به ۱۸۰۰۰ می‌شود.

مثال ۴. اعداد زیر را با تقریب‌های داده شده، گرد کنید.

۱) $\text{۹۵۸} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۱۰}} \simeq \text{...............}$

۲) $\text{۳۹۴۵۸۶} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۱۰۰۰}} \simeq \text{...............}$

۳) $\text{۴۶/۱۸۶۳} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۰/۰۱}} \simeq \text{...............}$

پاسخ:

$\text{۹۵۸} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۱۰}} \simeq \text{۹۶۰}$

۱) ارزش مکانی ۸ کم‌تر از ۱۰ است. به جای آن صفر می‌گذاریم و چون بزرگ‌تر از ۵ است، یک واحد به رقم قبلی آن اضافه می‌کنیم.

۲) $\text{۳۹۴۵۸۶} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۱۰۰۰}} \simeq \text{۳۹۵۰۰۰}$

ارزش مکانی ۵۸۶ کم‌تر از ۱۰۰۰ است. به جای آن‌ها صفر می‌گذاریم و چون اولین رقم سمت چپ برابر با ۵ است پس یک واحد به رقم قبلی اضافه شد.

۳) $\text{۴۶/۱۸۶۳} \xrightarrow{\text{با تقریب کم تر از ۰/۰۱}} \simeq \text{۴۶/۱۹}$

ارزش مکانی ۰/۰۶۳ از ۰/۰۱ کم‌تر است به جای آن‌ها صفر می‌گذاریم و چون اولین رقم سمت چپ (۶۳) از پنج بزرگ‌تر است، یک واحد به رقم قبلی آن اضافه می‌کنیم. یادتان باشد که صفرهای بعد از ممیز خوانده نمی‌شوند.

خطای محاسبه

☐ خطای محاسبه یعنی اختلاف بین پاسخ تقریب و پاسخ بدون تقریب (پاسخ واقعی).

مثال ۵. حاصل‌ضرب ۳/۴۱ × ۱/۷۵ را بار اول بدون تقریب محاسبه کنید. بار دوم با تقریب کم‌تر از ۰/۱ دو عدد را گرد کرده و محاسبه کنید، و بار سوم با تقریب کم‌تر از ۰/۱ دو عدد را قطع کرده و محاسبه کنید. سپس خطای محاسبه را در دو حالت تقریب به دست آورید.

پاسخ:

حاصل بدون تقریب : ۱/۷۵ × ۳/۴۱ = ۵/۹۶۷۵

حاصل با تقریب گرد کردن : ۱/۸ × ۳/۴ = ۶/۱۲

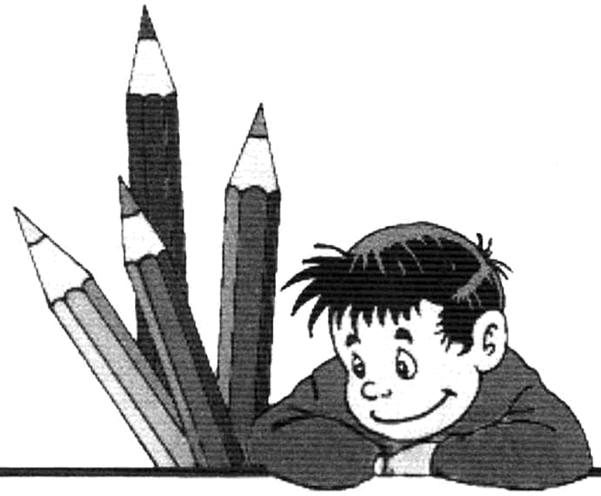
حاصل با تقریب قطع کردن : ۱/۷ × ۳/۴ = ۵/۷۸

خطای محاسبه در حالت گرد کردن = ۶/۱۲ − ۹۶۷۵ = ۰/۱۵۲۵

خطای محاسبه در حالت قطع کردن = ۵/۹۶۷۵ − ۵/۷۸ = ۰/۱۸۷۵

کاملاً مشخّص است که خطای محاسبه در حالت گرد کردن، کم‌تر است.

☐ درصد خطای محاسبه = $\frac{\text{خطای محاسبه}}{\text{حاصل بدون تقریب}} \times ۱۰۰$



نکات مهم فصل ۵
نسبت، تناسب، درصد

نسبت

☐ کمیت چیزی است که بتوان آن را اندازه گرفت و با یک عدد بیان کرد. مثل: طول، جرم، زمان، مساحت، ...

مثال ۱. کدام‌یک از گزینه‌های زیر کمیت نیست؟

۱) سرعت ۲) حجم ۳)ارتفاع ۴) دوستی

پاسخ : گزینه (۴)، فقط دوستی را نمی‌توان اندازه گرفت و با عدد بیانش کرد.

☐ رابطه‌ی بین دو کمیت هم‌جنس و هم‌واحد که نشان می‌دهد یکی چند برابر دیگری است، «نسبت» نامیده می‌شود.

مثال ۲. نسبت طول یک پاکن ۵۰ میلی‌متری به طول یک خط‌کش ۲۰ سانتی‌متری را تعیین کنید.

پاسخ : ابتدا واحدها را یکسان می‌کنیم: ۲۰ سانتی‌متر = ۲۰ × ۱۰ = ۲۰۰ میلی‌متر

$$\frac{\text{طول پاکن}}{\text{طول خط‌کش}} = \frac{۵۰}{۲۰۰} = \frac{۱}{۴}$$

تناسب

☐ هرگاه دو کمیت طوری تغییر کند که نسبت آن‌ها ثابت بماند، آن دو کمیت را «متناسب» می‌گوییم.

☐ در دو کمیت متناسب، اگر با افزایش یکی، دیگری نیز به همان نسبت افزایش یابد و یا با کاهش یکی، دیگری به همان نسبت کاهش یابد، رابطه‌ی بین آن‌ها را «تناسب مستقیم» می‌گوییم.

☐ در دو کمیت متناسب، اگر با افزایش یکی، دیگری به همان نسبت کاهش یابد، و یا با کاهش یکی، دیگری به همان نسبت افزایش یابد، رابطه‌ی بین آن‌ها را «تناسب معکوس» می‌گوییم.

مثال **۳ . از کمیت‌های مطرح‌شده در گزینه‌ها، کدام دو کمیت، دارای «تناسب معکوس» می‌باشند؟**

۱) مسافت طی‌شده توسط اتومبیل و مقدار مصرف بنزین

۲) تعداد صفحه‌های مطالعه شده‌ی کتاب و زمان

۳) تعداد کارگران در یک ساختمان و درصد انجام کار

۴) تعداد کارگران در یک ساختمان و زمان تمام شدن کار

پاسخ : گزینه (۴)، هرچه تعداد کارگران زیاد شود، زمان تمام شدن کار، کم می‌شود. مثلاً اگر تعداد کارگران را ۲ برابر کنیم، زمان پایان یافتن کار، نصف می‌شود.

☐ هرگاه با افزایش یا کاهش یک کمیت، دیگری ثابت بماند، این دو کمیت «متناسب» نیستند.

مثال **۴ . اگر ۲ جفت جوراب در ۲۰ دقیقه، روی بند خشک شوند، ۶ جفت جوراب روی بند، در چند دقیقه خشک خواهندشد؟**

پاسخ : همان‌طور که می‌بینید تعداد جفت‌های جوراب ۳ برابر شده ولی زمان خشک شدن جوراب‌ها روی بند، تغییری نمی‌کند.

☐ در تناسب‌های مستقیم می‌توان نسبت‌ها را در یک عدد معین ضرب کرد و یا بر یک عدد مشخص هر دو نسبت را تقسیم کرد. معمولاً از این روش برای تبدیل نسبت‌های کسری و اعشاری به نسبت‌های عدد صحیح، استفاده می‌کنیم. عددی را که در نسبت‌های کسری ضرب می‌کنیم بهتر است مخرج مشترک آن‌ها باشد.

مثال **۵ . نسبت پول حمید به سعید $\frac{۱}{۲}$ به $\frac{۳}{۵}$ است. اگر پول سعید ۳۶۰۰۰ تومان باشد، حمید چه‌قدر پول دارد؟**

پاسخ : ابتدا دو نسبت را که اعداد کسری هستند، در مخرج مشترک آنها که ۱۰ است، ضرب می‌کنیم. سپس در جدول قرار می‌دهیم.

نسبت پول حمید $\frac{۱}{۲}\times ۱۰=۵$

نسبت پول سعید $\frac{۳}{۵}\times ۱۰=۶$

$\longrightarrow$

؟ $\longrightarrow$ ۳۰۰۰۰ تومان	۵
۳۶۰۰۰ تومان	۶

☐ اگر سه نسبت که دو به دو با هم متناسبند، داشته باشیم به طوری که یکی از کمیت‌ها در هر دو نسبت مشترک است، دو حالت به وجود می‌آید:

۱۸

الف) کمیت مشترک بین دو نسبت با عدد یکسانی بیان شده‌است.

ب) کمیت مشترک بین دو نسبت با عددهای متفاوتی بیان شده‌است که در این حالت باید دو نسبت را طوری تغییر داد که کمیت مشترک در دو نسبت با یک عدد بیان شود.

مثال **۶ . نسبت قد حمید به مجید ۳ به ۲، و نسبت قد مجید به سعید ۶ به ۵ است. کدام‌یک بلندقدترین است؟**

پاسخ : همان‌طور که می‌بینید نسبت قد مجید، ۲ و در جای دیگر ۶ بیان شده‌است. برای یکسان‌سازی کافیست صورت و مخرج نسبت اولی را در ۳ ضرب کنیم:

$$\frac{حمید}{مجید}=\frac{۳\times ۳}{۲\times ۳}=\frac{۹}{۶}$$

$$\frac{مجید}{سعید}=\frac{۶}{۵}$$

حالا نسبت قد حمید به مجید به سعید، ۹ به ۶ به ۵ است. پس بلندقدترین حمید است.

☐ تسهیم به نسبت، یعنی سهم هر کسی از کل مقدار را به نسبتی که دارد، تعیین کنیم.

مثال **۷ . نسبت وزن سارا، تارا و گل‌آرا به ترتیب $\frac{۱}{۲}$، ۲ و ۱ است. اگر مجموع وزن آن‌ها ۱۴۰ کیلوگرم باشد، وزن سارا را به دست آورید.**

پاسخ : ابتدا همه‌ی نسبت‌ها را در ۲ ضرب می کنیم تا از حالت کسری خارج شوند.

⑳	۱	سارا
۸۰	۴	تارا
۴۰	۲	گل‌آرا
۱۴۰	۷	مجموع نسبت‌ها

×۲۰

سارا تارا گل‌آرا

۱ و ۴ و ۲

☐ اختلاف و مجموع کمیت ها هم به همان نسبت تغییر می‌کند و با خود کمیت‌ها متناسب است.

مثال ۸ . نسبت تعداد کتاب‌های احسان به ایمان، ۳ به ۵ است. اگر احسان ۱۰ جلد کتاب کم‌تر از ایمان داشته باشد، احسان چند جلد کتاب دارد؟

پاسخ :

$$\begin{array}{r|l} \text{۳ نسبت کتاب‌های احسان} & \bigcirc \rightarrow ۱۵ \\ \hline \text{۲ اختلاف نسبت‌ها} & ۱۰ \end{array} \quad \times ۵$$

اختلاف نسبت‌ها ۲ = ۳ − ۵

☐ اگر شخصی کار معینی را در مدت زمان A ، شخص دوم همان کار را به تنهایی در مدت زمان B، شخص سوم همان کار را به تنهایی در مدت زمان C ، ... انجام دهند، وقتی همه با هم آن کار را انجام دهند، زمان اتمام کل کار از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\text{زمان اتمام کل کار}}=\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}+\frac{۱}{C}+...$$

مثال ۹ . امین، سعید و حسام، اتاقی را به تنهایی به ترتیب در ۲ و ۵ و ۱۰ ساعت رنگ می‌کنند. اگر هر سه با هم کار کنند، کل کار در چند ساعت تمام می‌شود؟

پاسخ :

$$\frac{۱}{\text{کل زمان}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}=\frac{۸}{۱۰} \Rightarrow \text{کل زمان اتمام کار} = \frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴} \text{ ساعت}$$

یک ساعت و ربع

☐ استخری به تنهایی توسط شیر آب اول در A ساعت، توسط شیر دوم به تنهایی در B ساعت، ... پُر می‌شود. همچنین توسط چاه تخلیه‌ی اول به تنهایی در X ساعت، توسط چاه تخلیه‌ی دوم در Y ساعت، ... خالی می‌شود. اگر همه با هم باز باشند، زمان پُر شدن آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{\text{کل زمان پر شدن استخر}}=\left(\frac{۱}{A}+\frac{۱}{B}+...\right)-\left(\frac{۱}{X}+\frac{۱}{Y}+...\right)$$

مثال ۱۰. شیر آب اول به تنهایی یک استخر را در ۵ ساعت و شیر آب دوم به تنهایی در ۱۲ ساعت پُر می‌کنند. چاه تخلیه اول به تنهایی استخر را در ۲۰ ساعت و چاه تخلیه دوم به تنهایی در ۳۰ ساعت استخر را تخلیه می‌کنند. اگر همه باز باشند، استخر در چند ساعت پُر می‌شود؟

پاسخ :

$$\frac{۱}{\text{کل زمان پر شدن}}=(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۲})-(\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۳۰})=\frac{۱۷}{۶۰}-\frac{۵}{۶۰}=\frac{۱۲}{۶۰} \Rightarrow$$

$$\text{کل زمان} = \frac{۶۰}{۱۲}=۵ \text{ ساعت}$$

۱۹

درصد

☐ نسبتی که مخرج آن ۱۰۰ باشد را «درصد» می‌گوییم. هر عددی با علامت درصد را می‌توانیم به صورت کسری با مخرج ۱۰۰ هم بنویسیم. مثلاً: $\frac{۳۰}{۱۰۰}=$ ۳۰ ٪

مثال ۱۱. بیست و پنج درصد از نصف پولی ۵۰ تومان است. ۱۸ درصد آن چه‌قدر است؟

پاسخ :

$$\begin{array}{r|l} ۵۰ & ۲۵ \\ \hline \text{نصف پول } \bigcirc\!\!\!\!\!\!\!\!\;۲۰۰ & ۱۰۰ \end{array} \qquad \text{کلّ پول} = ۴۰۰ \rightarrow \qquad \begin{array}{r|l} \text{تومان } ۷۲ & ۱۸ \\ \hline ۴۰۰ & ۱۰۰ \end{array}$$

☐ مسائل مربوط به تخفیف (کاهش): در این نوع مسائل معمولاً با موارد زیر سروکار داریم:

۱. قیمت اولیه‌ی کالا
۲. قیمت کالا پس از تخفیف
۳. مقدار تخفیف
۴. درصد تخفیف
۵. تخفیفات متوالی

- **حالت اول:** قیمت اولیه‌ی کالا و درصد تخفیف را می‌دانیم و قیمت پس از تخفیف را بخواهیم.
- **حالت دوم:** قیمت پس از تخفیف و درصد تخفیف را می‌دانیم و قیمت اولیه‌ی کالا را بخواهیم.
- **حالت سوم:** قیمت اولیه‌ی کالا و قیمت پس از تخفیف را می‌دانیم و درصد تخفیف را بخواهیم.
- **حالت چهارم:** قیمت اولیه‌ی کالا و دو یا چند تخفیف متوالی را می‌دانیم و قیمت پس از تخفیف را بخواهیم.

** توجه کنید به جای کلمه‌ی «تخفیف» از کلمه‌ی «کاهش» و «درصد کاهش» نیز می‌توانیم استفاده کنیم.*

مثال ۱۲. تولیدات کارخانه‌ای پس از ۱۰ درصد کاهش به ۱۸۰۰ تُن در سال رسیده است. میزان تولیدات این کارخانه قبل از کاهش، چه‌قدر بوده‌است؟

پاسخ :

$$\begin{array}{r|l} ۱۸۰۰ & ۹۰ \\ \hline \bigcirc & ۱۰۰ \end{array} \rightarrow \bigcirc = ۲۰۰۰ \text{ تن}$$

۱۰۰ ٪ − ۱۰ ٪ = ۹۰ ٪

مثال **۱۳. فروشنده‌ی کالایی ۲۰ درصد تخفیف به خریداران می‌دهد. ولی به دلیل عدم استقبال مشتریان، ۱۰ درصد دیگر نسبت به قیمت جدید، تخفیف می‌دهد. اگر قیمت اولیه‌ی کالا ۲۰۰,۰۰۰ تومان بوده‌باشد، یک مشتری برای خرید آن چه‌قدر باید بپردازد؟**

پاسخ : یک روش این است که درصد قابل پرداخت در هر بار تخفیف را حساب کنیم و سپس آنها را در هم ضرب کنیم. در این صورت درصد پرداخت نهایی به دست خواهدآمد که اگر از ٪۱۰۰ کم کنیم، درصد تخفیف نهایی نیز به دست می‌آید.

$$\begin{array}{l} ۱۰۰\% - ۲۰\% = ۸۰\% \\ ۱۰۰\% - ۱۰\% = ۹۰\% \end{array} \rightarrow \frac{۸۰}{۱۰۰}\times\frac{۹۰}{۱۰۰}=\frac{۷۲}{۱۰۰}$$ درصد پرداخت نهایی

$$\begin{array}{c|c} ۷۲ & \bigcirc \\ \hline ۱۰۰ & ۲۰۰۰۰۰ \end{array} \longrightarrow \bigcirc = ۱۴۴۰۰۰$$ تومان

☐ در تخفیفات متوالی، ترتیب تخفیفات اهمیتی ندارد. مثلاً در مثال قبلی اگر ابتدا ۱۰ درصد و پس از آن ۲۰ درصد تخفیف متوالی در نظر می‌گرفتیم، باز هم جواب همین می‌شد.

☐ مسائل مربوط به سود و یا افزایش هم مانند مسائل مربوط به تخفیف است.

مثال **۱۴. قیمت کالایی سال پیش ۱۸۰۰۰ تومان و امسال ۲۴۰۰۰ تومان است. چند درصد افزایش داشته است؟**

پاسخ : ۲۴۰۰۰ − ۱۸۰۰۰ = ۶۰۰۰ مقدار افزایش

$$\begin{array}{c|c} ۶۰۰۰ & \bigcirc \\ \hline ۱۸۰۰۰ & ۱۰۰ \end{array} \longrightarrow \bigcirc = ۳۳/۳\ \%$$ درصد افزایش یافته.

مثال **۱۵. جمعیت یک روستا، سالی ۱۰ درصد افزایش دارد. اگر جمعیت فعلی روستا ۲۰۰۰ نفر باشد، پس از دو سال جمعیت این روستا به چند نفر خواهدرسید؟**

پاسخ :

$$\frac{۱۱۰}{۱۰۰}\times\frac{۱۱۰}{۱۰۰}=\frac{۱۲۱}{۱۰۰} \rightarrow \begin{array}{c|c} ۱۲۱ & \textcircled{۲۴۲۰} \\ \hline ۱۰۰ & ۲۰۰۰ \end{array}$$ نفر

☐ در بعضی مسائل کاهش و افزایش را با هم داریم.

مثال **۱۶. فروشنده‌ای ۲۰ درصد بهای خرید کالایی را به آن افزود و سپس ۲۰ درصد تخفیف داد. او در این صورت:**

۱) ۴ درصد سود کرده
۲) ۶ درصد سود کرده
۳) ۴ درصد ضرر کرده
۴) ۶ درصد ضرر کرده

پاسخ :

$$\frac{۱۲۰}{۱۰۰}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۹۶}{۱۰۰} \rightarrow$$ ٪۴ ضرر کرده.

☐ درصد خلوص (خالص بودن) یک محلول یعنی نسبت وزن ماده‌ی خالص به کل ماده، در واحد ۱۰۰.

☐ برای به **دست** آوردن درصد خلوص محلولی که از مخلوط کردن چند محلول دیگر به دست آمده‌است، ابتدا باید وزن ماده‌ی خالص را در هریک از محلول‌ها به دست آوریم تا مجموع ماده‌های خالص به دست آید. سپس نسبت آن را به وزن کل محلول‌ها به دست آوریم.

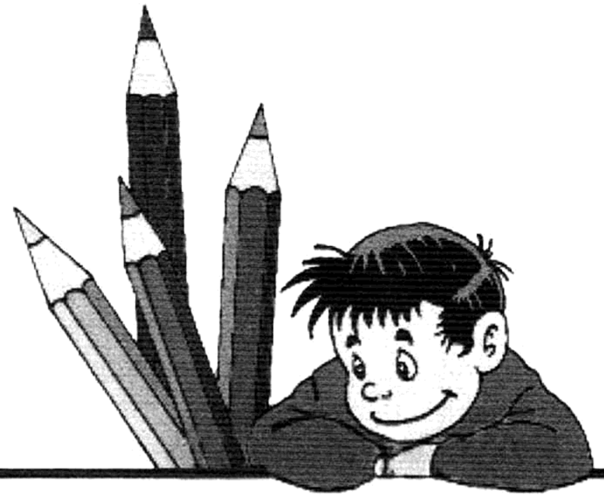
مثال **۱۷. به ظرفی که دارای ۳۰ لیتر اسید ۲۰ درصد است، ۲۰ لیتر اسید ۳۰ درصد اضافه می‌کنیم. در این صورت ۵۰ لیتر اسید چند درصد خواهیم داشت؟**

پاسخ :

$$\begin{array}{c|c} ۲۰ & \textcircled{۶} \\ \hline ۱۰۰ & ۳۰ \end{array}$$ لیتر خالص و $$\begin{array}{c|c} ۳۰ & \textcircled{۶} \\ \hline ۱۰۰ & ۲۰ \end{array}$$ لیتر خالص

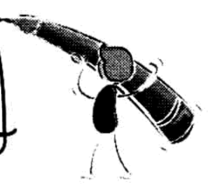
۶ + ۶ = ۱۲ لیتر اسید خالص

$$\begin{array}{c|c} ۱۲ & \textcircled{۲۴} \\ \hline ۵۰ & ۱۰۰ \end{array}$$ درصد، اسید خالص، کل



نکات مهم فصل ۶ و ۷

آمار و احتمال - اندازه‌گیری سطح و حجم



آمار

☐ تعریف علم آمار: علم جمع‌آوری اطلاعات عددی و تحلیل و بررسی آن‌هاست.

☐ تعریف «داده»: اطلاعات عددی به دست‌آمده را «داده‌های آماری» می‌گوییم.

☐ برای بررسی و مقایسه بهتر داده‌های آماری از انواع نمودارها استفاده می‌کنیم.

☐ **انواع نمودار**
- نمودار ستونی یا میله‌ای
- نمودار خط شکسته
- نمودار دایره‌ای
- نمودار تصویری

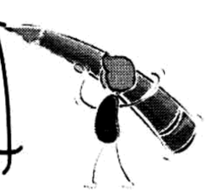
☐ **نمودارهای میله‌ای یا ستونی:** این نمودارها، از دو محور عمود بر هم تشکیل شده که بر روی محور افقی نام طبقه‌بندی‌ها و یا دسته‌ها ذکر می‌شود و محور عمودی مقدار عددی دسته‌ها را نشان می‌دهد. این نمودار جهت مقایسه و همچنین پیدا کردن «بیش‌ترین» و «کم‌ترین» در یک قسمت به کار می‌شود.

☐ **نمودار خط‌شکسته:** در این نمودارها در هر ستون مقدار داده با یک نقطه تعیین می‌شود. سپس این نقاط به هم متصل می‌شوند. این نمودارها برای نمایش تغییرات، کاربرد دارد.

☐ **نمودار تصویری:** گاهی اوقات به جای داده‌های واقعی از مقدار تقریبی آنها استفاده می‌کنیم. به این‌صورت که از یک شکل به عنوان جایگزین تعدادی از اشیاء موردنظر استفاده می‌شود. در این موارد نیازی به عددهای واقعی و دقیق نداریم. معمولاً در این‌گونه موارد از نمودارهای تصویری استفاده می‌کنیم.

☐ **نمودار دایره‌ای:** اگر بخواهیم بدانیم یک مقدار مشخص چگونه و با چه نسبتی به قسمت‌های کوچک‌تر تقسیم شده‌است، می‌توان آن را روی یک دایره نشان داد که به آن «نمودار دایره‌ای» می‌گوییم. یکی از روش‌های رسم نمودار دایره‌ای این است که ابتدا مقدار هر کمیت را نسبت به کل حساب کرده و در ۳۶۰ درجه ضرب می‌کنیم. عدد به دست آمده زاویه‌ای از دایره است که نسبت آن کمیت را به کل نشان می‌دهد.

مثلاً نمودار سهم حواس پنج‌گانه در یادگیری.



احتمـال

☐ میزان باور ما به انجام شدن یک پیشامد را «احتمال» می‌گوییم.

☐ آن‌چه قرار است پیش بیاید را «پیشامد» می‌گوییم.

☐ پیشامدها به سه دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند:

۱. بعضی از پیشامدها، امکان اتفاق افتادن ندارند. مثلاً به دنیا آمدن یک انسان با ۷ پا.

۲. بعضی از پیشامدها، به طور قطع اتفاق می‌افتد. مثلاً افتادن سیب بر روی زمین پس از جداشدن از شاخه‌ی درخت.

۳. برای بعضی از پیشامدها احتمال وقوع درنظر می‌گیریم. مثلاً به احتمال ۸۰ درصد فردا هوا آفتابی است.

بعضی از پیشامدها به احتمال زیاد اتفاق می‌افتد و احتمال وقوع بعضی از آن‌ها کم است.

☐ در ریاضیات احتمال را با یک کسر کوچک تر از یک بیان می‌کنیم. اگر پیشامدی قطعاً اتفاق بیفتد آن را با عدد یک، و اگر پیشامدی اصلاً احتمال وقوع نداشته باشد، آن را با عدد صفر، نشان می‌دهیم.

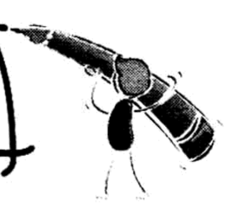
☐ **طریقه‌ی محاسبه‌ی احتمال وقوع یک پیشامد** = $\dfrac{\text{تعداد پیشامدهای موردنظر}}{\text{تعداد کل پیشامدهایی که ممکن است اتفاق بیفتد.}}$

مثال ۱. احتمال این‌که وقتی تاس می‌اندازیم عدد زوج بیاید، چه‌قدر است؟

پاسخ: تعداد پیشامدهای موردنظر: ۲،۴،۶

تعداد کل پیشامدهای ممکنه: ۶،۵،۴،۳،۲،۱

$$\text{احتمال} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} = ۵۰٪$$



واحدهای اندازه‌گیری سطح

☐ سطح مربعی به ضلع یک میلی‌متر را «میلی‌مترمربع» می‌گوییم.

☐ سطح مربعی به ضلع یک سانتی‌متر را «سانتی‌مترمربع» می‌گوییم.

یک سانتی‌مترمربع = ۱۰۰ میلی‌مترمربع

☐ سطح مربعی به ضلع یک دسی‌متر را «دسی‌مترمربع» می‌گوییم.

یک دسی‌مترمربع = ۱۰۰ سانتی مترمربع = ۱۰۰۰۰ میلی‌مترمربع

☐ سطح مربعی به ضلع یک متر را «مترمربع» می‌گوییم.

یک مترمربع = ۱۰۰ دسی‌مترمربع = ۱۰۰۰۰ سانتی‌مترمربع = ۱۰۰۰۰۰۰ میلی‌مترمربع

☐ سطح مربعی به ضلع صد متر را «هکتار» می‌گوییم.

یک هکتار = ۱۰۰۰۰ مترمربع = ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ سانتی‌مترمربع

☐ هکتار تنها واحد سطحی است که در انتهای آن از واژه‌ی «مربع» استفاده نمی‌شود.

☐ سطح مربعی به ضلع یک کیلومتر را «کیلومتر مربع» می‌گوییم.

مثال ۱. کدام گزینه درست است؟

۱) ۲۰۷۹ مترمربع کم‌تر از ۲۰ هکتار است.

۲) یک سانتی‌مترمربع برابر با ۱۰ میلی‌مترمربع است.

۳) ۳۵/۱ سانتی‌مترمربع کم‌تر از ۳۵۰ میلی‌مترمربع است.

۴) یک هکتار بیش‌تر از ۹۹۰ مترمربع است.

پاسخ: **گزینه (۴).**

تعریف حجم و گنجایش

☐ «**گنجایش**» را می‌توان مقدار ماده‌ای که یک جسم توخالی می‌تواند در خود جای دهد، درنظر گرفت. این ماده معمولاً مایع و گاز می‌باشد.

☐ «**حجم**»: ۱- حجم داخلی یک ظرف خالی یا فضای داخلی یک ظرف است. (گنجایش هم گفته می‌شود.)
۲- حجم خارجی یا اشغال کننده، همان مقدار فضایی است که یک جسم اشغال می‌کند. مانند یک آجر.

مثال ۲. کدام‌یک از اجسام زیر حدوداً یک مترمکعب فضا را اشغال می‌کند؟

۱) یک جلد کتاب
۲) یک توپ فوتبال
۳) یک میز تحریر
۴) یک اتومبیل سواری

پاسخ: گزینه (۳).

واحدهای اندازه‌گیری حجم و گنجایش

☐ حجم مکعبی به ضلع یک میلی‌متر، را «میلی‌مترمکعب» می‌گوییم.

۱ سانتی‌مترمکعب = ۱ سی‌سی = ۱ میلی‌متر

☐ حجم مکعبی به ضلع یک سانتی‌متر را «سانتی‌مترمکعب» و یا «سی‌سی» می‌گوییم.

☐ حجم مکعبی به ضلع یک دسی‌متر را «دسی‌مترمکعب» و یا «لیتر» می‌گوییم.

۱ دسی‌مترمکعب = ۱ لیتر

☐ حجم مکعبی به ضلع یک متر را «مترمکعب» می‌گوییم.

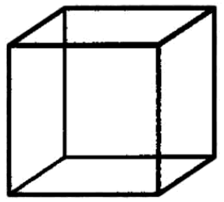
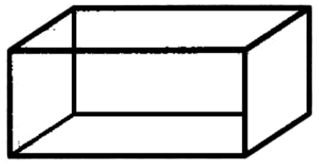
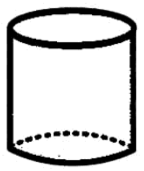
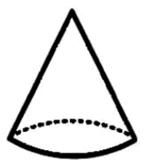
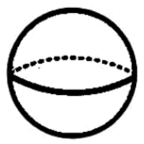
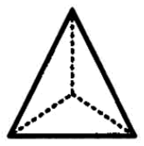
☐ هر سانتی‌متر مکعب یا «سی‌سی» برابر با حدود ۳۰ قطره است.

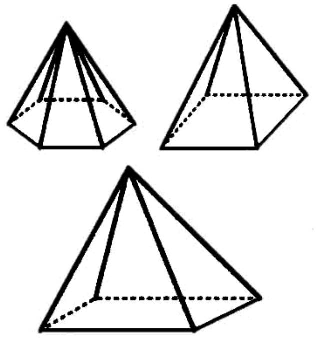
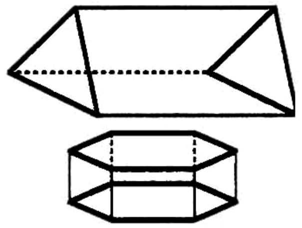
مثال ۳. کدام گزینه نادرست است؟

۱) ۱/۷ لیتر برابر با ۱۷۰۰ سانتی‌مترمکعب است.
۲) ۴۰۷۲ لیتر برابر با ۴/۰۷۲ مترمکعب است.
۳) ۷/۲ لیتر برابر با ۷/۲ دسی‌مترمکعب است.
۴) ۳,۶۲۰,۰۰۰ سی‌سی برابر با ۳۶/۲ مترمکعب است.

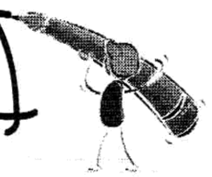
پاسخ: گزینه (۴)، نادرست است. چون ۳,۶۲۰,۰۰۰ سی‌سی برابر با ۳/۶۲ مترمکعب ست.

شناسایی حجم‌های هندسی

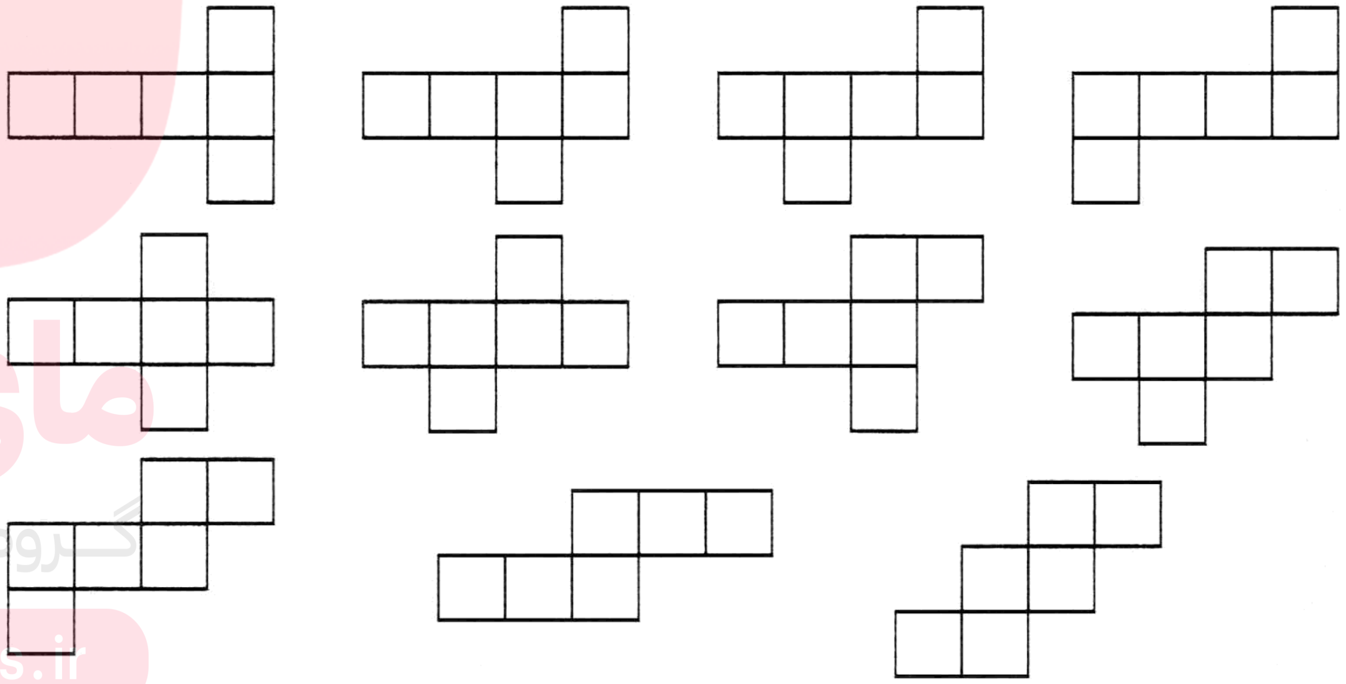
نام حجم	شکل	نمونه‌هایی در محیط اطرافمان
مکعب (شش‌وجهی منتظم)		شکل حبه‌ی قند، یک جعبه‌ی هدیه، تاس، ...
مکعب مستطیل		دستمال کاغذی، کبریت، ...
استوانه		لوله‌ی بخاری، تکه‌ای شلنگ، لیوان استوانه‌ای، قوطی رنگ استوانه‌ای، ...
مخروط		کلاه تولد، قیف، بستنی قیفی، ...
کُره		توپ فوتبال، پرتقال، ...
هرم قاعده مثلث (چهاروجهی منتظم)		رنده

هرم قاعده مربع یا مستطیل یا شش‌ضلعی		چادر مسافرتی
منشور		مُهره (پیچ)

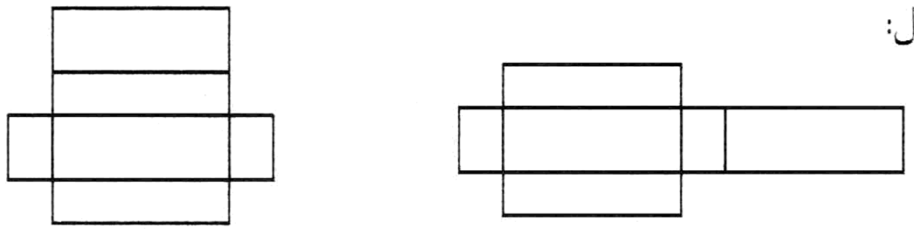
گسترده‌ی حجم‌های هندسی



☐ گسترده‌ی مکعب شکل‌های مختلفی دارد که عبارتند از:

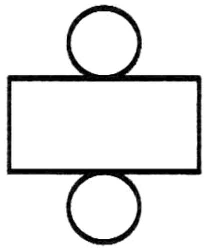


☐ گسترده‌ی مکعب مستطیل:



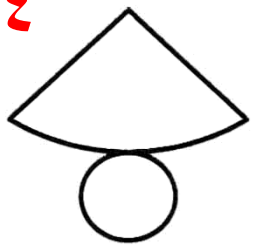
☐ گسترده‌ی استوانه:

توجه کنید که محیط دایره‌های بالا و پایین مستطیل باید با طول مستطیل برابر باشد.

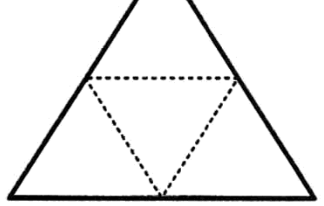


☐ گسترده‌ی مخروط:

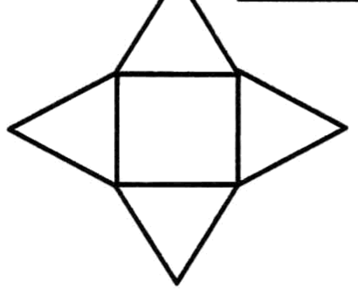
توجه کنید که محیط دایره با طول کمان باید برابر باشد.



☐ گسترده‌ی هرم قاعده مثلث:

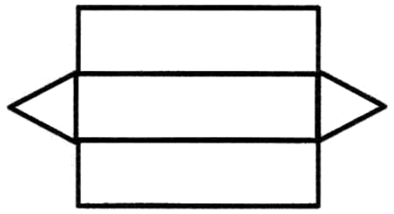


☐ گسترده‌ی هرم قاعده مربع:



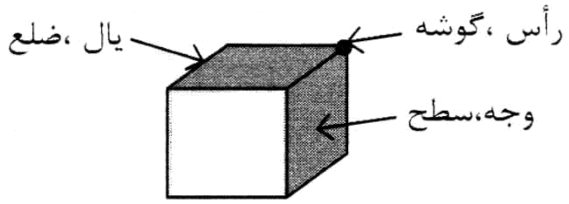
☐ گسترده‌ی منشور:

توجه کنید که اضلاع مثلث با عرض مستطیل باید برابر باشد.

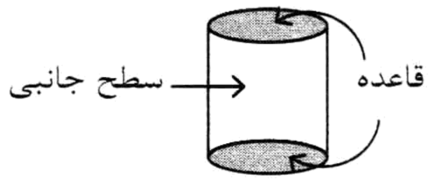


معرفی اجزای حجم‌ها

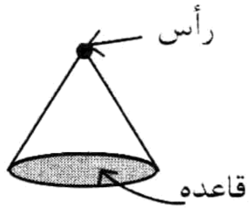
☐ مکعب و مکعب مستطیل: ۸ رأس، ۶ وجه، ۱۲ یال



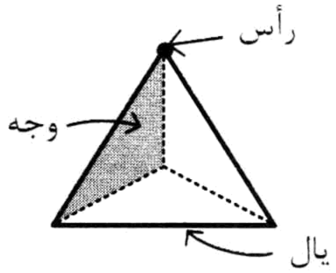
➢ استوانه:



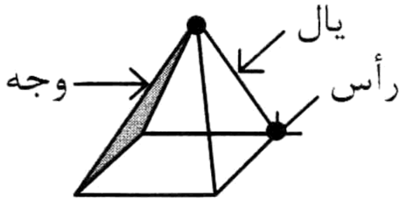
➢ مخروط:

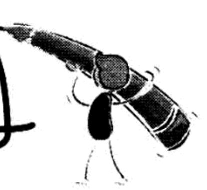


➢ هرم: ۴ رأس، ۴ وجه



هرم قاعده مربع: ۵ رأس، ۵ وجه

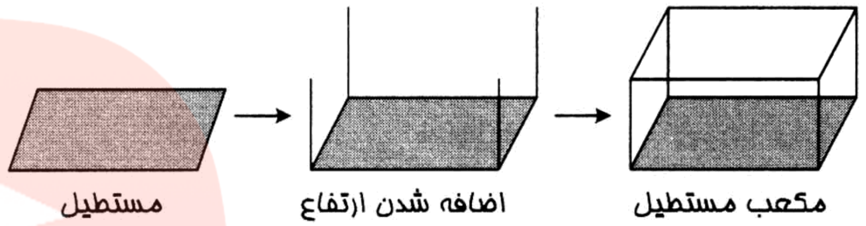




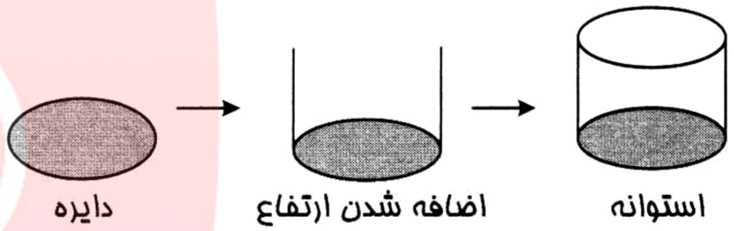
محاسبه حجم و مساحت شکل‌های هندسی

- جسمی که از صفحه خارج شده و علاوه بر «طول و عرض»، دارای «ارتفاع» نیز باشد، حجم دارد. پس می‌توان این‌طور نتیجه گرفت که برای یافتن اندازه‌ی هر حجمی، کافی است مساحتِ سطح اولیه (قاعده) را در ارتفاع ضرب کرد. به شکل‌های زیر توجه کنید:

حجم = مساحت قاعده × ارتفاع
حجم = مساحت مستطیل × ارتفاع
حجم = طول × عرض × ارتفاع

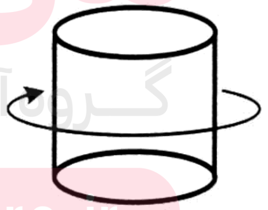


حجم = مساحت قاعده × ارتفاع
حجم = مساحت دایره × ارتفاع
حجم = شعاع × شعاع × ۳/۱۴ × ارتفاع



حجم = مساحت قاعده × ارتفاع
حجم = مساحت مثلث × ارتفاع
حجم = $\frac{\text{ارتفاع × قاعده}}{۲}$ × ارتفاع

- **مساحت جانبی:** یعنی مساحت دور تا دور یک حجم. مانند:



مساحت جانبی به طور کلی از حاصل‌ضرب محیط قاعده در ارتفاع به دست می‌آید.

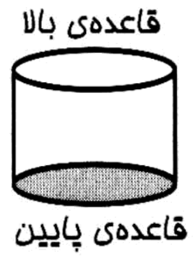
مساحت جانبی مکعب = محیط مربع × ارتفاع = مساحت یک وجه × ۴
مساحت جانبی مکعب مستطیل = محیط مستطیل × ارتفاع
مساحت جانبی استوانه = محیط دایره × ارتفاع
مساحت جانبی منشور = محیط مثلث × ارتفاع

- **مساحت کل:** یعنی علاوه بر مساحت جانبی، مساحت قاعده‌های بالا و پایین را هم درنظر بگیریم.

مساحت کل مکعب = مساحت یک وجه × ۶

مثال ۳. حجم، مساحت جانبی و مساحت کل یک قطعه کالباس به قطر ۲۰ و ارتفاع ۵ سانتی‌متر را به دست آورید.

پاسخ: این حجم یک استوانه است که ارتفاع آن ۵ و شعاع قاعده‌ی آن ۱۰ سانتی‌متر است.



حجم = مساحت قاعده × ارتفاع = مساحت دایره × ارتفاع = شعاع × شعاع × عدد پی × ارتفاع
حجم = ۱۰ × ۱۰ × ۳ × ۵ = ۱۵۰۰ سانتی‌مترمکعب
مساحت جانبی = محیط قاعده × ارتفاع = محیط دایره × ارتفاع = قطر × عدد پی × ارتفاع
مساحت جانبی = ۲۰ × ۳ × ۵ = ۳۰۰ سانتی‌مترمربع
مساحت کل = مساحت جانبی + مساحتِ قاعده دو برابر
مساحت کل = ۳۰۰ + (۲×۱۰×۱۰×۳) = ۳۰۰ + ۶۰۰ = ۹۰۰ سانتی‌مترمربع

صفحه‌ی مختصّات از دو محور افقی و عمودی تشکیل شده است. به دو عددی که با آن مکان نقطه را در صفحه تعیین می‌کنیم، مؤلّفه‌های افقی و عمودی می‌گوییم و مختصّات نقطه را به‌صورت $\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم. در قسمت بالا مؤلّفه‌ی افقی و پایین آن مؤلّفه‌ی عمودی را می‌نویسیم.

قرینه‌ی مرکزی را می‌توان با دوران دادن شکل حول مرکز تقارن نیز پیدا کرد. یک بار دیگر به شکل‌های بالا نگاه کنید و بین شکل و قرینه‌ی آن یک رابطه پیدا کنید.

در ریاضیّات برای ساده و مختصر کردن بیان عددهای علامت‌دار از علامت‌های + و – استفاده می‌کنیم. برای تعیین علامت عددها نیاز داریم که محلّ مبدأ و واحد اندازه‌گیری و همچنین جهت‌های مثبت و منفی را قرارداد کنیم و براساس آن، عددها را علامت‌دار کنیم.

عددهای ... و ۳+ و۲+ و ۱+ و۰ و۱- و۲- و ۳- و... را عددهای صحیح می‌نامیم.
هر یک از عددهای .... و۳+ و۲+ و۱+ را عددهای صحیح مثبت و هریک از عددهای ۱- و۲- و۳- و... را عددهای صحیح منفی می‌نامیم. عدد صفر نه مثبت است و نه منفی.

هرچه به سمت مثبت پیش می‌رویم، عددها بزرگ‌تر می‌شوند. بنابراین می‌توان نوشت: ۱- < ۱+
جاهای خالی را پر کنید.

محسن سوقی