ریاضی نهم

فصل ۳

استدلال و اثبات در هندسه

تنظیم: کاظم شکری

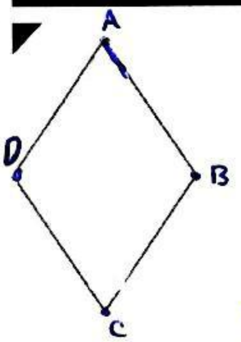
چهل اثبات

تمامی استدلال ها و اثبات های فصل سوم در این مجموعه گردآوری شده است. با خواندن این مجموعه به تمامی سوالات فصل سوم پاسخ دهید.

* تقدیم به روح مادر بزرگ و پدر بزرگ عزیزم *

ریاضی

۱.ثابت کنید در هر لوزی زاویه های رو به رو با هم برابر هستند؟

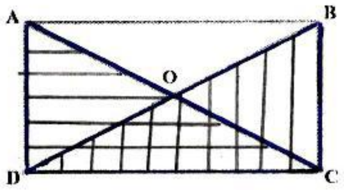


فرض $\Big\{$ ABCD لوزی است

حکم $\Big\{$ $\hat{B}=\hat{D}$ ، $\hat{A}=\hat{C}$

استدلال: در متوازی الاضلاع زاویه های روبه‌رو برابرند — لوزی نوعی متوازی الاضلاع است ⇐ در لوزی زاویه های روبه‌رو برابرند ⇐ $\begin{cases}\hat{B}=\hat{D}\\ \hat{A}=\hat{C}\end{cases}$

۲.ثابت کنید قطر های مستطیل، مساوی هستند؟

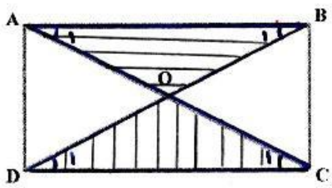


فرض $\Big\{$ ABCD مستطیل است

حکم $\Big\{$ $\overline{AC}=\overline{BD}$

استدلال: $\begin{cases}\overline{AD}=\overline{BC} & \text{فرض}\\ \hat{D}=\hat{C}=90^\circ & \text{فرض}\\ \overline{DC}=\overline{DC} & \text{فرض}\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADC} \overset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow \overline{AC}=\overline{BD}$

۳. ثابت کنید قطر های مستطیل همدیگر را نصف می کنند؟

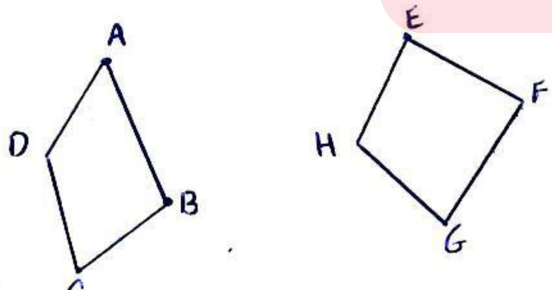


فرض $\Big\{$ ABCD مستطیل است

حکم $\begin{cases}\overline{OA}=\overline{OC}\\ \overline{OB}=\overline{OD}\end{cases}$

استدلال: $\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{C}_1 \ (\overline{AB}\parallel\overline{DC} \text{ و مورب } AC)\\ \overline{AB}=\overline{DC} \quad \text{فرض}\\ \hat{B}_1=\hat{D}_1 \ (\overline{AB}\parallel\overline{DC} \text{ و مورب } BD)\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \overset{\text{ز ض ز}}{\cong} \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow \begin{cases}\overline{OA}=\overline{OC}\\ \overline{OB}=\overline{OD}\end{cases}$

۴. اگر مجموع دو زاویه از چهار ضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهار ضلعی EFGH برابر باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویه دیگر ABCD با مجموع دو زاویه دیگر EFGH برابر است؟

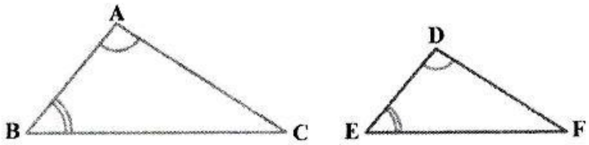


فرض $\Big\{$ $\hat{A}+\hat{B}=\hat{E}+\hat{F}$ حکم $\Big\{$ $\hat{D}+\hat{C}=\hat{H}+\hat{G}$

استدلال: $\hat{D}+\hat{C}=360-(\hat{A}+\hat{B})=360-(\hat{E}+\hat{F})=\hat{H}+\hat{G}$

بنا براین: $\boxed{\hat{D}+\hat{C}=\hat{H}+\hat{G}}$

۵. اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشد ثابت کنید زاویه سوم آن دو مثلث نیز برابر خواهد بود؟

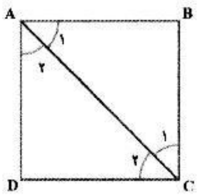


فرض $\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases}$ حکم $\{ \hat{C} = \hat{F}$

$\begin{matrix} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\hat{A} + \hat{B} = \hat{D} + \hat{E}}$ *

استدلال : $\hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) \overset{*}{=} 180 - (\hat{D} + \hat{E}) = \hat{F} \Rightarrow \boxed{\hat{C} = \hat{F}}$

۶. ثابت کنید قطر مربع نیمساز زاویه های متناظر خود است؟

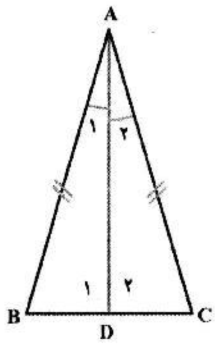


فرض $\{$ ABCD مربع است

حکم : $\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{cases}$

استدلال $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{DC} & \text{فرض} \\ \overline{BC} = \overline{AD} & \text{فرض} \\ \overline{AC} = \overline{AC} & \text{ضلع مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \overset{\text{ضضض}}{\cong} \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \end{cases}$

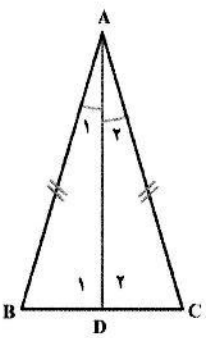
۷. مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی الساقین است و AD نیمساز زاویه A است ثابت کنید AD میانه است؟



فرض : $\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC} \text{ متساوی الساقین} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases}$ حکم $\{ \overline{BD} = \overline{DC}$

استدلال $\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & \text{فرض} \\ \overline{AC} = \overline{AB} & \text{فرض} \\ \hat{B} = \hat{C} & \text{فرض} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{زضز}}{\cong} \overset{\Delta}{ACD} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{DC}$

۸. مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی الساقین است و AD نیمساز زاویه A است ثابت کنید AD ارتفاع است؟

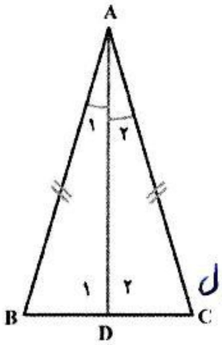


فرض $\begin{cases} \overset{\Delta}{ABC} \text{ متساوی الساقین است} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases}$ حکم $\{ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90$

استدلال : $\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \overline{AB} = \overline{AC} \\ \hat{B} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{زضز}}{\cong} \overset{\Delta}{ACD} \Rightarrow \boxed{\hat{D}_1 = \hat{D}_2}$ *

$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180 \overset{*}{\Rightarrow} \hat{D}_1 + \hat{D}_1 = 180 \Rightarrow \hat{D}_1 = 90 , \hat{D}_2 = 90$

۹. مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی الساقین است و AD نیمساز زاویه A است ثابت کنید AD عمود منصف است؟



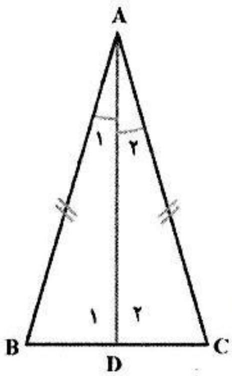
فرض $\left\{ \begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} \text{ متساوی الساقین} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array} \right.$

حکم $\left\{ \begin{array}{l} \overline{BD} = \overline{DC} \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90 \end{array} \right.$

استدلال $\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \overline{AB} = \overline{AC} \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array} \right. \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{ز ض ز}}{\cong} \overset{\Delta}{ACD} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \hat{D}_1 = \hat{D}_2 & (1) \\ \overline{BD} = \overline{DC} & (2) \end{array} \right.$

$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \hat{D}_1 + \hat{D}_1 = 180 \Rightarrow \hat{D}_1 = 90$ و $\hat{D}_2 = 90$

۱۰. مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی الساقین است و AD میانه است ثابت کنید AD نیمساز زاویه A است؟

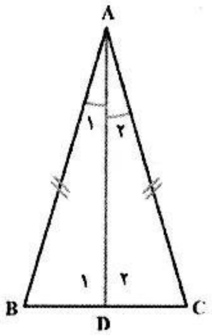


فرض $\left\{ \begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} \text{ متساوی الساقین} \\ \overline{BD} = \overline{DC} \end{array} \right.$

حکم $\left\{ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \right.$

استدلال $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \hat{B} = \hat{C} \\ \overline{BD} = \overline{DC} \end{array} \right. \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\Delta}{ACD} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

۱۱. مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی الساقین است و AD ارتفاع است ثابت کنید AD نیمساز زاویه A است؟

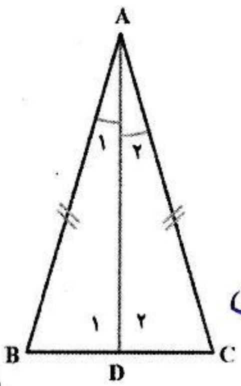


فرض $\left\{ \begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} \text{ متساوی الساقین} \\ D_1 = D_2 = 90 \end{array} \right.$

حکم $\left\{ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \right.$

استدلال $\left\{ \begin{array}{ll} \overline{AB} = \overline{AC} & \text{وتر} \\ \hat{B} = \hat{C} & \text{فرض} \end{array} \right. \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{وز}}{\cong} \overset{\Delta}{ACD} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

۱۲. مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی الساقین است و AD عمود منصف است ثابت کنید AD نیمساز زاویه A است؟

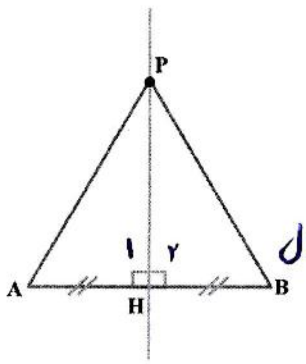


فرض $\left\{ \begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} \text{ متساوی الساقین} \\ \overline{BD} = \overline{DC} \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90 \end{array} \right.$

حکم $\left\{ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \right.$

استدلال $\left\{ \begin{array}{ll} \overline{AC} = \overline{AB} & \text{وتر} \\ \overline{BD} = \overline{DC} & \text{فرض} \end{array} \right. \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{وض}}{\cong} \overset{\Delta}{ACD} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

۱۳. نقطه ای مانند P، روی عمودمنصف پاره خط AB است، ثابت کنید فاصله ی P، از دو سر پاره خط به یك فاصله است؟

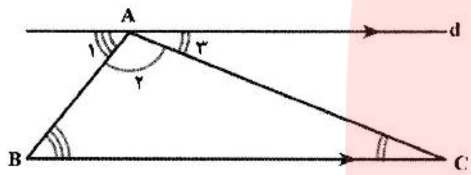


فرض $\begin{cases} \overline{AH}=\overline{HB} \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90 \end{cases}$

حکم $\{ AP=PB$

استدلال $\begin{cases} \overline{PH}=\overline{PH} & \text{ضلع مشترک} \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90 & \text{فرض} \\ \overline{AH}=\overline{HB} & \text{فرض} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{APH} \overset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\triangle}{BPH} \Rightarrow \overline{AP}=\overline{PB}$

۱٤. ثابت کنید مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است؟



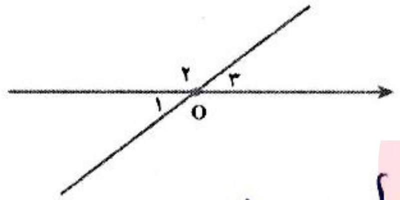
فرض $\begin{cases} \text{مثلث } ABC \text{ است} \\ \overline{Ad} \parallel \overline{BC} \end{cases}$

حکم $\{ \hat{A}_2+\hat{B}+\hat{C}=180$

استدلال $\begin{cases} \hat{A}_1=\hat{B} \; (\overline{Ad} \parallel \overline{BC} \text{ و مورب } AB)\ Z \\ A_3=\hat{C} \; (\overline{Ad} \parallel \overline{BC} \text{ و مورب } AC) \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_2+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_2+\hat{A}_1+\hat{A}_3=180$

بنابراین: $\boxed{\hat{A}_2+\hat{B}+\hat{C}=180}$

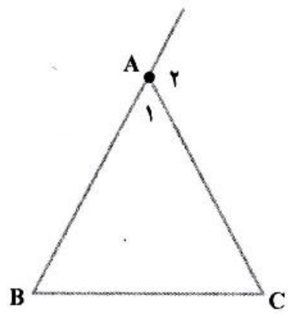
۱۵. ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند؟



حکم $\{ \hat{O}_1=\hat{O}_3$

استدلال: $\begin{cases} \hat{O}_1+\hat{O}_2=180 \\ \hat{O}_2+\hat{O}_3=180 \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_1+\hat{O}_2=\hat{O}_2+\hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_3$

۱٦. ثابت کنید در هر مثلث، اندازه ی زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن برابر است؟



فرض $\{ \text{مثلث } ABC \text{ است}$

حکم $\{ \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$

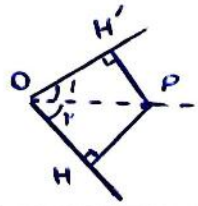
استدلال: $\hat{A}_2=180-\hat{A}_1$ ①

$\hat{A}_1=180-(\hat{B}+\hat{C})$ ②

$① , ② \Rightarrow \hat{A}_2=180-(180-(\hat{B}+\hat{C}))=\cancel{180}-\cancel{180}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{C}$

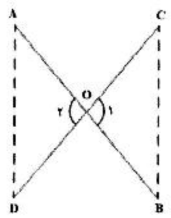
۱۷. ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است؟

فرض $\{\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ حکم $\{\overline{PH} = \overline{PH'}$



استدلال: $\begin{cases} \overline{PO} = \overline{PO} & \text{ضلع مشترک (وتر)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{فرض} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OPH} \overset{\text{وز}}{\cong} \overset{\Delta}{OPH'} \Rightarrow \overline{PH} = \overline{PH'}$

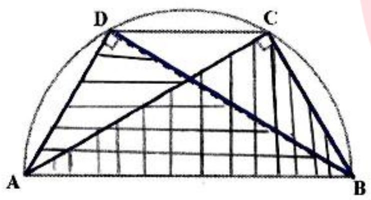
۱۸. اگر نقطه O وسط پاره خط های AB و DC باشد ثابت کنید AD=BC.



فرض $\begin{cases} \overline{OC} = \overline{OD} \\ \overline{OA} = \overline{OB} \end{cases}$ حکم $\{\overline{AD} = \overline{CB}$

استدلال: $\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} & \text{فرض} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 & \text{متقابل به راس} \\ \overline{OC} = \overline{OD} & \text{فرض} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAD} \overset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\Delta}{OCB} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{CB}$

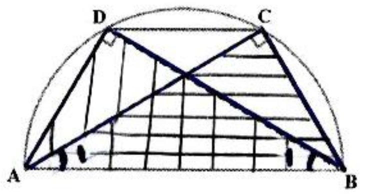
۱۹. اگر $\overline{AD}=\overline{CB}$ باشد ثابت کنید $\overline{DB}=\overline{AC}$.



فرض $\{\overline{AD} = \overline{CB}$ حکم $\{\overline{DB} = \overline{AC}$

استدلال $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AB} & \text{ضلع مشترک (وتر)} \\ \overline{AD} = \overline{CB} & \text{فرض} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{وض}}{\cong} \overset{\Delta}{ACB} \Rightarrow \overline{DB} = \overline{AC}$

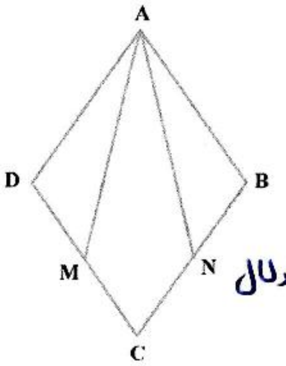
۲۰. اگر $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CB}$ باشد ثابت کنید $\overline{DB}=\overline{AC}$.



فرض $\{\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CB}$ حکم $\{\overline{DB} = \overline{AC}$

استدلال $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AB} & \text{ضلع مشترک (وتر)} \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 & (\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AD}) \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \overset{\text{وز}}{\cong} \overset{\Delta}{ACB} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{AC}$

۲۱. در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه های M و N وسط های اضلاع CB , CD هستند.
ثابت کنید $\overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{ABN}$

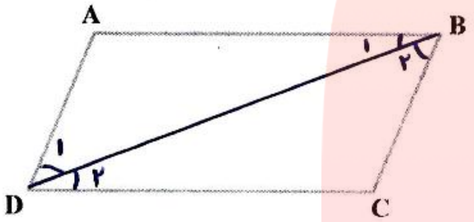


فرض $\begin{cases} ABCD \text{ لوزی است} \\ \overline{BN} = \overline{NC} \\ \overline{DM} = \overline{MC} \end{cases}$ *

حکم $\{ \overset{\Delta}{ADM} \cong \overset{\Delta}{ABN}$

استدلال $\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} & \text{لوزی بودن} \\ \hat{D} = \hat{B} & \text{لوزی بودن} \\ \overline{BN} = \overline{DM} & * \text{ و لوزی بودن} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ADM} \overset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\Delta}{ABN}$

۲۲. ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع ضلع های رو به رو با هم برابر هستند؟

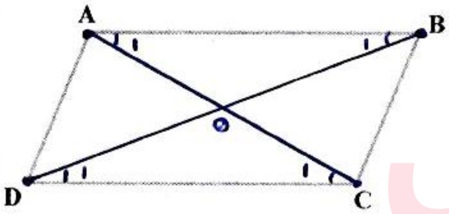


فرض $\{ ABCD$ متوازی الاضلاع است

حکم $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{DC} \\ \overline{AD} = \overline{BC} \end{cases}$

استدلال $\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_2 \ (\overline{AB} \parallel \overline{DC} \text{ و مورب } BD)\ Z \\ BD \quad \text{ضلع مشترک} \\ \hat{D}_1 = \hat{B}_2 \ (\overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{ و مورب } BD)\ N \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{CBD} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \overline{DC} \\ \overline{AD} = \overline{BC} \end{cases}$

۲۳. ثابت کنید قطر های متوازی الاضلاع یکدیگر را به طور مساوی قطع می کنند؟

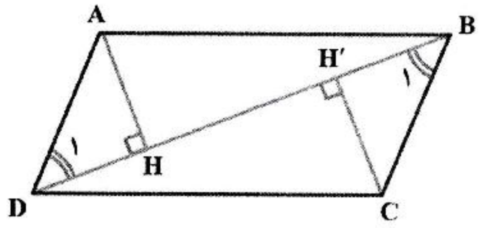


فرض $\{ ABCD$ متوازی الاضلاع است

حکم $\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OC} \\ \overline{OB} = \overline{OD} \end{cases}$

استدلال $\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \ (\overline{AB} \parallel \overline{DC} \text{ و مورب } \overline{BD})\ Z \\ \overline{AB} = \overline{DC} \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \ (\overline{AB} \parallel \overline{DC} \text{ و مورب } \overline{AC}) \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \overset{\text{ز ض ز}}{\cong} \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow \begin{cases} \overline{OA} = \overline{OC} \\ \overline{OB} = \overline{OD} \end{cases}$

۲۴. شکل رو به رو یک متوازی الاضلاع است ثابت کنید $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$

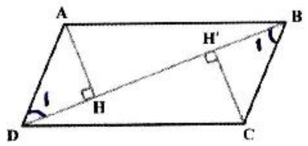


فرض $\{ ABCD$ متوازی الاضلاع

حکم $\{ \hat{D}_1 = \hat{B}_1$

استدلال : $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و مورب $\overline{BD}$ (N) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$

۲۵. در هر متوازی الاضلاع فاصله ی دو راس رو به رو از قطر نظیر دو راس دیگر به یک فاصله است؟

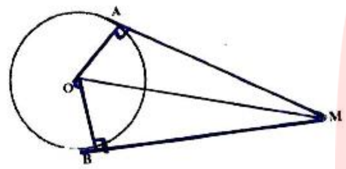


فرض $\left\{ ABCD \right.$ متوازی الاضلاع

حکم $\left\{ \overline{AH} = \overline{CH'} \right.$

استدلال $\begin{cases} \overline{AD} = \overline{BC} & \text{(متوازی الاضلاع بودن)} \ \text{وتر} \\ \hat{D}_1 = \hat{B}_1 & (\overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{ و مورب } BD) \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{AHD} \overset{\text{وز}}{\cong} \overset{\Delta}{CH'B} \Rightarrow \overline{AH} = \overline{CH'}$

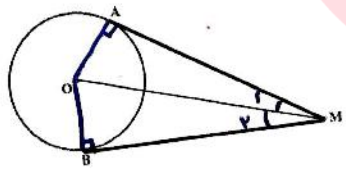
۲۶. اگر دو مماس از نقطه ی M (واقع در خارج از دایره) بر دایره رسم کنیم، ثابت کنید طول دو مماس با هم برابر است؟



حکم $\left\{ \overline{AM} = \overline{BM} \right.$

استدلال $\begin{cases} \overline{OM} = \overline{OM} & \text{ضلع مشترک (وتر)} \\ \overline{OA} = \overline{OB} & \text{شعاع} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAM} \overset{\text{وض}}{\cong} \overset{\Delta}{OBM} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$

۲۷. اگر دو مماس از نقطه ی M (واقع در خارج از دایره) بر دایره رسم کنیم، ثابت کنید OM نیمساز زاویه M است؟

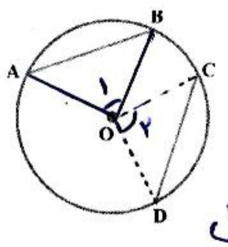


فرض

حکم $\left\{ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \right.$

استدلال ۱: $\begin{cases} \overline{OM} = \overline{OM} & \text{(وتر) ضلع مشترک} \\ \overline{OA} = \overline{OB} & \text{شعاع} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAM} \overset{\text{وض}}{\cong} OBM \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$

۲۸. در شکل مقابل وتر های AB و CD با هم مساوی هستند. ثابت کنید کمان های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ با هم مساوی هستند؟
(اگر در یك دایره دو وتر برابر باشند کمان های نظیر آنها نیز با هم برابرند)

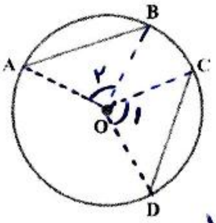


فرض $\left\{ \overline{AB} = \overline{CD} \right.$

حکم $\left\{ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \right.$

استدلال $\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OC} & \text{شعاع} \\ \overline{OB} = \overline{OD} & \text{شعاع} \\ \overline{AB} = \overline{CD} & \text{فرض} \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \overset{\text{ضضض}}{\cong} \overset{\Delta}{OCD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

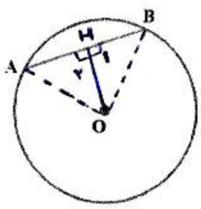
۲۹. در شکل مقابل کمان های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ با هم مساوی هستند. ثابت کنید وتر های AB و CD با هم برابرند؟
(اگر در یك دایره دو کمان برابر باشد ثابت کنید، وتر های نظیر آنها باهم برابرند)



فرض $\{ \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ حکم $\{ \overline{AB} = \overline{CD}$

استدلال
$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OC} & \text{شعاع} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \; (\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}) \\ \overline{OB} = \overline{OD} & \text{شعاع} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB} \overset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

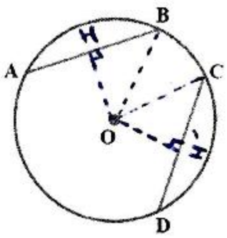
۳۰. ثابت کنید خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود می شود، وتر را نصف می کند؟



فرض $\{ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90$ حکم $\{ \overline{AH} = \overline{HB}$

استدلال
$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} & \text{شعاع (وتر)} \\ \overline{OH} = \overline{OH} & \text{ضلع مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OAH} \overset{\text{وض}}{\cong} \overset{\triangle}{OBH} \Rightarrow \overline{AH} = \overline{HB}$$

۳۱. ثابت کنید مرکز دایره از دو وتر مساوی به یك فاصله است؟



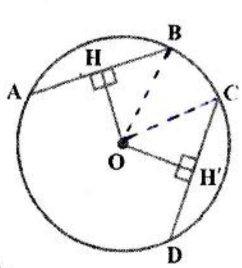
فرض $\{ \overline{AB} = \overline{CD}$ حکم $\{ \overline{OH} = \overline{OH'}$

* می دانیم خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود می شود وتر را نصف می کند یعنی $AH = HB$ و $CH' = H'D$ از طرفی $\overline{AB} = \overline{CD}$ پس $HB = H'C$

استدلال
$$\begin{cases} \overline{OB} = \overline{OC} & \text{شعاع (وتر)} \\ \overline{HB} = \overline{H'C} & (\text{طبق} *) \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OBH} \overset{\text{وض}}{\cong} \overset{\triangle}{OCH'} \Rightarrow \overline{OH} = \overline{OH'}$$

۳۲. در شکل مقابل مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یك فاصله است $(OH=OH')$. ثابت کنید طول وترهای AB و CD باهم برابرند؟
(اگر مرکز دایره از دو وتر دلخواه به یك فاصله باشد، ثابت کنید طول دو وتر با هم برابر است؟)

فرض $\{ OH = OH'$ حکم $\{ \overline{AB} = \overline{CD}$

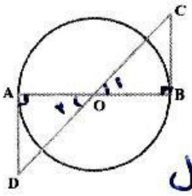


استدلال
$$\begin{cases} \overline{OB} = \overline{OC} & \text{شعاع (وتر)} \\ OH = OH' & \text{فرض} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{OHB} = \overset{\triangle}{OH'C} \Rightarrow \overset{*}{\boxed{\overline{HB} = \overline{H'C}}}$$

بنابراین: $2\overline{HB} = 2\overline{H'C}$

پس $\overline{AB} = \overline{CD}$

۳۵. در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس است نشان دهید AD و BC برابرند؟

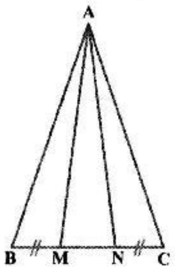


حکم { $\overline{BC}=\overline{AD}$

استدلال { $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ متقابل به راس ، $\overline{OA}=\overline{OB}$ شعاع ، $\hat{A}=\hat{B}=90$ $\Rightarrow \overset{\triangle}{OAD} \overset{\text{ز ض ز}}{\cong} \overset{\triangle}{OCB} \Rightarrow \overline{AD}=\overline{CB}$

* توجه داشته باشید حال می توان $\overline{OD}=\overline{OC}$.

۳۶. در شکل مقابل ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارند که BM=NC. ثابت کنید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.



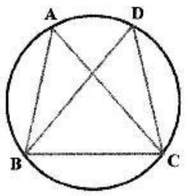
فرض { $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین ، $\overline{BM}=\overline{NC}$

حکم { $\overline{AN}=\overline{AM}$

استدلال: { $\overline{AB}=\overline{AC}$ فرض ، $\hat{B}=\hat{C}$ فرض ، $\overline{BM}=\overline{NC}$ فرض $\Rightarrow \overset{\triangle}{ABM} \overset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\triangle}{ANC} \Rightarrow \overline{AM}=\overline{AN}$

بنابراین می توان گفت $\overset{\triangle}{AMN}$ متساوی الساقین است

۳۳. در شکل مقابل AB=CD،



الف) چرا $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ ؟

چون در یک دایره اگر دو وتر برابر باشند کمان های نظیر آنها نیز با هم برابرند

ب) ثابت کنید AC=BD؟

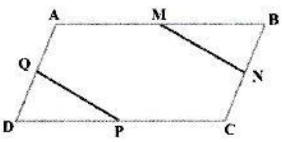
$\widehat{AB}=\widehat{CD}$ ، $\widehat{BC}=\widehat{BC}$ $\Rightarrow \widehat{AB}+\widehat{BC}=\widehat{BC}+\widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{DD}$

اگر در یک دایره دو کمان با هم برابر باشند وترهای نظیر آنها نیز با هم برابر خواهند بود.

بنابراین $\overline{AC}=\overline{BD}$

۳۴. در شکل مقابل ABCD متوازی الاضلاع است و M و N و P و Q وسط های اضلاع متوازی الاضلاع است،

ثابت کنید: MN=PQ



$\overline{AB}=\overline{DC} \Rightarrow \frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{DC} \Rightarrow \overline{MB}=\overline{DP}$ (*)

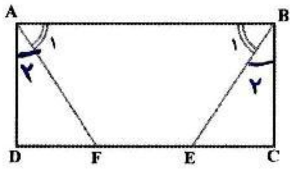
$\overline{AD}=\overline{BC} \Rightarrow \frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BC} \Rightarrow \overline{DQ}=\overline{NB}$ (**)

فرض { ABCD متوازی الاضلاع ، $AQ=QD$ و $\overline{DP}=\overline{PC}$ و $\overline{BN}=\overline{NC}$ و $\overline{AM}=\overline{MB}$

حکم { $\overline{MN}=\overline{PQ}$

استدلال { $\overline{DQ}=\overline{NB}$ طبق (**) ، $\hat{D}=\hat{B}$ فرض ، $\overline{DP}=\overline{MB}$ طبق (*) $\Rightarrow \overset{\triangle}{DQP} \overset{\text{ض ز ض}}{\cong} \overset{\triangle}{MBN} \Rightarrow \overline{MN}=\overline{PQ}$

۳۷. در مستطیل ABCD ، پاره خط های BE و AF طوری رسم شده اند که دو زاویه ی A_1 و B_1 برابرند. ثابت کنید $BE = AF$ ؟



فرض { $\hat{B}_1=\hat{A}_1$

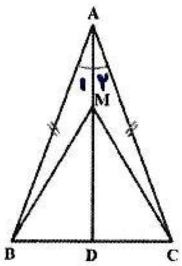
حکم { $\overline{AF}=\overline{BE}$

$\hat{A}_1+\hat{A}_2=\hat{B}_1+\hat{B}_2 \xrightarrow{\hat{A}_1=\hat{B}_1} \boxed{\hat{A}_2=\hat{B}_2}$ (*)

استدلال {
$\hat{A}_2=\hat{B}_2$ طبق (*)
$\overline{AD}=\overline{BC}$ فرض
$\hat{D}=\hat{C}=90$ فرض

$\Rightarrow \overset{\triangle}{ADF} \cong \overset{\triangle}{EBC}$ (ز ض ز) $\Rightarrow \overline{AF}=\overline{BE}$

۳۸. نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر نقطه ی دلخواه روی نیمساز زاویه راس از دو سر قاعده، برابر است، یعنی MB=MC.



فرض { $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین ، $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

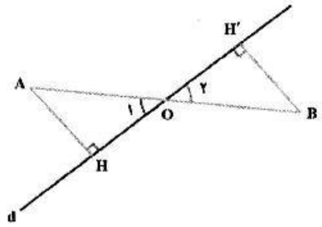
حکم { $\overline{MB}=\overline{MC}$

استدلال {
$\overline{AB}=\overline{AC}$ فرض
$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ فرض
$\overline{AM}=\overline{AM}$ ضلع مشترک

$\Rightarrow \overset{\triangle}{AMB} \cong \overset{\triangle}{AMC}$ (ض ز ض) $\Rightarrow \overline{MB}=\overline{MC}$

و همچنین $\overset{\triangle}{BMC}$ متساوی الساقین است

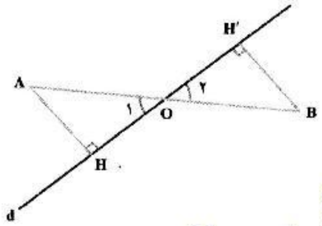
۳۹. در شکل مقابل ثابت کنید زاویه های B و A برابرند؟



اگر دو خط بر خط d عمود باشند آنگاه دو خط باهم موازی هستند.

(AH || H'B و $\overline{AB}$ مورب) $\Rightarrow \hat{B}=\hat{A}$ Z

۴۰. در شکل مقابل خط d از وسط پاره خط AB می گذرد ثابت کنید OH=OH'؟



فرض { $\overline{OA}=\overline{OB}$

حکم { $\overline{OH}=\overline{OH'}$

استدلال {
$\overline{OA}=\overline{OB}$ فرض (وتر)
$\hat{O}_1=\hat{O}_2$ متقابل به راس

$\Rightarrow \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OBH'}$ (و ز) $\Rightarrow \overline{OH}=\overline{OH'}$