

استدلال و اثبات در هندسه

استدلال: دلیل آوردن و استفاده از معلومات قبلی برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مشخص نبوده است.

اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می گوئیم.

مثال نقض: برای رد یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم.

نکته: همواره برای اثبات یک مسئله نمی توان از رسم شکل یا شهود استفاده کرد زیرا ممکن است خطای دید در آن شکل وجود داشته باشد.

مثال: برای هر یک از مسئله های زیر یک مثال نقض بزنید:

الف) تمام اشکال هندسی گوشه یا زاویه دارند؟ دایره یک شکل هندسی است که دارای گوشه و زاویه نیست.

ب) تمام اعداد زوج اول هستند؟ عدد ۲ تنها عدد زوجی است که اول نیز است.

مثال: کدام یک از استدلال های زیر منطقی و کدام غیر منطقی است:

الف) علی می گوید: هر وقت من درس نخواندم همان روز معلم از من سوال می کند؟ غیر منطقی

ب) تصادف منجر به مرگ در جادها ممکن است به دلیل نقض فنی ماشین باشد؟ منطقی

فرض مسئله: اطلاعاتی که در مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشد. (به طور خلاصه داده ها مسئله)

حکم مسئله: خواسته های مسئله را حکم مسئله می گویند.

مثال: در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید:

الف) زاویه های روبه رو لوزی برابرند. فرض: خواص لوزی حکم: برابر بودن زاویه های رو به رو

ب) طول دو مماس در دایره همواره برابرند. فرض: دایره و عمود بودن خط مماس بر شعاع حکم: برابر بودن دو مماس

مثال: با توجه به مفروضات داده شده نتیجه حاصل را بنویسید:

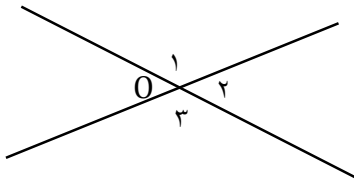
الف) $\left. \begin{array}{l} \text{در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگرند} \\ \text{در مربع قطر ها عمود منصف یکدیگرند} \end{array} \right\}$ لوزی نوعی مربع است

ب) $\left. \begin{array}{l} \text{هر چهار ضلعی که زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است} \\ \text{مربع دارای زاویه قائمه است} \end{array} \right\}$ مربع نوعی مستطیل است



استدلال و اثبات در هندسه

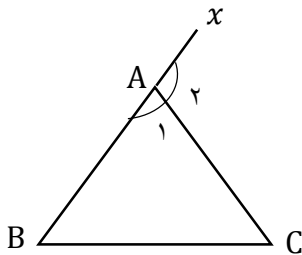
مثال: ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند.



فرض: \hat{O}_1 و \hat{O}_2 دو زاویه متقابل به راس
حکم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{درجه } \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180 \\ \text{درجه } \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \cancel{\hat{O}_2} = \cancel{\hat{O}_2} + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

مثال: ثابت کنید زاویه ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن.



فرض: \hat{A}_2 زاویه ی خارجی مثلث
حکم: $\hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{درجه } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180 \\ \text{درجه } \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \cancel{\hat{A}_1} + \hat{A}_2 = \cancel{\hat{A}_1} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

هم نهشتی مثلث ها: دو مثلث به سه حالت هم نهشت هستند:

الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین مساوی (ض ز ض) ب) دو زاویه مساوی و ضلع بین مساوی (ز ض ز) ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

نکته: سه زاویه مساوی (ز ز ز) از حالت های هم نهشتی نیست.

هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: دو مثلث قائم الزاویه به دو حالت هم نهشت هستند:

الف) وتر و یک زاویه ی تند (و ز) ب) وتر و یک ضلع (و ض)

نکاتی درباره هم نهشتی دو مثلث:

الف) اگر دو مثلث به هم چسبیده باشند دارای ضلع مشترک هستند.

ب) اگر دو مثلث به صورت ضربدری باشند دارای زاویه متقابل به راس هستند.

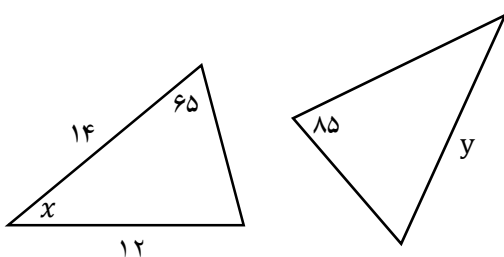
ج) اگر دو مثلث داخل دایره باشند از برابری شعاع دایره استفاده می کنیم.

د) در مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع و هر سه زاویه برابرند.

ه) در مثلث متساوی الساقین دو ساق و دو زاویه ی مجاور قاعده برابرند.

نکته: در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند.

مثال: دو مثلث زیر هم نهشت هستند. مقادیر مجهول را مشخص کنید؟



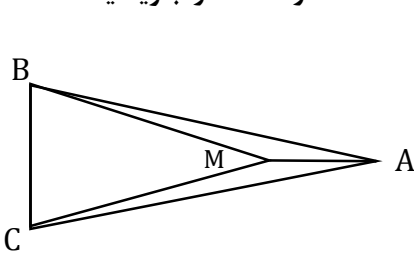
(در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند)

(مجموع زاویه های داخلی مثلث 180 درجه است) $180 - (85 + 65) = 30$

$x = 30$, $y = 14$

استدلال و اثبات در هندسه

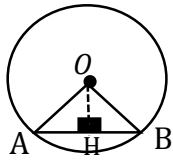
مثال: در شکل زیر دو مثلث ABC و MBC متساوی الساقین هستند. دلیل هم نهشتی دو مثلث AMB و AMC را بنویسید.



فرض: $AB = AC, MB = MC$ حکم: $\triangle AMB \cong \triangle AMC$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AB = AC \\ \text{فرض } MB = MC \\ \text{ضلع مشترک } AM = AM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMB \cong \triangle AMC$$
 (ض ض ض)

مثال: با توجه به شکل زیر نشان دهید خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود آن وتر را نصف می کند.



فرض: O مرکز دایره و OH عمود بر AB حکم: $AH = HB$

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } OH = OH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Rightarrow AH = HB$$
 (اجزای متناظر) (و ض)

قدم های حل مسئله: برای حل مسئله ۴ گام (قدم) نیاز است:

- (۱) درک و فهم مسئله (۲) رسم شکل (۳) نوشتن فرض و حکم مسئله (۴) راهبرد حل مسئله

مثال: نشان دهید هر نقطه روی عمود منصف قرار داشته باشد از دو سر پاره خط به یک اندازه است.

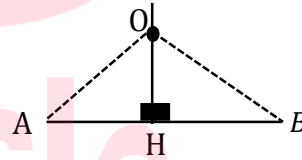
گام اول: (درک و فهم مسئله) عمودمنصف خطی بر خط رسم شده عمود باشد و آن خط را نصف کند.

فرض: OH عمود منصف

گام سوم: (نوشتن فرض و حکم)

گام دوم: (رسم شکل)

حکم: $OA = OB$



$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AH = HB \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } OH = OH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Rightarrow OA = OB$$
 (اجزای متناظر) (ض ض)

گام چهارم: (راهبرد حل مسئله) $OA = OB$

مثال: نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.

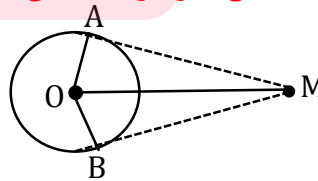
گام اول: (درک و فهم مسئله) شعاع دایره بر خط مماس عمود و در دایره دو شعاع با هم برابرند.

فرض: $OA = OB, \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

گام سوم: (نوشتن فرض و حکم)

گام دوم: (رسم شکل)

حکم: $MA = MB$



$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } OM = OM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAO \cong \triangle MBO \Rightarrow MA = MB$$
 (اجزای متناظر) (و ض)

گام چهارم: (راهبرد حل مسئله)

استدلال و اثبات در هندسه

دو شکل متشابه: دو شکلی که اضلاع به یک نسبت تغییر کند (کوچک یا بزرگ یا بدون تغییر) ولی زاویه ها تغییر نکرده باشد دو شکل متشابه می گویند.

نکته: دو مربع دلخواه و دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه هستند.

نکته: دو مستطیل همواره متشابه نیست. (چون اضلاع ممکن است به یک اندازه تغییر نکند)

نکته: دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیست. (چون ممکن است زاویه ها دو به دو برابر نباشند)

نکته: نسبت اضلاع متناظر دو شکل متشابه را نسبت تشابه می گویند.

نکته: دو شکل هم نهشت همواره متشابه و نسبت تشابه آن ها عدد یک است.

مثال: دو مثلث ABC و DEF متشابه هستند. اگر اضلاع مثلث ABC به اندازه های ۳ و ۴ و ۶ و اضلاع مثلث DEF به اندازه های

$۲y, ۸, ۳ - x$ باشند: (اضلاع دو مثلث از کوچک به بزرگ نوشته شده اند)

الف) مقدار x و y را به دست آورید.

تناسب اضلاع

$$\frac{3}{2y} = \frac{4}{8} = \frac{6}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2y} = \frac{4}{8} \Rightarrow 8y = 24 \Rightarrow y = 3 \\ \frac{4}{8} = \frac{6}{x-3} \Rightarrow 4x - 12 = 48 \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = 15 \end{cases}$$

ب) نسبت تشابه دو مثلث را بنویسید. $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

مثال: مقیاس نقشه ای ۱:۱۰۰۰۰۰ است. اگر طول جاده ای روی این نقشه ۱۲ سانتی متر باشد:

الف) طول واقعی جاده چند کیلو متر است؟

$$\frac{1}{100000} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 1200000 \text{ cm} \quad 1200000 \div 100000 = 12 \text{ km}$$

تبدیل واحد: هر کیلو متر ۱۰۰۰۰۰ سانتی متر است

ب) اگر اندازه ی یکی از زاویه های روی نقشه ۴۰ درجه باشد اندازه این زاویه در واقعیت چند درجه است؟

در دو شکل متشابه زاویه تغییر نمی کند. پس زاویه در واقعیت نیز ۴۰ درجه است.

نکته: در دو مثلث متشابه: الف) نسبت محیط و ارتفاع و نیمساز و عمود منصف و میانه با نسبت تشابه برابر است.

ب) نسبت مساحت با مجذور نسبت تشابه برابر است.

مثال: نسبت تشابه دو مثلث $\frac{3}{5}$ می باشد:

الف) نسبت میانه دو مثلث چند است؟ $\frac{3}{5}$

ب) نسبت مساحت دو مثلث چند است؟ $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

استدلال و اثبات در هندسه

ردیف	سوال	ردیف	سوال
۱	برای مسئله های زیر یک مثال نقض بزنید: الف) " هر عدد صحیح معکوس دارد." ب) " حاصل ضرب دو عدد گنگ همواره عدد گنگ است."	۷	نشان دهید هر نقطه روی نیمساز زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است؟ (۴ گام حل مسئله)
۲	در هر قسمت فرض و حکم مسئله را مشخص کنید: الف) در مستطیل قطر ها مساویند. ب) در دایره اندازه زاویه محاطی برابر است با نصف کمان رو به رو آن.	۸	ثابت کنید دو قطر مستطیل برابرند. (۴ گام حل مسئله)
۳	ثابت کنید مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است؟	۹	مثلث ABC متساوی الساقین و E و F وسط دو ساق اند. چرا BM و CN برابرند. فرض حکم $BM = CN$ $\left. \begin{matrix} BE = \dots \\ \dots = \hat{C} \\ \hat{M} = \hat{N} = 90 \end{matrix} \right\} \triangle BME \cong \dots \Rightarrow \dots$ (.....)
۴	طرف دوم استدلال های زیر را بنویسید. زاویای روبه رو متوازی الاضلاع برابرند مستطیل ۴ زاویه قائمه دارد. در مربع دو قطر برابرند مربع نوعی مستطیل است	۱۰	مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ به ترتیب با مثلث DEF با اضلاع ۹ و ۱۲ و ۱۵ متشابه است: الف) مقدار $\angle A$ را به دست آورید. ب) نسبت تشابه دو مثلث را بنویسید.
۵	در مستطیل زیر M وسط BC است. ثابت کنید مثلث AMD متساوی الساقین است. (AM=MD)	۱۱	در یک نقشه مقیاس $\frac{1}{25000}$ است. فاصله دو نقطه در نقشه ۴ سانتی متر باشد و زاویه بین آن ها ۳۵ درجه است: الف) فاصله دو نقطه در اندازه واقعی چند متر است. ب) زاویه متناظر در طبیعت چند درجه است.
۶	در شکل زیر BM نیم ساز زاویه B است. دلیل تساوی $BC = BN$ را بنویسید.	۱۲	نسبت مساحت دو شکل متشابه $\frac{4}{25}$ باشد: الف) نسبت تشابه دو مثلث چند است؟ ب) نسبت نیمساز دو شکل چند است؟ ج) نسبت میانه دو شکل چند است؟

