فصل اول: مجموعه‌ها

درس‌نامه:

از مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیاء مشخص و متمایز استفاده می‌کنیماعضای یک مجموعه باید معین و مشخص باشند.

برای مثال گل‌های زیبا، اعداد بزرگ، چهار شاعر ایرانی مجموعه نیستند زیرا اعضای آن‌ها را نمی‌توان مشخص و معین کرد.

اما اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۹، اعداد اول کوچک‌تر از ۱۲، شمارنده‌های مرکب ۶۰ مجموعه می‌باشند زیرا اعضای آن‌ها را می‌توان مشخص و معین کرد.

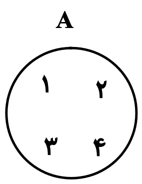
در نمایش مجموعه‌ها ترتیب اعضا مهم نیست و با جابه‌جایی عضوها مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌گردد.

اگر بخواهیم مثلاً نشان دهیم که a عضوی از مجموعهٔ A می‌باشد می‌نویسیم: $a \in A$

و اگر بخواهیم مثلاً نشان دهیم که b عضو مجموعه نیست می‌نویسیم: $b \notin A$

نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون:

برای مثال مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ را با نمودار ون به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:



مجموعهٔ تهی:

اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد. آن را مجموعهٔ تهی می‌نامیم و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان می‌دهند.

توجه: مجموعهٔ تهی با مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ یا $\{۰\}$ که هر کدام تک عضوی می‌باشند یکی نیست.

دو مجموعه برابر:

دو مجموعهٔ A و B را با یک‌دیگر برابر می‌گوییم هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد و هر عضو B عضوی از A باشد. در این صورت این دو مجموعهٔ A و B برابرند یعنی $A = B$.

مثال: جاهای خالی را طورپر کنید که مجموعه‌ها برابر باشد.

$$A = \left\{۵, \ldots, \frac{۲}{۵}, ۴, \frac{۹}{۳}\right\} \qquad B = \left\{\frac{۲}{۵}, ۳, \frac{-\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^{۲}}, \ldots, \sqrt{۲۵}\right\}$$

پاسخ: هر عضو A باید در B نیز باشد و بالعکس.

مشاهده کنیم که $۴ \in A$ اما در مجموعهٔ B ۴ نداریم پس در جای‌خالی در مجموعهٔ B عدد ۴ را می‌نویسیم. در مجموعهٔ B داریم: $-\frac{\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}$ یعنی $-۳ \in B$

اما در مجموعهٔ A، ۳- نداریم پس در جای‌خالی در مجموعهٔ A عدد ۳- را می‌نویسیم.

زیرمجموعه:

اگر هر عضو مجموعهٔ A در مجموعهٔ B نیز باشد آن‌گاه می‌گوییم A زیرمجموعهٔ B می‌باشد و می‌نویسیم: $A \subseteq B$.

در این صورت این که عضوی از A در B نباشد آن‌گاه $A \not\subset B$.

نکته: با توجه به تعریف زیرمجموعه هر مجموعه دلخواه A زیرمجموعهٔ خودش هست یعنی $A \subseteq A$.

نکته: مجموعهٔ تهی زیر مجموعهٔ هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی $\varnothing \subseteq A$.

نمایش مجموعه‌های اعداد:

مجموعه عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$$

روش دیگر برای نمایش دادن مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی می‌باشد.

برای مثال مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$E = \{۲K \mid K \in \mathbb{N}\}$$

مثال: مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی نمایش دهید.

الف) مجموعهٔ عددهای طبیعی فرد

ب) $A = \{۷, ۸, ۹, ۱۰\}$

ج) $B = \{۸, ۱۳, ۱۸, ۲۶, ...\}$

پاسخ:

الف) $O = \{۲K - ۱ \mid K \in \mathbb{N}\}$

ب) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid ۶ < x < ۱۱\}$

ج) $B = \{۵n + ۳ \mid n \in \mathbb{N}\}$

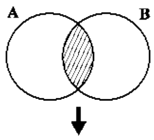
مجموعهٔ اعداد حسابی یعنی $W = \{۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$. این مجموعه را می‌توان با نماد ریاضی به‌صورت $W = \{K - ۱ \mid K \in \mathbb{N}\}$

نوشت.هر عدد طبیعی یک عدد حسابی می‌باشد اما عکس آن درست نیست زیرا اعداد حسابی علاوه بر اعداد طبیعی، عدد صفر را نیز دارد.

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها:

اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه‌ای شامل همهٔ عضوهایی است که هم عضو مجموعه A و هم عضو مجموعه B است. این مجموعه را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهیم. در نمودار روبه‌رو قست هاشورخورده اشتراک دو مجموعه را نشان می‌دهد.

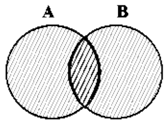
$$A\cap B=\{x|x\in A, x\in B\}$$



$A\cap B$

اجتماع دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشد. این مجموعه را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهیم.

نمودار $A\cup B$ قسمت هاشورخورده در شکل زیر می‌باشد:

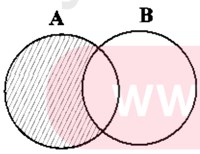


مجموعهٔ $A\cup B$ را با نماد ریاضی این‌گونه نشان می‌دهیم:

$A\cup B=\{x|x\in A$ یا $x\in B\}$

تفاضل دو مجموعه:

مجموعهٔ $A-B$ مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهایی که عضو مجموعهٔ A هستند؛ ولی عضو مجموعهٔ B نیستند. در شکل زیر مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ هاشورخورده است.



$A-B=\{x|x\in A, x\notin B\}$

مثال: مجموعه‌های $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$ و $B=\{۱,۵,۷,۳,۹\}$ و $C=\{۱,۷,۱۰,۱۱\}$ را در نظر بگیرید سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عوض‌هایشان مشخص کنید:

الف) $B \cup C$

ب) $A \cap B$

ج) $(A \cup B) - C$

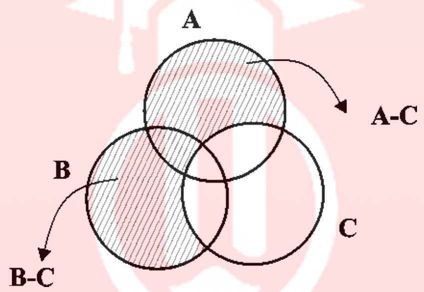
پاسخ:

الف) $B \cup C = \{۱,۳,۵,۷,۹,۱۰,۱۱\}$

ب) $A \cap B = \varnothing$

ج)
$$A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$$
$$(A \cup B) - C = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\} - \{۱,۷,۱۰,۱۱\} = \{۲,۳,۴,۵,۶,۸,۹\}$$

مثال: در شکل زیر، مجموعه موردنظر را هاشور بزنید.



$(A - C) \cup (B - C)$

قرارداد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ها و احتمال:

احتمال هر پیشامد برابر است با:

$$\frac{\text{تعداد حالت هـای مطلـوب}}{\text{تعداد همه حالت های ممکـن}}$$

اگر حالت‌های مطلوب مجموعه‌ای به نام A در نظر گرفته شود و همهٔ حالت‌های ممکن را با S نشان دهیم. آن‌گاه احتمال

پیشامد A برابر است با: $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(s)}$

مثال: اگر تاسی را بیاندازیم، احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را به‌دست آورید:

الف) تاسی تنها مضرب ۳ بیابد.

برای این‌که حالت مطلوب ما مضرب ۳ باشد باید مجموعهٔ حالت‌های مطلوب A برابر با $A = \{۳,۶\}$ باشد.

$S = \{۱,۲,۴,۵,۶\}$ مجموعه حالت‌های ممکن

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

ب) تاسی نه عددی اول بیاید و نه مرکب

تنها حالت مطلوب برای این‌که نه اول باشد و نه مرکب عدد یک می‌باشد.

$$A=\{۱\} \quad \Rightarrow \quad p(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{۱}{۶}$$

مثال: مجموع دو عدد طبیعی ۷ شده است. احتمال این‌که جفت عدد (۴ و ۳) انتخاب شده است چه‌قدر است؟

پاسخ: حالت مطلوب ما جفت عدد (۴ و ۳) است یعنی مجموعه حالت مطلوب A تنها یک عضو دارد.

$$A=\{(۳,۴)\} \Rightarrow n(A)=۱$$

کل حالات ممکن برابر است با جفت عددهای طبیعی که مجموع آن‌ها ۷ می‌شود.

$$S=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴)\} \Rightarrow n(s)=۳$$
$$\Rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{۱}{۳}$$