تألیف: دکتر علیرضا نورالدینی
موضوع: مجموعه‌ها

مفاهیم پایه

در این بخش به معرفی مفاهیم پایه‌ای مجموعه‌ها می‌پردازیم.

مجموعه

هر گاه تعدادی شیء یا عدد را کنار هم قرار دهیم یک **«مجموعه»** بدست می‌آید. به عنوان نمونه، مجموعه‌ی عددهای فرد یک رقمی به صورت:

$$A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$$

است. توجه داشته باشید:

- به اعداد یا اشیاء داخل مجموعه **«عضو»** گوئیم. به عنوان نمونه؛ عدد ۳ عضو مجموعه‌ی A بوده و عدد ۶ عضو آن نیست. لذا می‌نویسیم:

$$۳\in A \quad \text{و} \quad ۶\notin A$$

- برای نوشتن یک مجموعه، اعضای آن را داخل دو آکولاد $\{\ \}$ نوشته و بین اعضای مجموعه ویرگول انگلیسی **« , »** قرار می‌دهیم.

مثال. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

الف) مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های عدد ۲۴ برابر است با:

$$B=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\}$$

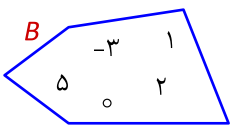
ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی که در سال قبل با آن آشنا شده‌ایم:

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\dots\}$$

توجه کنید که $\mathbb{N}$ نماد استاندارد و جهانی برای مجموعه‌ی عددهای طبیعی است.

تذکر. می‌توان یک مجموعه را به صورت تصویری یا هندسی نمایش داد؛ به این صورت که:

- یک شکل هندسی مثلاً چند ضلعی یا دایره در نظر می‌گیریم.
- اعضای مجموعه را داخل آن می‌نویسیم.



به عنوان نمونه، مجموعه‌ی $B=\{-۳,۰,۱,۲,۵\}$ را می‌توان به صورت مقابل نشان داد:

به چنین نمایشی از یک مجموعه **«نمودار ون»** گفته می‌شود.

نکته‌ی مهم. برای آن‌که تعدادی شیء یا عدد تشکیل مجموعه دهند لازم است:

اشیاء و اعضای مجموعه **«مشخص»** یا **«معین»** باشند!

یعنی:

در مورد هر شیء یا عدد دلخواه، دقیقاً معلوم باشد که آیا عضو آن مجموعه است یا خیر.

به عبارت دیگر:

تعیین اعضای مجموعه به نظر و سلیقه‌ی افراد بستگی نداشته باشد!

به عنوان نمونه‌ها:

الف) عبارت «**اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶**» یک مجموعه معرفی می‌کند؛ زیرا:

دقیقاً عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شرط داده شده را داشته و اعضای مجموعه هستند.

ب) عبارت «**پنج عدد طبیعی**» یک مجموعه معرفی نمی‌کند؛ زیرا:

دقیقاً معلوم نیست که کدام عددها جزء آن‌ها هستند و کدام‌ها جزء آن‌ها محسوب نمی‌شوند.

مثال. کدام جملات زیر یک مجموعه مشخص می‌کند؟

الف) سه والیبالیست خوش اخلاق تیم ملی والیبال ایران.

ب) سه نفر اول رتبه‌بندی کنکور سال ۱۳۹۴ رشته‌ی ریاضی فیزیک.

پاسخ *الف) چون خوش اخلاق بودن به نظر و سلیقه‌ی افراد بستگی دارد، این جمله یک مجموعه مشخص نمی‌کند.*

ب) این جمله یک مجموعه مشخص می‌کند، زیرا نفرات اول تا سوم کنکور سال ۱۳۹۴ افراد مشخصی هستند که بعد از آزمون دقیقاً معلوم شده و به جامعه معرفی می‌شوند.

پای تخته

۱. کدام جمله‌ی زیر یک مجموعه مشخص می‌کند؟

الف) داستان‌های بلند　　ب) ده هنرپیشه معروف دنیا　　ج) اعداد اول زوج　　د) رنگ‌های زیبا

جواب: (ج)

نکته. به دو مطلب زیر در مورد مجموعه‌ها توجه کنید:

- اعضای یک مجموعه را متمایز در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

در صورتی که مجموعه عضو تکراری داشته باشد، فقط یک‌بار محسوب (شمرده) شده و تکرار آن را حذف می‌کنیم!

به عنوان نمونه؛ مجموعه‌ی $B=\{۳,۵,۳\}$ دارای دو عضو است و آن را به صورت $B=\{۳,۵\}$ می‌نویسیم.

- ترتیبِ نوشتن اعضای مجموعه اهمیتی ندارد.

به عنوان نمونه؛ مجموعه‌های $\{a,b,c\}$ و $\{c,a,b\}$ کاملاً یکسان هستند.

تعریف. هرگاه مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، به آن مجموعه‌ی «**تهی**» گفته و آن را با $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان می‌دهیم.

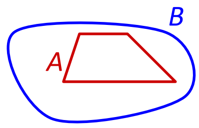
به عنوان نمونه:

چون اعداد طبیعی مثبت هستند؛ مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از صفر برابر تهی است.

در ادامه مفهومی مهم در ارتباط با دو مجموعه معرفی می‌کنیم.

زیرمجموعه

دو مجموعه‌ی A و B را در نظر بگیرید. هرگاه هر عضو از مجموعه‌ی A در B هم قرار داشته باشد، گوئیم A **«زیر مجموعه»** B است و می‌نویسیم:



$$A \subseteq B$$

اگر این شرط برقرار نباشد، A زیر مجموعه B نیست و می‌نویسیم: $A \not\subseteq B$.

به نمونه‌های بعدی توجه کنید:

مثال. با توجه به مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ پاسخ دهید:

الف) زیر مجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن عدد اول باشند.

ب) زیر مجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن مضرب ۲ باشند.

ج) زیر مجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن مجذور کامل باشند.

پاسخ *الف) عددهای اول که در A هستند را می‌نویسیم:*

$$B=\{۲,۳,۵,۷\}$$

ب) مشابه قسمت قبل عددهای مضرب ۲ در A را می‌نویسیم:

$$C=\{۲,۴,۶,۸\}$$

ج) واضح است که:

$$D=\{۱,۴,۹\}$$

مثال. فرض کنید $A \not\subseteq B$ و عدد ۲ عضو مجموعه‌ی A باشد. آیا این که بگوئیم $۲ \notin B$ صحیح است؟ چرا؟

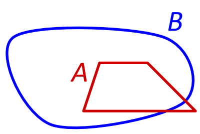
پاسخ *خیر، زیرا ممکن است عدد ۲ عضو مجموعه‌ی B باشد، ولی برخی دیگر از عضوهای مجموعه‌ی A در مجموعه‌ی B قرار نداشته باشند. به نکته‌ی بعد و نمونه‌ی آورده شده در آن نگاه کنید.*

در ادامه‌ی استدلال مثال قبل:

نکته. اگر بدانیم $A \not\subseteq B$ در این صورت به دو مطلب مهم زیر می‌توان اشاره کرد:

- ممکن است بسیاری از اعضای A در مجموعه‌ی B هم باشند؛ اما:
- لااقل یک عضو در A هست که در B قرار ندارد.

شکل مقابل را ببینید:



به عنوان نمونه‌ای دیگر؛ برای مجموعه‌های $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$، چون $۱ \in A$ است ولی $۱ \notin B$، در نتیجه در این دو مجموعه عبارت $A \not\subseteq B$ صحیح است. (ولی سایر عضوهای A در B هستند!)

مثال. تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A=\{۲,a\}$ را بنویسید.

پاسخ *همه‌ی مجموعه‌های ممکن را می‌نویسیم:*

$$\{\ \} \qquad \{۲\} \qquad \{a\} \qquad \{۲,a\}$$

لذا مجموعه‌ی داده شده ۴ زیرمجموعه دارد.

نتیجه. در مورد هر مجموعه‌ی A به دو مورد زیر می‌توان اشاره کرد:

- $A\subseteq A$؛ یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است.
- $\varnothing\subseteq A$؛ یعنی تهی زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها است.

توجه کنید که گاهی برخی از اعضای یک مجموعه، خودشان نیز مجموعه هستند.

پای تخته

۲. تمام زیر مجموعه‌های $B=\{۱,۲,\{۳\}\}$ را بنویسید.

در مثال قبل و فعالیت پای تخته بالا، یک حقیقت جالب و مهم دیده می‌شود. مجموعه‌ی A دارای ۲ عضو بود و تعداد ۴ زیرمجموعه و مجموعه‌ی B در پای تخته ۳ عضو و ۸ زیرمجموعه دارد. عدد ۴ همان $۲^۲$ و عدد ۸ همان $۲^۳$ است. در واقع، بین تعداد اعضای مجموعه و تعداد زیرمجموعه‌ها همیشه این رابطه‌ی توانی برقرار است:

اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، دارای تعداد ۲^n زیرمجموعه است!

اثبات درستی این مطلب را در سال‌های بالاتر خواهیم دید.

مثال. یک مجموعه‌ی ۷ عضوی چند زیرمجموعه بیشتر از یک مجموعه‌ی ۶ عضوی دارد؟

پاسخ *طبق مطلب بالا مجموعه‌ی اول دارای $۲^۷$ و مجموعه‌ی دوم $۲^۶$ زیرمجموعه دارد. با انجام ضرب و محاسبه‌ی عددهای توان‌دار، اختلاف تعداد زیرمجموعه‌ها برابر است با:*

$$۲^۷-۲^۶=۱۲۸-۶۴=۶۴$$

پس مجموعه‌ی ۷ عضوی تعداد ۶۴ زیرمجموعه بیشتر از مجموعه‌ی ۶ عضوی دارد.

در ادامه مفهومی دیگر در ارتباط با دو مجموعه معرفی می‌کنیم:

تساوی مجموعه‌ها

هرگاه اعضای دو مجموعه‌ی A و B کاملاً یکسان باشند، دو مجموعه را **«برابر»** یا **«مساوی»** گفته و می‌نویسیم:

$$A=B$$

توجه کنید که A و B هنگامی برابر هستند که عبارت‌های $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$ هر دو درست باشند.

مثال. اگر $A=\{x+y,۲,۱\}$ و $B=\{۲,۲x,۳\}$ دو مجموعه‌ی برابر باشند، مقادیر x و y را به‌دست آورید.

پاسخ *باید عضوهای A و B یکسان باشند. با توجه به این‌که عدد ۲ در هر دو مشترک است، دو عضو دیگر را با هم برابر قرار داده و معادله‌های بدست آمده را حل می‌کنیم:*

$$۲x=۱ \rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$$x+y=۳ \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲}+y=۳ \rightarrow y=\frac{۵}{۲}$$

اکنون روشی برای نمایش مجموعه‌ها به زبان (نماد) ریاضی معرفی می‌کنیم. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را در نظر بگیرید:

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\ldots\}$$

این مجموعه، دو زیرمجموعه‌ی مهم دارد:

اعداد طبیعی زوج $E=\{۲,۴,۶,\ldots\}$ و **اعداد طبیعی فرد** $O=\{۱,۳,۵,\ldots\}$

نکته. چون هر عدد زوج به صورت مضرب ۲ است، می‌توان عضوهای E را به صورت زیر نوشت:

$$۲\times۱\ ,\ ۲\times۲\ ,\ ۲\times۳\ ,\ \ldots$$

مشاهده می‌کنید که عضوهای E تمام عددهای به صورت $۲\times k$ هستند که در آن $k=۱,۲,۳,۴,\ldots$ عددی طبیعی است. به عبارت دیگر مجموعه‌ی E را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E=\{۲k \mid k \text{ عدد طبیعی}\}=\{۲k \mid k\in\mathbb{N}\}$$

به‌طور کاملاً مشابه، اعداد طبیعی فرد $۱,۳,۵,\ldots$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$۲\times۱-۱\ ,\ ۲\times۲-۱\ ,\ ۲\times۳-۱\ ,\ \ldots \Rightarrow O=\{۲k-۱ \mid k \text{ عددی طبیعی}\}=\{۲k-۱ \mid k\in\mathbb{N}\}$$

تعریف. دو مجموعه‌ی مهم دیگر از اعداد به صورت زیر بیان می‌شوند:

- اگر عدد صفر را به مجموعه‌ی اعداد طبیعی بیفزائیم، مجموعه‌ی **«اعداد حسابی»** بدست می‌آید:

$$W=\{۰,۱,۲,۳,۴,\ldots\}$$

- حال اگر قرینه‌ی تمام عددهای طبیعی را نیز به مجموعه‌ی W بیفزائیم، مجموعه‌ی **«اعداد صحیح»** مشخص خواهد گردید:

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,\ldots\}$$

مثال. مجموعه‌ی اعداد حسابی را با نماد ریاضی بنویسید.

پاسخ به سادگی دیده می‌شود که اعضای مجموعه‌ی W از اعداد طبیعی ۱ واحد کوچک‌تر هستند:

$$۰\,,\,۱\,,\,۲\,,\,۳\,,\,۴\,,\,\ldots \quad \rightarrow \quad ۱-۱\,,\,۲-۱\,,\,۳-۱\,,\,۴-۱\,,\,۵-۱\,,\,\ldots$$

پس هر عدد در W به صورت $k-۱$ است که در آن k عددی طبیعی است. در نتیجه می‌نویسیم:

$$W=\{k-۱ \mid k\in \mathbb{N}\}$$

پای تخته

۳. مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید.

الف) $\{۰,۱,۴,۹,۱۶,\ldots\}$ ب) $\{۰,۳,۸,۱۵,۲۴,\ldots\}$

مثال. هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضاء مشخص کنید.

الف) $A=\{۹x \mid x\in \mathbb{Z} \;,۰\le x\le ۴\}$

ب) $B=\{x^۲-۱ \mid x\in W\}$

ج) $C=\{\dfrac{x^۲}{۷x-۱} \mid x\in \mathbb{N} \;,x\le ۵\}$

پاسخ الف) عددهای صحیح از ۰ تا ۴ را در عبارت $۹x$ به جای x قرار می‌دهیم:

$$۹\times۰\,,\,۹\times۱\,,\,۹\times۲\,,\,۹\times۳\,,\,۹\times۴ \;\Rightarrow\; A=\{۰,۹,۱۸,۲۷,۳۶\}$$

ب) مشابه قسمت قبل، عددهای W را از ابتدا در عبارت $x^۲-۱$ به جای x قرار می‌دهیم:

$$(۰)^۲-۱\,,\,(۱)^۲-۱\,,\,(۲)^۲-۱\,,\,(۳)^۲-۱\,,\;\ldots \;\Rightarrow\; B=\{-۱,۰,۳,۸,\ldots\}$$

توجه کنید که عددهای W بی پایان هستند و بنابراین مجموعه‌ی B هم پایان ندارد.

ج) مانند قسمت‌های قبل عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را جای x قرار می‌دهیم:

$$\frac{(۱)^۲}{۷(۱)-۱},\frac{(۲)^۲}{۷(۲)-۱},\frac{(۳)^۲}{۷(۳)-۱},\frac{(۴)^۲}{۷(۴)-۱},\frac{(۵)^۲}{۷(۵)-۱} \Rightarrow C=\{\frac{۱}{۶},\frac{۴}{۱۳},\frac{۹}{۲۰},\frac{۱۶}{۲۷},\frac{۲۵}{۳۴}\}$$

نکته. قبلاً دیده‌ایم که اعداد گویا تمام کسرهایی هستند که صورت و مخرج آن‌ها دو عدد صحیح بوده و مخرج آن‌ها غیر صفر است. این مجموعه را با $\mathbb{Q}$ نشان داده و لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b} \mid a,b\in \mathbb{Z}\;,\;b\ne ۰\}$$

مثال. کدام مورد درست و کدام مورد نادرست است؟

$$W\subseteq \mathbb{N} \qquad W\subseteq \mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}\subseteq \mathbb{Q}$$

پاسخ عبارت $W\subseteq \mathbb{N}$ نادرست است، زیرا عدد صفر در W هست ولی در $\mathbb{N}$ قرار ندارد؛ ولی عبارت $W\subseteq \mathbb{Z}$ درست است. در مورد عبارت $\mathbb{Q}\subseteq \mathbb{Z}$ توجه کنید:

به هر عدد صحیح می‌توان مخرج ۱ داد؛ مثلاً $۴=\frac{۴}{۱}$ و $-۳=\frac{-۳}{۱}$.

در نتیجه هر عدد صحیح یک عدد گویا هم محسوب شده و عبارت $\mathbb{Z}\subseteq \mathbb{Q}$ صحیح می‌باشد.

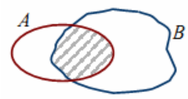
اعمال جبری

در این بخش، روش‌هایی خواهیم آموخت که توسط آن‌ها می‌توان با ترکیب چند مجموعه‌ی داده شده، مجموعه‌های جدیـدی را تشکیل داد.

اشتراک

برای دو مجموعه‌ی A و B، «اشتراک» آن‌ها مجموعه‌ی تمام اعضایی است که هم در A و هم در B قرار داشته باشند. این مجموعه را به صورت $A\cap B$ نشان می‌دهیم.
بنابراین با نماد ریاضی می‌توان نوشت:

$$A\cap B=\{x|\ x\in A \text{ و } x\in B\}$$



$A\cap B$

مثال. اگر $A=\{-۱,۲,۰,۴\}$ و $B=\{۰,۲,۴\}$ و $C=\{۳,-۱,۶\}$، مجموعه‌های $A\cap B$، $B\cap C$ و $A\cap C$ را مشخص کنید.

پاسخ عضوهای مشترک مجموعه‌ها را در هر حالت می‌نویسیم:

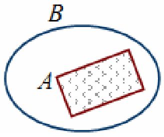
$$A\cap B=\{-۱,۲,۰,۴\}\cap\{۰,۲,۴\}=\{۰,۲,۴\}$$

به‌طور مشابه:

$$A\cap C=\{-۱,۲,۰,۴\}\cap\{۳,-۱,۶\}=\{-۱\} \quad \text{و} \quad B\cap C=\{۰,۲,۴\}\cap\{۳,-۱,۶\}=\varnothing$$

نکته. در مورد مجموعه‌های A و B به موارد ساده‌ی زیر می‌توان اشاره کرد:

- اشتراک هر مجموعه با خودش برابر همان مجموعه است:
$$A\cap A=A$$
- واضح است که تهی با هیچ مجموعه‌ای عضو مشترک ندارد:
$$A\cap\varnothing=\varnothing$$
- اگر $B\subseteq A$ باشد، اشتراک آن‌ها برابر مجموعه‌ی کوچک‌تر یعنی A است:
$$A\subseteq B\ \Rightarrow\ A\cap B=A$$
(در مثال قبل $B\subseteq A$ بوده و در نتیجه $A\cap B=B$ شده است!)



تذکر. ممکن است دو مجموعه عضو مشترک نداشته باشند که در این صورت آن‌ها را **«جدا از هم»** یا **«مجزا»** گویند:

$A \cap B = \varnothing$

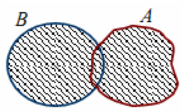
به عنوان نمونه در مورد مجموعه اعداد طبیعی فرد O و مجموعه اعداد طبیعی زوج E داریم:

$$O \cap E = \varnothing$$

عمل دیگر بین دو مجموعه به صورت زیر بیان می‌شود:

اجتماع

«اجتماع» دو مجموعه‌ی A و B را با $A \cup B$ نشان داده و آن شامل تمام اعضایی است که لااقل در یکی از A و B قرار داشته باشند.



$A \cup B$

بنابراین با نماد ریاضی می‌توان نوشت:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

توجه کنید که $A \cup B$ از کنار هم قرار دادن اعضای دو مجموعه بدست می‌آید و البته:

اعضای تکراری فقط یک بار نوشته می‌شوند!

مثال. اگر $A = \{-۱, ۲, ۰, ۴\}$ و $B = \{۰, ۲, ۴\}$ و $C = \{۳, -۱, ۶\}$، مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cup C$ را مشخص کنید.

پاسخ *عضوهای مجموعه‌ها را در هر حالت کنار هم می‌نویسیم:*

$$A \cup B = \{-۱, ۲, ۰, ۴\} \cup \{۰, ۲, ۴\} = \{-۱, ۲, ۰, ۴\}$$

به‌طور مشابه:

$$A \cup C = \{-۱, ۲, ۰, ۴\} \cup \{۳, -۱, ۶\} = \{-۱, ۲, ۰, ۴, ۳, ۶\}$$

نکته. در مورد اجتماع مجموعه‌ها به موارد زیر می‌توان اشاره کرد:

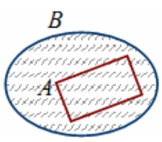
- اجتماع هر مجموعه با خودش برابر همان مجموعه است:

$$A \cup A = A$$

- واضح است که اجتماع تهی با هر مجموعه‌ای روی آن مجموعه بی اثر است:

$$A \cup \varnothing = A$$

- اگر $A \subseteq B$ باشد، اجتماع آن‌ها برابر **مجموعه‌ی بزرگ‌تر** یعنی B است:



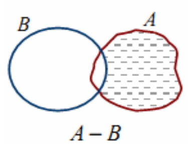
$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

(در مثال قبل $B \subseteq A$ بوده و بنابراین $A \cup B = A$ شده است!)

اختلاف دو مجموعه را می‌توان با استفاده از مفهوم زیر بدست آورد:

تفاضل

«تفاضل» مجموعه‌ی B از A را با $A-B$ نشان داده و آن مجموعه‌ای است شامل تمام عضوهایی است که: **«در A هستند»** ولی **«در B قرار ندارند»**.



با نماد ریاضی می‌توان نوشت:

$$A-B=\{x|\ x\in A \text{ و } x\notin B\}$$

توجه کنید که مجموعه‌ی $B-A$ نیز شامل اعضایی است که در B بوده ولی در A نیستند.

مثال. با توجه به مجموعه‌های $A=\{-۱,۲,۵,۶\}$ و $B=\{۲,۳,۵,۷\}$، مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

الف) $B-A$

ب) $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$

پاسخ

الف) برای تعیین $B-A$ طبق توضیح بالا، به اعضای B نگاه کرده و فقط هر کدام که در A نیستند را می‌نویسیم:

$$B-A=\{۲,۳,۵,۷\}-\{-۱,۲,۵,۶\}=\{۳,۷\}$$

ب) ابتدا مجموعه‌های $A\bigcup B$ و $A\bigcap B$ را مشخص کرده و سپس تفاضل را مانند قسمت (الف) تعیین می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} A\bigcup B=\{-۱,۲,۳,۵,۶,۷\} \\ A\bigcap B=\{۲,۵\} \end{array} \Rightarrow (A\bigcup B)-(A\bigcap B)=\{-۱,۲,۳,۵,۶,۷\}-\{۲,۵\}=\{-۱,۳,۶,۷\}$$

اکنون نوبت شما است . . .

پای تخته

۴. اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۵,۱\}$، مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

- $B\bigcap(A-B)$
- $(A-B)\bigcup(A\bigcap B)$

مجموعه‌ها و احتمال

به مجموعه‌ی $A=\{۰,۱,۲,۳,\ ...\ ,۹\}$ توجه کنید. این مجموعه دارای ۱۰ عضو است و به همین دلیل می‌نویسیم:

$$n(A)=۱۰$$

بنابراین $n(A)$ **تعداد عضوهای** مجموعه‌ی A را نشان می‌دهد.

مثال. اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۵,۱\}$ باشند، مقادیر $n(A\cup B)$ و $n(B-A)$ را مشخص کنید.

پاسخ هر دو مجموعه را تشکیل می‌دهیم:

$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۵\} \quad \text{و} \quad B-A=\{۵\}$$

در نتیجه $n(A\cup B)=۴$ و $n(B-A)=۱$.

در درس ریاضی سال هشتم، با مفهوم احتمال برخی پیشامدها آشنا شدیم. در این بخش، مفاهیم پایه‌ی احتمال را با استفاده از مجموعه‌ها و با دقت بیشتری معرفی خواهیم کرد.

تعریف. یک آزمایش شانسی مثلاً پرتاب یک تاس را در نظر بگیرید:

- مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن در انجام این آزمایش را با S نشان می‌دهیم. بنابراین در این نمونه:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

مجموعه‌ی S **«فضای نمونه‌ای»** نام دارد، ولی کتاب درسی ریاضی سال نهم به این اصطلاح اشاره نداشته است!

- در هر آزمایش، هدف تعیین احتمال برخی اتفاق‌های خاص مورد نظر (مطلوب) است. اعضای یک حالت مطلوب را داخل یک مجموعه نوشته و به آن یک **«پیشامد»** یا **«پیشامد تصادفی»** گوئیم. در نتیجه:

«پیشامدها زیر مجموعه‌هایی از S هستند و آن‌ها را با حروف بزرگ A، B، C و . . . نشان می‌دهیم.»

نکته. احتمال رخ دادن یک پیشامد A را با $P(A)$ نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که عدد ظاهر شده:

الف) مضرب ۵ باشد.

ب) کوچک‌تر از ۵ باشد.

ج) عدد اول دو رقمی باشد.

پاسخ مجموعه‌ی $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ را در نظر گرفته و توسط آن هر پیشامد را تعیین می‌کنیم:

الف) تنها عددی در S که مضرب ۵ باشد، عدد ۵ است:

$$A=\{۵\} \rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

ب) اعداد کوچک‌تر از ۵ که در S هستند، پیشامد این قسمت را مشخص می‌کنند:

$$B=\{۱,۲,۳,۴\} \rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۶} \rightarrow P(B)=\frac{۲}{۳}$$

ج) توجه کنید که هیچ عددی در S دو رقمی نیست و بنابراین پیشامد این قسمت تهی است:

$$C=\{\ \} \rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۰}{۶} \rightarrow P(C)=۰$$

به صورت مشابه انجام دهید . . .

پای تخته

۵. در ظرفی ۱۵ کارت با شماره‌های ۱، ۲، ۳، . . . و ۱۵ قرار دارد. یک کارت به صورت تصادفی (شانسی) از ظرف خارج می‌کنیم. مجموعه‌ی S را نوشته و توسط S احتمال آن را بیابید که عدد روی کارت:

الف) دو رقمی باشد.

ب) بین ۵ و ۱۰ باشد.

ج) عدد اول فرد باشد.

گاهی آزمایش مورد بحث دارای دو نوع نتیجه یا حتی بیشتر است؛ در چنین حالت‌هایی لازم است مجموعه‌ی S و پیشامدهای آن را به صورتی خاص و مناسب بنویسیم. به تفاوت دو مورد بعدی توجه کنید.

مثال. در پرتاب یک سکه مجموعه‌ی S چنین نوشته می‌شود:

$S=\{$ر , پ$\}$

که در آن «ر» نشان دهنده‌ی ظاهر شدن روی سکه و «پ» نشان دهنده‌ی پشت سکه است.

مثال. فرض کنید دو سکه را پرتاب کرده‌ایم. مجموعه‌ی S را تشکیل داده و احتمال موارد زیر را محاسبه کنید.

الف) هر دو سکه رو بیاید.

ب) فقط یک سکه پشت بیاید.

پاسخ *دوستان عزیز، توجه داریم که هربار این آزمایش انجام شود، دو نتیجه مشاهده خواهد شد؛ نتیجه‌ی سکه‌ی اول و نتیجه‌ی سکه‌ی دوم. فرض کنید در سکه‌ی اول رو و در سکه‌ی دوم پشت ظاهر شده باشد؛ این نتیجه را در S به صورت زیر نشان خواهیم داد.*

(ر , پ)

بنابراین تمام حالات ممکن به صورت زیر S را تشکیل می‌دهند:

$S=\{$(ر , ر) , (ر , پ) , (پ , ر) , (پ , پ)$\}$ $\rightarrow$ $n(S)=۴$

الف) حالتی که هر دو سکه رو آمده باشد، فقط یک حالت است:

$A=\{$(ر , ر)$\}$ $\rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}$

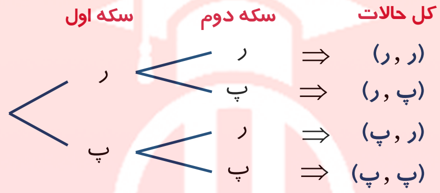
ب) با توجه به S، پیشامد آن‌که فقط یک سکه پشت بیاید را می‌نویسیم:

$B=\{$(ر , پ), (پ , ر)$\}$ $\rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۴} \rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}$

نکته. روشی آسان برای نوشتن مجموعه‌ی S هنگامی که اعضای آن دو یا چند نتیجه را نشان می‌دهند، استفاده از «**نمودار درختی**» به صورت زیر است. به عنوان نمونه، وقتی دو سکه پرتاب می‌شود:

- سکه‌ی اول می‌تواند رو یا پشت ظاهر شود:

- در هر یک از دو حالتی که برای سکه‌ی اول رخ می‌دهد، سکه‌ی دوم ممکن است رو یا پشت ظاهر گردد:



مشاهده می‌کنید که حرکتِ از چپ به راست، تمام عضوهای S را مشخص می‌کند.

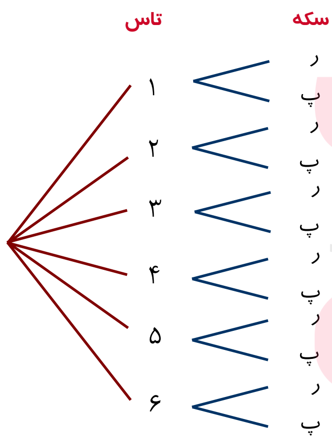
مثال. یک تاس را پرتاب کرده و سپس یک سکه را می‌اندازیم:

الف) مجموعه‌ی S را بنویسید.

ب) احتمال آن‌که سکه رو و تاس عدد زوج ظاهر شود چقدر است؟

ج) احتمال آن‌که سکه پشت بیاید چقدر است؟

پاسخ



الف) می‌توانید برای نوشتن عضوهای S از نمودار درختی استفاده کنید (البته استفاده از نمودار درختی برای فهم ساده‌تر بوده و اجباری نیست):

S = { (ر , ۱) , (پ , ۱) , (ر , ۲) , (پ , ۲) , (ر , ۳) , (پ , ۳) , (ر , ۴) , (پ , ۴) , (ر , ۵) , (پ , ۵) , (ر , ۶) , (پ , ۶) }

مشاهده می‌کنید که S دارای ۱۲ عضو است؛ یعنی $n(S)=۱۲$.

ب) با نگاه به مجموعه‌ی S حالت‌های مطلوبِ این قسمت را می‌نویسیم:

A = { (ر , ۲) , (ر , ۴) , (ر , ۶) }

در نتیجه:

$$P(A)=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

ج) توجه کنید که در این قسمت برای تاس هر عددی می‌تواند ظاهر شود، ولی سکه فقط پشت قبول است:

B = { (پ , ۱) , (پ , ۲) , (پ , ۳) , (پ , ۴) , (پ , ۵) , (پ , ۶) }

در نتیجه:

$$P(B)=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

نوبت شماست . . .

پای تخته

۶. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مجموعه‌ی S را تشکیل داده و احتمال موارد زیر را بیابید:

الف) هر دو عدد ظاهر شده فرد باشند.

ب) جمع دو عدد ظاهر شده کوچک‌تر از ۶ باشد.

ج) عددِ تاس اول از عددِ تاس دوم کوچک‌تر باشد.

تکمیل آموزش

(حل تمرینات بخش مهمی از فرآیند یادگیری است؛ انجام دقیق آن‌ها باعث تکمیل و عمیق شدن یادگیری خواهد شد!)

۱- کدام جمله‌ی زیر یک مجموعه مشخص می‌کند؟

الف) کارکنان دارای تحصیلات دانشگاهی در شرکت سامسونگ

ب) کارکنان دارای خلاقیت در شرکت سامسونگ

۲- تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

- $\{a,b,\{c\}\}$
- $\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$

۳- مجموعه‌های زیر را با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید:

- $A=$ مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد بین ۶ و ۲۱
- $B=\{۲,۶,۱۰,۱۴,۱۸\}$
- $D=\{۴,۹,۱۶,۲۵,\ldots\}$

۴- کدام مورد درست و کدام مورد نادرست است؟

- $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$
- $\varnothing\subset\{۱\}$
- اگر $A\subset\varnothing$ باشد، آنگاه A برابر تهی است.
- اگر $A\not\subset B$ و $a\in A$ باشد، آنگاه $a\notin B$.

۵- اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

- $A=\{۳k-۱:\ k\in\mathbb{N}\ ,-۳\le k<۵\}$
- $B=\{\frac{x^۲}{۱+x^۲}\mid\ x\in\mathbb{Z}\ ,-۴\le x<۲\}$

۶- در هر یک از موارد زیر، مجموعه‌های A و B برابرند. مجهولات موجود در مجموعه‌ها را تعیین کنید:

- $A=\{m+۲n,۵,۳\}$ و $B=\{۱-۲n,۵,-۳\}$.
- $A=\{x-۱,۵\}$ و $B=\{۴,y+۳\}$.

۷- در تساوی $\{m\}=\{۵-۲x,۳x-۲۵\}$، مقدار m را بیابید.

۸- مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۸ را به دو صورت زیر بنویسید:

- با نوشتن اعضاء
- با استفاده از نمادهای ریاضی

۹- از تساوی زیر مقدیر x و y را بیابید:

$$\{\{x\},۷,۴-y\}=\{x-y,\{۳\},۸\}$$

۱۰- اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۴,۵\}$ و $C=\{۳,۵,۱\}$، هر یک از مجموعه‌های زیر و تعداد زیرمجموعه‌های هر کدام را تعیین کنید:

- $B\bigcap(A-C)$
- $(B-C)\bigcup(C\cap A)$
- $(B-A)\bigcap(C-B)$
- $(A\bigcap B)-(B\bigcup C)$

۱۱- اگر بدانیم $A\subset B$، عبارات زیر را ساده کنید:

- $A-B$
- $A\bigcup B$
- $A\bigcap B$
- $\varnothing\bigcup B$
- $\varnothing-A$

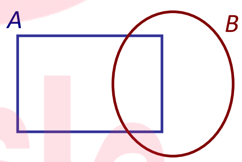
۱۲- فرض کنید داشته باشیم $A=\{۱,m,۳\}$، $B=\{n|\ n\in N,\ ۲\leq n<۷\}$ و $C=\{۴,۵,۶\}$. مقدار m را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$C=B-A$$

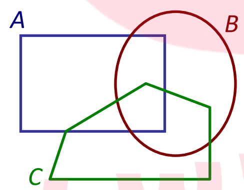
۱۳- آیا عبارت زیر همواره درست است؟

$$(A\bigcap B)\subset B\subset(A\bigcup B)$$

۱۴- مجموعه‌های داده شده‌ی زیر را در شکل‌های بالای هر کدام هاشور بزنید.



$(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$



$[(A\bigcup B)\bigcap C]-(B-A)$

۱۵- شکل‌های مناسبی رسم کنید و مانند تمرین قبل، مجموعه‌های زیر را هاشور بزنید:

- $(A\bigcap B)-A$
- $A-(A\bigcap B)$
- $(B-C)\bigcup(A\bigcap B)$
- $(A\bigcup B)-C$

۱۶- خانواده‌ای دارای سه فرزند است.

الف) با رسم نمودار درختی، مجموعه‌ی S مربوط به جنسیت فرزندان را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد که فقط یک فرزند دختر باشد.

ج) چقدر احتمال دارد که لااقل یک فرزند دختر باشد.

د) چقدر احتمال دارد که تعداد دخترها از تعداد پسرها بیشتر باشد.

۱۷- از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\ldots,۱۶\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد:

الف) عدد انتخاب شده مضرب ۵ باشد.

ب) عدد انتخاب شده دو رقمی باشد.

۱۸- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) مجموعه‌ی S را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد هر دو تاس عدد اول بیایند.

ج) چقدر احتمال دارد عدد تاس اول از عدد تاس دوم کوچک‌تر بیاید.

د) چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد تاس‌ها برابر ۹ باشد.

پاسخ‌نامه

فعالیت‌های پای تخته فصل اول

این قسمت را فقط در صورتی ببینید که قصد مقایسه‌ی پاسخ خود با پاسخ صحیح را دارید!

۱- تعیین تمام موارد (الف)، (ب) و (د) به نظر افراد بستگی دارد و در نتیجه هیچ یک مجموعه نیستند.

ولی در قسمت (ج):

فقط یک عدد اول زوج وجود دارد و مجموعه‌ی مربوطه به صورت $\{۲\}$ نوشته می‌شود. لذا فقط جمله‌ی این قسمت یک مجموعه مشخص می‌کند.

۲- زیر مجموعه‌های $B=\{۱,۲,\{۳\}\}$ را از عضوهای کمتر به بیشتر می‌نویسیم:

$$\varnothing \ , \ \{۱\} \ , \ \{۲\} \ , \ \{\{۳\}\} \ , \ \{۱,۲\} \ , \ \{۱,\{۳\}\} \ , \ \{۲,\{۳\}\} \ , \ \{۱,۲,\{۳\}\}$$

مشاهده می‌کنید که مجموعه‌ی B دارای ۳ عضو و دارای ۸ زیر مجموعه است.

۳- الف) با کمی توجه مشاهده می‌کنید که اعضای مجموعه‌ی داده شده مجذور عددهای حسابی هستند:

$$۰,۱,۴,۹,۱۶,\ldots \quad \rightarrow \quad ۰^۲,۱^۲,۲^۲,۳^۲,۴^۲,\ldots$$

در نتیجه این مجموعه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{k^۲ \mid k\in W\}$$

ب) توجه کنید که اگر عددهای $۱,۴,۹,۱۶,\ldots$ یک واحد کم کنیم، عددهای $۰,۳,۸,۱۵,۲۴,\ldots$ بدست می‌آیند:

$$۰,۳,۸,۱۵,۲۴,\ldots \quad \rightarrow \quad ۱-۱,۴-۱,۹-۱,۱۶-۱,۲۵-۱,\ldots \quad \Rightarrow \quad ۱^۲-۱,۲^۲-۱,۳^۲-۱,۴^۲-۱,\ldots$$

در نتیجه این مجموعه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{k^۲-۱ \mid k\in \mathbb{N}\}$$

۴- مورد اول: با رعایت ترتیب (ابتدا داخل پرانتز را می‌نویسیم):

$$B\cap(A-B)=\{۳,۵,۱\}\cap(\{۱,۲,۳\}-\{۳,۵,۱\})=\{۳,۵,۱\}\cap\{۲\}=\varnothing$$

مورد دوم: مشابه قسمت قبل:

$$(A-B)\cup(A\cap B)=(\{۱,۲,۳\}-\{۳,۵,۱\})-(\{۱,۲,۳\}\cap\{۳,۵,۱\})$$
$$=\{۲\}-\{۱,۳\}=\{۲\}$$

۵- مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن عبارت است از:

$$S=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۴,۱۵\} \rightarrow n(S)=۱۵$$

الف) عددهای دو رقمی موجود در S را می‌نویسیم:

$$A=\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵\} \rightarrow n(A)=۶ \Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

ب) عددهای بین ۵ و ۱۰ در S را می‌نویسیم:

$$B=\{۶,۷,۸,۹\} \rightarrow n(B)=۴ \Rightarrow P(B)=\frac{۴}{۱۵}$$

ج) مشابه دو قسمت قبل، پیشامد را نوشته و احتمال را محاسبه می‌کنیم:

$$C=\{۳,۵,۷,۱۱,۱۳\} \rightarrow n(C)=۵ \Rightarrow P(C)=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$$

۶- برای درک بهتر و یا اگر لازم است، از نمودار درختی استفاده کنید؛ مجموعه‌ی تمام حالت‌ها به صورت زیر است:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),\dots,(۱,۶),(۲,۱),(۲,۲),\dots,(۲,۶),(۳,۱),(۳,۲),\dots,(۶,۶)\} \rightarrow n(S)=۳۶$$

توجه کنید یک عضو S مانند $(۲,۱)$ به این معنی است که تاس اول عدد ۲ و تاس دوم عدد ۱ آمده است.

الف) پیشامد هر دو عدد فرد به صورت زیر است:

$$A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\} \rightarrow n(A)=۹$$

در نتیجه:

$$P(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب) تمام عضوهایی که جمع دو عدد آن‌ها کمتر از ۶ است را می‌نویسیم:

$$B=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\} \rightarrow n(A)=۱۰$$

در نتیجه:

$$P(B)=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

ج) تمام عضوهایی از S که عدد اول از عدد دوم کمتر است را می‌نویسیم:

$$C=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۶)\}$$
$$\rightarrow n(C)=۱۵$$

در نتیجه:

$$P(C)=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

راهنمای کامل تمرینات

۱

مجموعه‌ها

پاسخ‌نامه

تمرینات پایانی فصل اول

این قسمت را فقط در صورتی ببینید که قصد مقایسه‌ی پاسخ خود با پاسخ صحیح را دارید!

۱- الف) این جمله یک مجموعه مشخص می‌کند، زیرا این‌که کدام افراد دارای تحصیلات دانشگاهی هستند واضح است.

ب) این‌که یک کارمند دارای خلاقیت هست یا نیست، از نظر هر کس متفاوت است و طبق سلیقه‌ی شخصی تعیین می‌شود. لذا یک مجموعه را مشخص نمی‌کند.

۲- پاسخ هر مورد:

- چون مجموعه فوق سه عضو دارد، تعداد زیرمجموعه‌های آن $۲^۳=۸$ است:

$$\varnothing,\{a\},\{b\},\{\{c\}\},\{a,b\},\{a,\{c\}\},\{b,\{c\}\},\{a,b,\{c\}\}$$

- مشابه مورد قبل، این مجموعه نیز ۸ زیرمجموعه دارد:

$$\varnothing,\{۱\},\{۲\},\{\{۱,۲\}\},\{۱,۲\},\{۱,\{۱,۲\}\},\{۲,\{۱,۲\}\},\{۱,۲,\{۱,۲\}\}$$

۳- ابتدا بهتر است هر مجموعه را با عضوهایش معرفی کرده و سپس به زبان ریاضی بیان کنیم:

- این مجموعه بصورت $\{۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹\}$ است، چون اعداد فرد به صورت $۲k+۱$ هستند، بنابراین مجموعه به زبان ریاضی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$A=\{۲k+۱ \mid k\in N\ ,\ ۳\le k\le ۹\}$$

- با توجه به اعضای مجموعه، مجموعه بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$B=\{۴k+۲ \mid k\in W\ ,\ ۰\le k\le ۴\}$$

- مشاهده می‌کنیم مجموعه، مجذور اعداد ۲، ۳، ۴، ۵ و ... است. لذا:

$$D=\{k^۲ \mid k\in N\ ,\ k\ge ۲\}$$

۴- طبق نکات گفته شده در جزوه‌ی آموزشی این فصل:

- درست؛ زیرا مجموعه‌ی اعداد صحیح شامل اعداد منفی، صفر و مثبت می‌باشد. ولی مجموعه‌ی اعداد طبیعی فقط شامل اعداد مثبت است.
- درست؛ با توجه به این‌که می‌توان به هر عدد صحیح مخرج ۱ داد.
- درست؛ زیرا طبق نکات گفته شده در جزوه، مجموعه‌ی $\varnothing$ زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها است.
- درست؛ چون فقط $\varnothing\subset\varnothing$.
- نادرست؛ مثلاً برای $A=\{۱,۲\}$ و $B=\{۱,۳,۴\}$ داریم $A\not\subset B$ و $۱\in A$. با این حال می‌بینید که عدد ۱ عضو مجموعه‌ی B هم هست.

۵- با توجه به عبارت‌ها و شرایط داده شده عمل می‌کنیم:

- در فرمول $۳k-۱$ بجای k اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ (فقط اعداد طبیعی بین ۳- و ۵) را قرار می‌دهیم:

$$A=\{۲,۵,۸,۱۱\}$$

- مشابه مورد قبل عددهای ۴- ، ۳- ، ۲- ، ۱- ، ۰ و ۱ را قرار می‌دهیم:

$$B=\{\frac{۱۶}{۱۷},\frac{۹}{۱۰},\frac{۴}{۵},\frac{۱}{۲},۰\}$$

۶- چون در هر مورد مجموعه‌ها برابرند، لذا باید عضوهای A و B یکسان باشند:

- مورد اول: با توجه به این‌که عدد ۵ در هر دو مشترک است، دو عضو دیگر را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$۱-۲n=۳ \rightarrow ۲n=-۲ \rightarrow n=-۱$$

$$m+۲n=-۳ \rightarrow m+۲(-۱)=-۳ \rightarrow m-۲=-۳ \rightarrow m=-۱$$

- مورد دوم: دو عضو را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x-۱=۴ \rightarrow x=۵$$

$$y+۳=۵ \rightarrow y=۲$$

۷- چون دو مجموعه با هم مساوی هستند، پس باید اعضایشان یکسان باشند. از طرفی مجموعه‌ی اول یک عضو دارد ولی مجموعه‌ی دوم دو عضو دارد، پس دو عضو مجموعه‌ی دوم با هم برابرند.

$$۵-۲x=۳x-۲۵ \rightarrow -۵x=-۳۰ \rightarrow x=۶$$

بنابراین تنها عضو دو مجموعه برابر $۵-۲x=۵-۲(۶)=-۷$ بوده و در نتیجه $m=-۷$ است.

۸- با توجه به مفهوم مقسوم علیه:

- $\{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}$
- توجه کنید یک مقسوم‌علیه عدد ۱۸، عددی است که تقسیم ۱۸ بر آن عددی طبیعی شود. بنابراین:

$$\{k \mid k\in N \ , \ \frac{۱۸}{k}\in N\}$$

۹- باید اعضای دو مجموعه یکسان باشند:

$$\{x\}=\{۳\} \rightarrow x=۳$$

$$x-y=۷ \rightarrow ۳-y=۷ \rightarrow y=-۴$$

۱۰- پاسخ هر مورد:

- ابتدا $A-C$ را تعیین می‌کنیم:

$$A-C=\{۲\} \Rightarrow B\cap(A-C)=\{۲\}$$

مجموعه‌ی فوق ۱ عضو دارد، لذا $۲=۲^۱$ زیرمجموعه دارد.

- ابتدا $B-C$ و $C\cap A$ را تعیین می‌کنیم:

$$B-C=\{۲,۴\} \ , \ C\cap A=\{۱,۳\} \Rightarrow (B-C)\cup(C\cap A)=\{۱,۲,۳,۴\}$$

مجموعه‌ی فوق ۴ عضو داشته و لذا $۲^۴=۱۶$ زیرمجموعه دارد.

- ابتدا $B-A$ و $C-B$ را تعیین می‌کنیم:

$$B-A=\{۴,۵\} \ , \ C-B=\{۳,۱\} \Rightarrow (B-A)\cap(C-B)=\varnothing$$

تعداد اعضای مجموعه صفر است، لذا $۲^۰=۱$ زیرمجموعه دارد.

۱۱- پاسخ هر مورد:

- چون $A\subset B$ است، بنابراین عضوی در A وجود ندارد که در B نباشد، لذا:

$$A-B=\varnothing$$

- چون $A\subset B$ است، لذا طبق نکات ذکر شده در جزوه داریم:

$$A\bigcup B=B$$

- چون $A\subset B$ است، لذا طبق نکات ذکر شده در جزوه داریم:

$$A\bigcap B=A$$

- واضح است که:

$$\varnothing\bigcup B=B$$

- طبق تعریف تفاضل می‌دانیم:

$$\varnothing-A=\varnothing$$

۱۲- ابتدا مجموعه‌ی B را مشخص می‌کنیم:

$$B=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$$

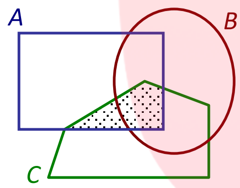
بنابراین:

$$B-A=\{۲,۳,۴,۵,۶\}-\{۱,m,۳\}$$

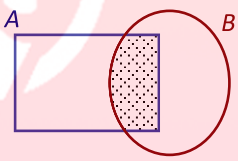
چون $C=\{۴,۵,۶\}$، باید $m=۲$ باشد تا تساوی مورد نظر برقرار گردد.

۱۳- بله، زیرا طبق نکات ذکر شده در جزوه، می‌دانیم: $A\bigcap B\subset B$. از طرفی می‌دانیم: $B\subset A\bigcup B$.

۱۴- با توجه به مفاهیم مربوطه:

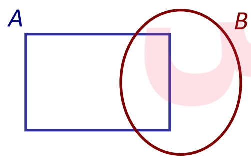


$[(A\bigcup B)\bigcap C]-(B-A)$

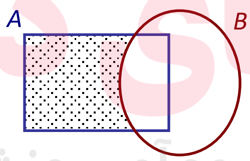


$(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$

۱۵- مشابه تمرین قبل:



$(A\bigcap B)-A=\varnothing$

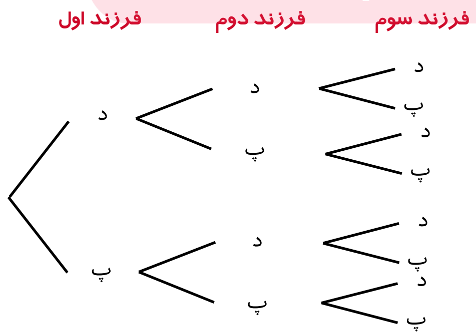


$A-(A\bigcap B)$

بقیه موارد مشابه و به عهده‌ی دانش‌آموزان

۱۶- با استفاده از نمودار درختی:

الف)



$$S=\{(\text{د},\text{د},\text{د}),(\text{د},\text{د},\text{پ}),(\text{د},\text{پ},\text{د}),(\text{د},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{د},\text{د}),(\text{پ},\text{د},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{د}),(\text{پ},\text{پ},\text{پ})\}$$

ب) با نگاه به مجموعه‌ی S حالت‌های مطلوب این قسمت را می‌نویسیم:

$$A=\{(\text{د},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{د},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{د})\}$$

در نتیجه:

$$P(A)=\frac{۳}{۸}$$

ج) احتمال اینکه حداقل یک دختر باشد یعنی یک دختر یا بیشتر. لذا:

$$B=\{(\text{د},\text{د},\text{د}),(\text{د},\text{د},\text{پ}),(\text{د},\text{پ},\text{د}),(\text{د},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{د},\text{د}),(\text{پ},\text{د},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{د})\}$$

در نتیجه:

$$P(B)=\frac{۷}{۸}$$

د) با نگاه به مجموعه‌ی S عضوهایی که تعداد دخترها از پسرها بیشتر باشند را می‌نویسیم:

$$C=\{(\text{د},\text{د},\text{د}),(\text{د},\text{د},\text{پ}),(\text{د},\text{پ},\text{د}),(\text{پ},\text{د},\text{د})\}$$

در نتیجه:

$$P(C)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

۱۷- واضح است $n(S)=۱۶$.

الف) حالت‌های ممکن برابر است با: $A=\{۵,۱۰,۱۵\}$ و در نتیجه: $P(A)=\frac{۳}{۱۶}$.

ب) حالت‌های ممکن برابر است با: $B=\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶\}$ در نتیجه: $P(A)=\frac{۷}{۱۶}$.

۱۸- می‌توان از نمودار درختی بهره گرفت:

الف) $S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۱,۶),(۲,۱),\dots,(۲,۶),\dots,(۶,۶)\}$ و در نتیجه $n(S)=۳۶$.

ب) حالت‌های ممکن برابر است با: $A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\}$ و در نتیجه:

$$P(A)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

ج) حالت‌های ممکن برابر است با:

$$B=\{(۱,۲),\dots,(۱,۶),(۲,۳),\dots,(۲,۶),(۳,۴),\dots,(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۶)\}$$

لذا $n(B)=۱۵$ و در نتیجه: $P(B)=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$.

د) حالت‌های ممکن برابر است با: $C=\{(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)\}$. مشابه سایر موارد:

$$n(C)=۴\ \rightarrow\ P(C)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$