عددهای صحیح و گویا

۱ـ عددهای طبیعی: $1, 2, 3, 4, \ldots$

۲ـ عددهای صحیح:

$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

قرینه‌ی یک عدد:

ـ قرینه‌ی هر عدد با عوض کردن علامت آن به دست می‌آید، نماد قرینه علامت $(-)$ است.

ـ قرینه‌ی صفر خودش است.

تعیین علامت یک عدد: یک عدد ممکن است چندین علامت داشته باشد. برای تعیین علامت‌نهایی آن کافی است تعداد منفی‌های آن را شمارش کنیم، اگر تعداد منفی‌ها زوج بود علامت نهایی (مثبت) و اگر تعداد منفی‌ها فرد بود علامت نهایی (منفی) است. (دقت کنید علامت‌های مثبت تأثیری ندارند).

مثال:

$+(-(+(-۳))) = +۳ \quad -(-(-(+۷))) = -۷$

جمع و تفریق (دو عدد صحیح) :

ابتدا با حذف پرانتزها و تعیین علامت هر عدد سعی می‌کنیم آنها را مختصر بنویسیم سپس اگر علامت دوعدد یکسان بود، آنها را مثل دوعدد طبیعی با هم جمع می‌کنیم و در آخر همان علامت مشترک را کنار جواب قرار می‌دهیم. مانند:

$(-۳) + (-۱) = -۴$

$(-۹) - (+۶) = -۹ - ۶ = -۱۵$

$(+۴) + (+۱۰) = +۱۴$

اگر علامت‌ها مخالف بود، بدون در نظر گرفتن علامت‌ها عدد به ظاهر بزرگتر را منهای عدد به ظاهر کوچکتر می‌کنیم و در آخر علامت عددی که ظاهرش بزرگتر بود را کنار جواب قرار می‌دهیم. مانند:

$(-۴) + (+۱) = -۳$

$(-۷) + (+۱۲) = +۵$

ضرب و تقسیم اعداد صحیح:

ابتدا با استفاده از جدول زیر علامت را تعیین می‌کنیم سپس دوعدد را مانند دو عدد طبیعی ضرب یا تقسیم می‌کنیم. مانند:

× یا ÷	+	−
+	+	−
−	−	+

$$(-۲۰)\times(+۳)=-۶۰$$

$$(-۳۴)\div(-۱۷)=+۲$$

اولویت محاسبات :

هنگام محاسبه حاصل یک عبارت ابتدا داخل پرانتزها و کروشه‌ها سپس توان‌ها و رادیکال‌ها سپس ضرب و تقسیم و قرینه‌ها از چپ به راست و در آخر جمع و تفریق‌ها را انجام می‌دهیم.

$$-۳۰-\left[۲\times(-۹)+۷^{۲}\right]$$
$$=-۳۰-\left[(-۱۸)+۴۹\right]=-۳۰-۳۱=-۶۱$$

عددهای گویا: به هر عددی که بتوان آن را به صورت یک کسر علامت‌دار (البته هم صورت و هم مخرج کسر باید عدد صحیح باشند و مخرج آن نباید صفرباشد) نشان داد عدد گویا می گوییم.

- دقت کنید اعداد اعشاری هم عدد گویا هستند چون می‌توانید به صورت کسری با مخرج ۱۰ یا ۱۰۰یا.... بنویسید.

مثلاً عددهای :

$$\ldots, -۱\frac{۲}{۵}, +۳/۷, -۰/۳, +\frac{۱}{۴}, -\frac{۳}{۷}$$

همگی عدد گویا هستند.

هر عدد طبیعی یا صحیح یک عدد گویا هستند (زیرا می توانید به آن‌ها مخرج یک بدهید در ضمن دوست داشتید مخرج ۲ یا ۳ و... بدهید باید دقت کنید صورت هم در همان عددضرب شود)

- برای مشخص کردن یک عدد گویا روی محور ابتدا هر واحد را به اندازه مخرج آن عدد گویا تقسیم‌بندی کنید سپس با در نظر گرفتن علامت و با شروع از صفر به تعداد صورت آن عدد گویا از آن قسمت‌های کوچک شمارش کنید تا به نقطه‌ی مورد نظر برسید.

- از نظر نمایش اعداد گویا اعداد مانند $\frac{-۳}{۵}, -\frac{۳}{۵}, \frac{۳}{-۵}$ هیچ تفاوتی با هم ندارند.

تعیین علامت یک عدد گویا: اگر عدد گویایی چندین علامت داشت برای تعیین علامت‌نهایی آن تعداد منفی‌ها را شمارش می کنیم اگر تعداد منفی‌ها زوج بود حاصل مثبت و اگر تعداد منفی‌ها فرد بود حاصل منفی است مانند:

$$-\frac{-۳}{۷}=+\frac{۳}{۷} \qquad \frac{-۳}{+۷}=-\frac{۳}{۷}$$

$$-\frac{-۳}{-۷}=-\frac{۳}{۷} \qquad -\left(+\frac{-۳}{-۷}\right)=-\frac{۳}{۷}$$

$$\frac{(-۳۵)\times(+۶)}{(-۷)\times(+۱۵)}\xrightarrow{\text{علامت کسر}}+$$

جمع و تفریق عددهای گویا:

در صورتی که یک عدد گویا دارای چند علامت بود سعی کنید در ابتدا هر عدد را تعیین علامت کنید سپس مخرج مشترک بگیرید و حل کنید در ضمن همواره در محاسبات علامت را برای صورت کسر در نظر بگیرید و بعد از پاسخ دادن در آخر کار علامت را به کل کسر بدهید. مثال:

$$-\left(\frac{-۳}{-۴}\right)-\left(+\frac{-۱}{۶}\right)=-\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۶}$$

$$=\frac{-۹+۲}{۱۲}=\frac{-۷}{۱۲}=-\frac{۷}{۱۲}$$

ضرب اعداد گویا :

برای ضرب دو یا چند عدد گویا ابتدا تعیین علامت می کنیم سپس کسرها را تا حدامکان ساده می کنیم و در آخر صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را نیز در هم ضرب می کنیم.

تقسیم اعداد گویا:

کسر اول را نوشته و علامت تقسیم را به ضرب تبدیل می‌کنیم سپس معکوس (وارون) کسر دوم را می‌نویسیم. مانند:

$$\left(-\frac{7}{20}\right) \div \left(+\frac{3}{10}\right) = \left(-\frac{7}{20}\right) \times \left(+\frac{10}{3}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{بعد از تعیین علامت‌وساده کردن}} = -\frac{7}{6} = \left(-1\frac{1}{6}\right)$$

دقت کنید هنگام محاسبه با اعداد مخلوط می‌توانید آنها را به کسر تبدیل و سپس محاسبات را انجام دهید. مانند:

$$\left(-3\frac{3}{7}\right) \div \left(-\frac{9}{14}\right) = \left(-\frac{24}{7}\right) \times \left(-\frac{14}{9}\right)$$

$$\rightarrow +\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

در محاسبات اعداد گویا هم باید اولویت‌ها را رعایت کنید مانند:

$$-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

ابتدا ضرب $\rightarrow -\frac{3}{5}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-9-5}{15}$

$$=\frac{-14}{15}=-\frac{14}{15}$$

حاصل ضرب هر عدد به جز صفر در معکوسش یک می‌شود.

فصل دوم

حساب عددهای طبیعی

شمارنده‌های یک عدد: اگر عدد ۱۸ را برهریک از عددهای ۱و۲و۳و۶و۹و۱۸ تقسیم کنیم باقی‌مانده صفر دارند به این عددها شمارنده‌های ۱۸ می گوییم به طور کلی می‌توان گفت:« اگر عدد طبیعی a را بر عدد طبیعی b تقسیم و باقی‌مانده‌ی تقسیم صفر شود. در این صورت b شمارنده‌ی a است. »

شمارنده‌های مشترک: به اعدادی که شمارنده‌ی دو یا چند عدد هستند شمارنده‌های مشترک آن‌ها می گوئیم.

ب.م.م: بزرگترین شمارنده مشترک دو یا چند عدد(ب.م.م) می گوئیم همانطور که در سال گذشته یاد گرفته‌اید ب.م.م دو عدد B و A را به صورت (A,B) نمایش می‌دهیم.

مثال : ابتدا شمارنده‌های دو عدد ۱۸ و ۱۲ را بنویسید سپس با مشخص کردن شمارنده‌های مشترک آنها ب.م.م این دو عدد را بیابید.

شمارنده‌های ۱۲ $\Rightarrow$ ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲

شمارنده‌های ۱۸ $\Rightarrow$ ۱, ۲, ۳, ۶, ۹, ۱۸

شمارنده‌های مشترک $\Rightarrow$ ۱, ۲, ۳, ۶

ب.م.م این دو عدد ۶ = (۱۲,۱۸)

مضارب طبیعی عدد: هرگاه عدد طبیعی a را به ترتیب در اعداد طبیعی ضرب کنید مضارب طبیعی آن عدد مشخص می‌شود.

مضارب مشترک: برخی اعداد مضرب دو یا چند عدد هستند به این عددها مضارب مشترک می گویند.

ک.م.م: به اولین (کوچکترین) مضرب مشترک دو یا چند عدد [ک.م.م] آن اعداد می گویند. همانطور که در سال قبل گفته شد، ک.م.م دو عدد A و B را به صورت $[A,B]$ نمایش می‌دهیم.

مثال ابتدا مضارب دو عدد ۹ و ۶ را بنویسید سپس با نوشتن چند مضرب مشترک آنها ک.م.م این دو عدد را مشخص کنید.

مضارب۶ $\Rightarrow$ ۶,۱۲,۱۸,۲۴,۳۰,۳۶,۴۲,...

مضارب۹ $\Rightarrow$ ۹,۱۸,۲۷,۳۶,۵۴,۶۳,...

مضارب مشترک $\Rightarrow$ ۱۸,۳۶,...

ک.م.م این دو عدد ۱۸ = [۶,۹]

ـ دقت کنید با توجه به ک.م.م می‌توانید هر تعدادی از مضرب‌های مشترک را پیدا کنید. با توجه به مثال بالا بیست و هفتمین مضرب مشترک دو عدد ۶ و ۹ از ضرب ۱۸ در ۲۷ به دست می آید.

اعداد اول: اعدادی که تنها دارای ۲ شمارنده (یک و خود عدد) باشند عدد اول نامیده می‌شوند. مانند ...,۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳

- تعداد اعداد اول بی‌شمار است و به غیر از ۲ بقیه‌ی آنها همگی عدد فرد هستند.
- هر عدد طبیعی بزرگتر از یک حداقل یک شمارنده‌ی اول دارد.

تجزیه اعداد :

هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را می‌توانیم به صورت یک یا ضرب چند عدد اول بنویسیم که به این کار تجزیه می‌گوئیم یکی از راه‌های تجزیه استفاده از نمودار درختی است به طور مثال تجزیه‌ی اعداد ۱۷ و ۱۲ و ۳۰ و ۲۰ به صورت زیر است:

$۱۲ = ۲^۲ \times ۳$ $\qquad$ $۱۷ = ۱۷$

$۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$ $\qquad$ $۲۰ = ۲^۲ \times ۵$

ب.م.م به کمک تجزیه: برای بدست آوردن ب.م.م دو یا چند عدد از روی تجزیه اعداد شمارنده‌های اول مشترک با کمترین توان را در یکدیگر ضرب می کنیم.

اگر دو عدد شمارنده‌ی اول مشترک نداشته باشند، ب.م.م آن‌ها یک است و می گوئیم این دو عدد نسبت به هم اول هستند.

ـ دو عدد اول متفاوت نسبت به هم اول هستند مثال:

$$(۵, ۷) = ۱$$

ـ هر دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول هستند.

$$(n, n+۱) = ۱$$

ـ ک.م.م با کمک تجزیه: برای به دست آوردن ک.م.م دو یا چند عدد از روی تجزیه‌ی اعداد، همه شمارنده‌های اول آنها را با بیش‌ترین توان در یکدیگر ضرب می کنیم.

مثال: با کمک تجزیه ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۱۲۰و۹۰ را مشخص کنید.

$$۹۰ = ۲ \times ۳^{۲} \times ۵$$

$$۱۲۰ = ۲^{۳} \times ۳ \times ۵$$

$$(۱۲۰, ۹۰) = ۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰$$

$$[۱۲۰ \text{و} ۹۰] = ۲^{۳} \times ۳^{۲} \times ۵ = ۳۶۰$$

دسته‌بندی اعداد طبیعی: از نظر تعداد شمارنده‌ها می‌توانیم اعداد طبیعی را به ۳ دسته زیر تقسیم کنیم:

۱ـ عدد یک (استثنا): این عدد تنها یک شمارنده دارد (خود یک)

۲ـ اعداد اول: اعدادی هستند که فقط ۲ شمارنده دارند (خودشان و یک)

۳ـ اعداد مرکب: اعدادی که بیش از ۲ شمارنده دارند.

- **به بیانی دیگر:** هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک را که بتوانیم به صورت ضرب دو عددطبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسیم، **عدد مرکب** نامیده می‌شود.
- اگر a عددی اول باشد تمام مضرب‌های آن به جز خودش مرکب‌اند مانند ۷ که تمام مضرب‌هایش به جز خودش مرکب‌اند.
- اگر a عددی مرکب باشد تمام مضرب‌هایش نیز مرکب‌اند مانند عدد ۶ که همه‌ی مضاربش مرکب است.

غربال: (تعیین عددهای اول در یک محدوده از اعداد طبیعی)

برای اینکه در یک محدوده عددی (مثلاً ۱ تا ۳۰) اعداد اول را پیدا کنیم از روشی به نام غربال کردن استفاده می کنیم در این روش ابتدا عدد یک را خط می‌زنیم (زیرا عدد یک اول نیست) سپس به جز ۲ تمام مضارب آن را خط می‌زنیم.

به همین ترتیب مضارب سایر اعداد اول به جز خودشان را تا جایی خط می‌زنیم که به عددی اول برسیم و مربع آن (مجذورش) از اعداد داده شده بزرگتر شود.

- در غربال بعضی از عددها چند بار خط می‌خورند مثلاً عدد ۶ دو بار خط می‌خورد یکبار هنگام خط زدن مضارب ۲ و یکبار هنگام خط‌زدن مضارب ۳.

برای اینکه بدانیم یک عدد چند بار خط می‌خورد کافی است آن را تجزیه کنیم به هر تعدادی که شمارنده‌ی اول داشته باشد خط می‌خورد به طور مثال عدد ۲۴ هم دو بار خط می‌خورد زیرا $۲۴ = ۲^{۳} \times ۳$ یعنی ۲ شمارنده‌ی اول دارد ولی عدد ۳۰ سه بار خط می‌خورد زیرا $۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$ یعنی ۳ شمارنده‌ی اول دارد.

- اولین مضرب هرعدد اول که برای اولین بار خط می‌خورد مربع (مجذور)آن است.

تعیین اول یا مرکب بودن یک عدد طبیعی:

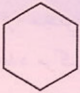
برای اینکه مشخص کنیم یک عدد اول است یا خیر، باید آن را به ترتیب بر اعداد اول تقسیم کنیم اگر برهیچ کدام بخش‌پذیر نبود اول است. در این روش تقسیم‌ها را تا جایی ادامه می‌دهیم که مربع آن عدد اول از عدد داده شده کمتر باشد.

مثال: عدد ۱۲۹ عدد اول نیست زیرا مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر است پس این عدد مرکب است.

ولی عدد ۱۲۷ عددی اول است زیرا اگر آن را بر هریک از عددهای ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ تقسیم کنیم باقی‌مانده‌ای به جز صفر دارد دقت کنید لازم نیست عدد ۱۲۷را بر ۱۳ تقسیم کنید زیرا $۱۳^۲ = ۱۶۹$ و عدد ۱۶۹ بزرگتر از ۱۲۷ می‌باشد.

چند ضلعی‌ها:

در هندسه به هر خط شکسته بسته روی صفحه چند ضلعی گفته می‌شود در چند ضلعی‌ها ضلع‌های یکدیگر را قطع نمی‌کنند مگر در رأس‌هایی که دو ضلع به هم برسند به طور مثال:



شش ضلعی است

چند ضلعی نیست

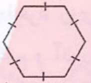
چند ضلعی نیست

چند ضلعی نیست

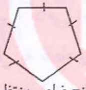
چهارضلعی است

چند ضلعی‌های منتظم:

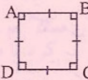
اگر در یک چند ضلعی همه ضلع‌ها با هم و همه زاویه‌ها نیز با هم مساوی باشند آن چند ضلعی را منتظم می گوییم.



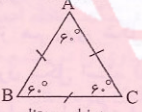
شش ضلعی منتظم



پنج ضلعی منتظم



چهار ضلعی منتظم (مربع)



سه ضلعی منتظم

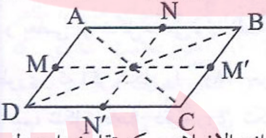
(مثلث متساوی الاضلاع)

در بعضی از شکل‌ها می‌توان نقطه‌ای را پیدا کرد به طوری که اگر شکل را ۱۸۰° حول آن نقطه دوران دهیم، شکل حاصل دقیقاً روی شکل اول منطبق شود این نقطه را (مرکز تقارن) آن شکل می گوییم.

ـ مثلث مرکز تقارن ندارند.

ـ مرکز تقارن مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع و لوزی محل برخورد قطرهایشان هستند.

ـ برای آن که بررسی کنیم نقطه‌ای مرکز تقارن شکل است یا خیر، کافی است از هر نقطه‌ی دلخواه روی محیط شکل به نقطه‌ی مورد نظر وصل کنیم و آن را به اندازه پاره‌خط ایجاد شده امتداد دهیم، اگر نقطه‌ی حاصل باز هم روی شکل بود می‌گوئیم آن نقطه مرکز تقارن شکل است. (دقت کنید به کلمه‌ی هر نقطه دلخواه، زیرا ممکن است ۲ یا ۳... تا از این نقطه‌ها روی شکل بیافتد ولی آن نقطه مرکز تقارن نباشد.



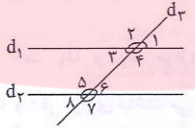
ـ دقت کنید متوازی‌الاضلاع مرکز تقارن دارد ولی خط تقارن ندارد.

- در n ضلعی منتظم اگر n زوج باشد شکل مرکز تقارن دارد اما اگر n فرد باشد شکل مرکز تقارن ندارد به طور مثال شش ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد ولی پنج‌ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.

هر n ضلعی منتظم، n خط تقارن دارد به طور مثال مربع ۴ خط تقارن دارد و پنج ضلعی منتظم ۵ خط تقارن دارد.

توازی و تعامد:

اگر خط مورب (مایل) دو یا چند خط موازی را قطع کند:



۱) همه زاویه‌های تند ایجاد شده با هم مساوی‌اند.

$$\hat{1} = \hat{3} = \hat{6} = \hat{8}$$

۲) همه زاویه‌های باز ایجاد شده با هم مساوی‌اند.

$$\hat{2} = \hat{4} = \hat{5} = \hat{7}$$

۳)هر زاویه‌ی تند مکمل هر زاویه باز است.

$\hat{۵}+\hat{۳}=۱۸۰^\circ$

$\hat{۱}+\hat{۴}=۱۸۰^\circ$ $\hat{۱}+\hat{۷}=۱۸۰^\circ$

برعکس نکته قبل نیز درست است یعنی:

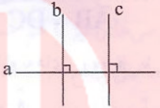
اگرخطی دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را طوری قطع کند که زاویه‌های تند با هم و زاویه‌های باز بوجود آمده با هم مساوی باشند حتماً دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی‌اند.

ـ اگر دو خط $d_۱$ و $d_۲$ موازی باشند می‌نویسیم $d_۱ \parallel d_۲$ و اگر موازی نباشند می‌نویسیم $d_۱ \nparallel d_۲$.

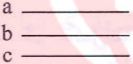
ـ اگر خط $d_۱$ بر خط $d_۲$ عمود باشد می‌نویسم $d_۱ \perp d_۲$ و اگر عمود نباشد می‌نویسیم $d_۱ \not\perp d_۲$.

- دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} b \perp a \\ c \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow b \parallel c$$

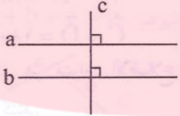


- دو خط موازی با یک خط خود، با هم موازی‌اند.



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \parallel c \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel c$$

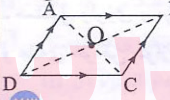
- اگر خطی بر یکی از خطوط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ c \perp a \end{array}\right\} \Rightarrow c \perp b$$

چهارضلعی‌ها:

متوازی‌الاضلاع: چهارضلعی که ضلع‌های روبروی آن با هم موازی باشند.



- در هر متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبرو با هم مساوی‌اند. $AD = BC$ و $AB = DC$

- در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبرو با هم مساوی‌اند. $\widehat{B} = \widehat{D}$ و $\widehat{A} = \widehat{C}$

- در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مجاور به یک ضلع با هم مکمل‌اند (یعنی مجموع آنها ۱۸۰° می‌شود)

$$\widehat{A} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \qquad \widehat{A} + \widehat{B} = ۱۸۰^\circ$$

$$\widehat{C} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ \qquad \widehat{B} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ$$

- در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می کنند.

$$AO = OC \quad , \quad BO = OD$$

- مستطیل ولوزی و مربع نوعی متوازی‌الاضلاع هستند و همه‌ی خواص متوازی‌الاضلاع را دارند.

مستطیل: متوازی‌الاضلاع است که زاویه قائمه داشته باشد.

لوزی: متوازی‌الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی داشته باشد.

مربع: متوازی‌الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و چهار زاویه قائمه داشته باشد.

ذوزنقه: چهار ضلعی است که فقط دو ضلع موازی دارد.

- در مستطیل قطرها با هم برابرند.
- در لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند.
- مربع همه خواص لوزی و مستطیل را دارد.

برای انجام کاشی‌کاری باید توجه نمود کاشی‌ها طوری کنار هم قرار بگیرند که روی هم نیفتند و جای خالی بین آن‌ها نباشد.

- برای آنکه با یک شکل منتظم بتوانیم کاشی‌کاری کنیم باید اندازه‌ی زاویه‌ی آن شکل منتظم شمارنده‌ی ۳۶۰ باشد مثلاً با ۴ضلعی منتظم یا شش ضلعی منتظم می‌توانیم کاشی‌کاری کنیم ولی با پنج‌ضلعی منتظم نمی‌توان همه صفحه را کاشی کاری نمود.

- با هر چهار ضلعی دلخواه می‌توانید کاشی‌کاری کنید.

زاویه‌های داخلی:

زاویه‌هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند زاویه‌های داخلی آن چند ضلعی نامیده می‌شوند تعداد زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی با تعداد ضلع‌هایش برابر است.

- مجموع زاویه های‌داخلی هر مثلث ۱۸۰° می‌باشد.

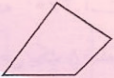
- مجموع زاویه‌های داخلی در هر n ضلعی از رابطه‌ی $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ به دست می‌آید.

- برای بدست آوردن اندازه‌ی زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم از رابطه زیر استفاده کنید.

$$\text{هر زاویه‌ی داخلی } n \text{ ضلعی منتظم} = \frac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$$

شکل‌های محدب و مقعر:

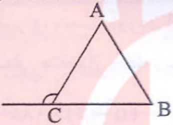
به چند ضلعی که همه زاویه‌های داخلی آن کم‌تر از 180° باشد چند ضلعی محدب گفته می‌شود اگر حداقل یکی از زاویه‌های آن بیشتر از 180° باشد به آن چند ضلعی مقعر می گویند.

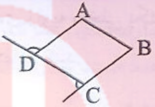


چهار ضلعی محدب

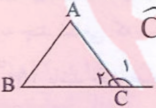
چهار ضلعی مقعر

زاویه‌های خارجی: با امتداد دادن هریک از ضلع‌های یک چند ضلعی محدب بین آن امتداد و ضلع های مجاورش یک زاویه بوجود می آید که به آن زاویه خارجی می گویند.





در هر مثلث اندازه‌ی زاویه خارجی هر راس برابر است با مجموع دو زاویه‌داخلی غیر مجاورش.



$$\widehat{C_1} = \widehat{A} + \widehat{B}$$

ـ مجموع زاویه‌های خارجی در هر n ضلعی محدب همیشه ۳۶۰° است به طور مثال مجموع زاویه‌های خارجی یک ۸ ضلعی محدب ۳۶۰° می‌باشد.

فصل چهارم

جبر و معادله: همانطور که در سال قبل یاد گرفتید برای بیان رابطه‌های ریاضی از عبارت‌های جبری استفاده می کنیم و به طور مثال مساحت مستطیل به طول x و عرض y را با xy نمایش می‌دهیم.

جمله جبری: هر جمله جبری از ضرب یک عدد در یک یا چند حرف (متغیر) تشکیل شده است.

$-۳ab$ ⟨ (۳-) قسمت عددی یا ضریب
ab قسمت حرفی یا متغییرها

جملات متشابه:

جمله‌هایی که حروف و توان‌های حروف آنها یکسان باشند متشابه نامیده می‌شود.

به طور مثال جملات $۵ab, -۲ba$ متشابه‌اند ولی جملات $۵a^۲b, ۳ab^۲$ متشابه نیست.

جمع و تفریق جملات متشابه: (ساده کردن عبارت‌های جبری)

برای جمع و تفریق دو یا چند جمله متشابه کافی است بخش‌های عددی ضرایب آن‌ها را با هم جمع ویا تفریق کنیم به طور مثال:

$$۷x - ۳y + ۹ - ۳x + ۲y = ۴x - y + ۹$$

ضرب عدد در یک جمله: برای ضرب یک عدد در یک جمله جبری، عدد را در قسمت عددی جمله (یعنی ضریب جمله) ضرب می کنیم مثال:

$$۲ \times (-۵ab) = -۱۰ab \,,$$

$$۱۸ \times \left(\frac{۵}{۶}ab\right) = ۱۵ab$$

ضرب یک عدد در یک عبارت جبری:

برای ضرب یک عدد در یک عبارت داخل پرانتز آن عدد را در تک تک جملات داخل پرانتز ضرب می کنیم.مثال: $-۳(۲a - ۷b) = -۶a + ۲۱b$

ضرب یک جمله در یک جمله:

برای ضرب یک جمله جبری در یک جمله جبری دیگر ابتدا قسمت عددی (ضرایب) را در یکدیگر ضرب می‌کنیم سپس قسمت‌های حرفی (متغیرها) را در هم ضرب می‌کنیم در صورتی که قسمت‌های حرفی یکسان باشد از قانون ضرب اعداد تواندار

با پایه‌های مساوی استفاده کرده و توان‌ها را جمع می کنیم.

مثال: $3xy \times 5x^2yz = 15x^3y^2z$

ضرب یک جمله در یک عبارت:

هنگام ضرب یک جمله در یک عبارت داخل پرانتز آن جمله را در تک‌تک جمله‌های داخل پرانتز ضرب می کنیم.

مثال:

$$3xy(2x^2 + 5y - 7)$$

$$= 6x^3y + 15xy^2 - 21xy$$

ضرب یک عبارت در یک عبارت (ضرب دو پرانتز) :

برای ضرب یک چند جمله‌ای در یک چند جمله‌ای دیگر می‌بایست هریک از جمله‌های پرانتز اول را در تک‌تک جمله‌های پرانتز دوم ضرب کرد و در صورت امکان ساده کنیم .

مثال: $(3x+2y)(5x-y)=$

$$=15x^2-3xy+10xy-2y^2$$

$$=15x^2+7xy-2y^2$$

پیدا کردن مقدار عددی یک عبارت جبری:

برای یافتن مقدار عددی یک عبارت جبری به ازای اعداد داده شده کافی است آن عدد را به جای حروف انگلیسی(متغیرها) قرار دهیم و سپس با رعایت اولویت انجام اعمال اصلی محاسبه را انجام می‌دهیم.

گسترده نویسی اعداد:

برای گسترده نویسی یک عدد طبیعی به ارقام آن به ترتیب از سمت راست در اعداد ۱ و ۱۰ و ۱۰۰ و ۱۰۰۰ و... ضرب می کنیم و حاصل را به صورت جمع می‌نویسیم .مانند:

$$2536=2\times1000+5\times100+3\times10+6$$

$\overline{ab}=10a+b$ $\quad$ $\overline{abc}=100a+10b+c$

- عدد دو رقمی را با نماد $\overline{ab}$ و مقلوب آن را با نماد $\overline{ba}$ نمایش می‌دهیم.

- همانطور که در ابتدای درس دیدید اگر m و n اعداد طبیعی باشند در این صورت اعداد زوج را با $2m$ یا $2n$ و اعداد فرد را با $2m-1$ یا $2n-1$ نمایش می‌دهیم.

تجزیه یک عبارت جبری: تبدیل یک عبارت جبری به ضرب را (تجزیه کردن) می گویند.

گاهی اوقات می‌توانیم جمع و تفریق دو یا چند جمله جبری را به ضرب یک جمله در یک پرانتز تبدیل کنیم. ب.م.م اعداد را پیدا می کنیم و سپس حروف مشترک با کم‌ترین توان را می‌نویسیم.

تا یک جمله تشکیل شود، آن را پشت پرانتز می‌نویسیم سپس مشخص می کنیم، این جمله در چه جمله‌ای ضرب شود تا هر کدام از جمله‌های عبارت اصلی ساخته شود.

(به بیان دیگر می‌توان تک‌تک جملات را بر جمله‌ی مشترک تقسیم نمود و داخل پرانتزنوشت)

مثال:

$$۶x^۲y + ۸xy^۲ = ۲xy(۳x + ۴y)$$

$$۱۵my + ۱۰mx = ۵m(۳y + ۲x)$$

کاربرد تجزیه:

یکی از مهمترین کاربرد تجزیه در ساده‌کردن های کسری است به دو مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱: عبارت مقابل را ساده کنید:

$$\frac{۱۳۹۳\times۲+۱۳۹۳\times۷}{۱۳۹۳\times۵-۱۳۹۳\times۲}=\frac{۱۳۹۳(۲+۷)}{۱۳۹۳(۵-۲)}$$

$$=\frac{۹}{۳}=۳$$

مثال ۲: مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $a=۱۳۹۳$ و $b=۱۳۹۴$ بیابید.

$$\frac{a^۲-ab}{ab-b^۲}=\frac{a(a-b)}{b(a-b)}=\frac{a}{b}=\frac{۱۳۹۳}{۱۳۹۴}$$

به توان رساندن یک پرانتز

مطابق تعریف اعداد توان‌دار برای به توان رساندن یک پرانتز آن را به تعداد توانش نوشته و ضرب می کنیم.

مثال:

$$(a+b)^۲ = (a+b)(a+b)$$
$$= a^۲ + ab + ba + b^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$
$$(a-b)^۲ = (a-b)(a-b)$$
$$= a^۲ - ab - ba - b^۲ = a^۲ - ۲ab - b^۲$$

معادله

یک تساوی جبری که به ازای بعضی از عددها برقرار می‌شود را معادله می‌نامیم.

حل معادله: برای حل معادله سه مرحله‌ی زیر (در فلش۳۶) را انجام می‌دهیم:

۱) جمله‌هایی که دارای مجهول است به یک سمت و جمله‌هایی که مجهول ندارند به سمت دیگر تساوی منتقل می کنیم (هنگام جابه‌جا کردن جمله‌ها از یک طرف تساوی به طرف دیگر باید علامت آن جمله را عوض کنیم)

۲) ساده کردن عبارت ها (هر طرف را به یک جمله تبدیل می کنیم)

۳) طرف معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم.

مجموع دو عدد فرد، زوج است

مجموع دو عدد زوج ، زوج است.

حاصل ضرب عددی زوج در عدد فرد، زوج است.

حاصل ضرب دو عدد زوج، زوج است.

- مجموع هر عدد دو رقمی با مقلوبش مضرب ۱۱می‌باشد: $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a$

$= 11a + 11b = 11(a + b)$

ـ تفاضل هر عدد دورقمی با مقلوبش مضرب ۹ می‌باشند: (با فرض $a > b$)

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a)$$

$$= 10a + b - 10b - a = 9a - 9b$$

$$= 9(a - b)$$

حل معادلات کسری:

اگر ضرایب جملات در یک معادله اعداد کسری بودند می‌توان دو طرف تساوی را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب کرد تا مخرج‌ها حذف شوند مثال:

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - x \Rightarrow$$

$$6 \times \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}\right) = 6 \times \left(\frac{1}{6} - x\right) \Rightarrow$$

$$9x - 2 = 1 - 6x \Rightarrow 9x + 6x = 1 + 2 \Rightarrow$$

$$15x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

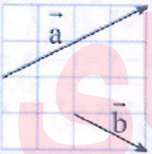
بردار و مختصات

تعریف بردار: هرپاره خط جهت دار را یک بردار می گویند، معمولاً از بردارها برای نمایش جابه‌جایی و یا نمایش نیروهای وارد بریک جسم استفاده می‌شود.

مختصات یک بردار را براساس میزان جابه‌جایی افقی یا عمودی که می‌تواند انجام دهد مشخص می کنند در این صورت حرکت به سمت بالا و راست را با علامت مثبت و حرکت به سمت چپ و پایین را با علامت منفی نشان می‌دهند.

$$\text{مختصات بردار} = \begin{bmatrix} \text{جابه جایی افقی} \\ \text{جابه جایی عمودی} \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$



- اگر دو یا چند بردار هم اندازه و هم راستا و هم جهت باشند، بردارهای مساوی هستند.

- بردارهای مساوی دارای مختصات مساوی هستند.

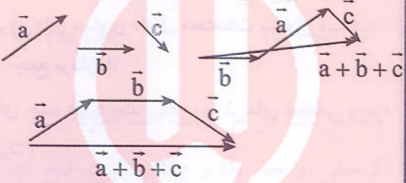
جمع بردارها:

برای جمع دو یا چند بردار ، روش‌های مختلفی وجود دارد:

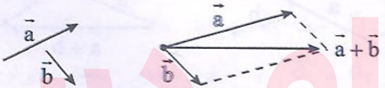
الف) روش مثلثی برای جمع دو بردار: در این روش ابتدا یکی از بردارها را رسم کرده و سپس برداری را مساوی با بردار دوم از انتهای آن رسم می کنیم سپس از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم وصل می کنیم تا بردار حاصل جمع به دست آید.

- ترتیب رسم بردارها در بردارپ حاصل جمع تغییری ایجاد نمی کند.

- این روش را برای چند بردار هم می‌توان انجام داد. مثال حاصل جمع ۳ بردار زیر را بیابید:



ب- روش متوازی‌الاضلاع برای جمع دو بردار: در این روش دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم و سپس یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهیم قطر متوازی‌الاضلاع که از مبدأ مشترک آنها رسم شود همان بردار حاصل جمع است.



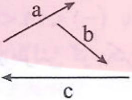
- برای یافتن مختصات بردار حاصل جمع دو بردار می‌توان مختصات آن دو بردار را با هم جمع کرد.

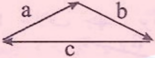
- در جمع و تفریق مختصاتی، طول‌ها را با هم و عرض‌ها را نیز با هم جمع و تفریق می‌کنیم.

- حاصل جمع هر بردار با قرینه‌اش بردار صفر می‌شود که آن را با $\vec{o}$ نمایش می‌دهیم.

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$$

- گاهی اوقات در جمع چندبردار که آنها را پشت سرهم رسم می‌کنیم انتهای آخرین بردار بر ابتدای اولین بردار منطبق می‌شود. در این صورت حاصل جمع این بردارها صفر می‌شود. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$

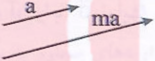




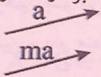
ضرب یک عدد در بردار: هنگامی که یک بردار مانند a را m برابر می‌کنیم برداری به دست می‌آید که هم‌راستا و موازی بردار اولیه و اندازه آن m برابر شده است.

در مورد بردار $m\vec{a}$ چهار حالت زیر برقرار است:

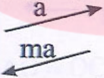
حالت اول: اگر m عددی بزرگتر از یک $(m > 1)$ باشد $m\vec{a}$ و هم جهت بردار $\vec{a}$ ولی طولش بزرگتر است.



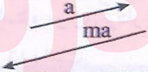
حالت دوم: اگر m عددی بین صفر و یک $(0 < m < 1)$ باشد، $m\vec{a}$ هم جهت بردار $\vec{a}$ ولی طولش کوچکتر است.



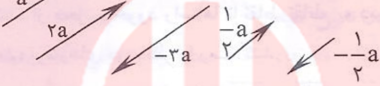
حالت سوم: اگر m عددی بین صفر و منفی یک $(-1 < m < 0)$ باشد، $m\vec{a}$ خلاف جهت بردار $\vec{a}$ و طولش کوچکتر است.



حالت چهارم: اگر m عددی کوچکتر از منفی یک $(m < -1)$ باشد، $m\vec{a}$ خلاف جهت بردار $\vec{a}$ و طولش بزرگتر است.



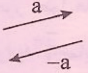
بطور مثال:



برای ضرب یک عدد در یک بردار آن عدد را هم در طول و هم در عرض مختصات آن بردار ضرب می کنیم :

$$۵\begin{bmatrix}-۲\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۰\\ ۱۵\end{bmatrix}$$

قرینه‌ی یک بردار، همان برداری است که در (۱−) ضرب شده است.



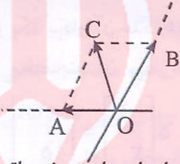
$$\vec{a}=\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}\Rightarrow -\vec{a}=-۱\times\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳\\ -۵\end{bmatrix}$$

تجزیه بردار روی محورها

برای تجزیه یک بردار روی دو راستای داده شده کافی است از انتهای آن بردار دو خط موازی

با راستاهای داده شده رسم کنیم تا دو راستا را قطع کند، از محل برخورد راستاها تا نقاط تقاطع به دست آمده بردارهای موردنظر را رسم کنید.

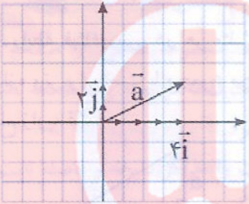
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$



بردارهای واحد مختصاتی (بردارهای یکه): بردار واحد محور طول‌ها را با $\vec{i}$ و بردار واحد محور عرض‌ها را با $\vec{j}$ نمایش می‌دهیم و مختصات آنها را به صورت مقابل است:

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad \vec{j} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

مختصات هر برداری را می‌توان برحسب بردارهای واحد مختصاتی ($\vec{i}$ و $\vec{j}$) نوشت برای این کار بردار را روی محورهای مختصاتی تجزیه می کنیم.



$$a = ۴i + ۲j$$

معادلات مختصاتی: گاهی در تساوی‌های مختصاتی برخی از مقدارها مجهول هستند، این معادلات را مانند معادلات معمولی حل کنید.

مثال:

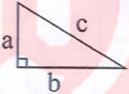
$$\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} + ۲x = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲x = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

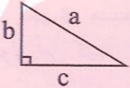
$$= \begin{bmatrix} -۶ \\ ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ \\ +۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ \\ +۲ \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -۴ \\ +۱ \end{bmatrix}$$

رابطه فیثاغورس: در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازه وتر برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع زاویه قائمه

$$c^2 = a^2 + b^2$$



$$a^2 = b^2 + c^2$$



- اگر اندازه سه ضلع مثلثی را در رابطه فیثاغورس قرار دهیم و تساوی برقرار باشد آن سه ضلع می‌توانند اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه باشند به بیان دیگر(اگر در یک مثلث مجذور اندازه ضلع بزرگتر مساوی باشدبا مجموع مجذورات دوضلع دیگر،آنگاه مثلث قائم‌الزاویه است)

شکل‌های هم نهشت: گر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) بر شکل دیگری منطبق کنیم می گوئیم این دو شکل هم نهشت هستند.

در دو شکل هم نهشت همه اجزاء متناظر باهم برابرند.

مثلث‌های هم نهشت: برای نشان دادن هم نهشتی دومثلث به جز عمل انطباق می‌توان از اطلاعات اندازه‌های ضلع و زاویه‌ها استفاده کرد.

برای این کار باید برقراری یکی از حالت‌های زیر را بررسی کرد:

الف) تساوی سه ضلع (ض ض ض)

ب) تساوی دوضلع و زاویه بین آن‌ها (ض ز ض)

ج) تساوی دو زاویه و ضلع بین آن‌ها (زض ز)

- با استفاده از هم نهشتی مثلث ها در حالت(ض ز ض) می‌توان نتیجه گرفت: (هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط تا دو سر آن به یک فاصله است)

هم‌نهشتی مثلث‌های قائم الزاویه: دو مثلث قائم الزاویه علاوه بر سه روش کلی، تساوی مثلثها در دو حالت زیر نیز هم نهشت هستند:

الف) برابری وتر و یک ضلع (وض)

ب) برابری وتر و یک زاویه تند (وز)

با استفاده از هم نهشتی دومثلث قائم‌الزاویه در حالت (وز) می‌توان فهمید (هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دوضلع آن زاویه به یک فاصله است)

فصل هفتم

توان جذر: برای جلوگیری از تکرار جمع از ضرب استفاده کنیم.

مثال: $۲+۲+۲+۲+۲=۵\times۲$

$a+a+a+a+a=۵a$

- برای جلوگیری از تکرار عمل ضرب از توان استفاده می‌شود. مثال: $۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۲^{۵}$

$a\times a\times a\times a\times a=a^{۵}$

- هر عددی به توان یک برسد، مساوی خودش است.

$a^1 = a$

- هرعددی (به جزصفر) به توان صفر برسد مساوی یک می‌شود.

$a^۰ = ۱ \qquad (a \neq ۰)$

- عدد یک به هر توانی برسد مساوی یک است

$۱^a = ۱$

- اگر عدد منفی درون پرانتز باشد و به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت خواهدشد.

مثال:

$(-۵)^۴ = (+۵)^۴ = ۶۲۵$

$(-a)^{\text{زوج}} = a^{\text{زوج}} \xrightarrow{\text{مثال}} (-a)^۲ = a^۲$

- اگر عدد منفی درون پرانتز باشد و به توان فرد برسد حاصل عددی منفی است.

مثال: $(-۵)^۳ = -۱۲۵$

ـ اگر عدد منفی داخل پرانتز نباشد به هر توانی برسد منفی است.

مثال $-۵^۳=-۱۲۵$ $\quad$ $-۵^۴=-۶۲۵$

ـ هنگامی که یک کسر را می‌خواهیم به توان برسانیم حتما باید آن را داخل پرانتز بنویسیم در غیر این حالت، توان فقط برای عدد صورت محاسبه می‌شود.

ـ اگر عددی بین صفر و یک باشد هرچه به توان بزرگتری برسد، حاصل کوچکتر می‌شود.

مثال: $\left(\frac{۲}{۳}\right)^۷ > \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۱۰}$

$$۰ < a < ۱ \Rightarrow a > a^۲ > a^۳ > a^۴ > \dots$$

ـ توان دوم هر عدد را مربع یا مجذور آن عدد می گویند. $a^۲ =$ مربع (مجذور) a

توان سوم هر عدد را مکعب آن عدد می گویند.

$a^۳ =$ مکعب a

ضرب و تقسیم اعداد تواندار:

اگر a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند داریم.

۱) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

۲) $a^n \times b^n = (ab)^n$

۳) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

۴) $a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$

- هرگاه بخواهیم عددی توان‌دار را به توان دیگری برسانیم کافیست توان‌ها را دریکدیگر ضرب کنیم.

$$(a^m)^n = a^{m.n} \xrightarrow{\text{مثال}} (۳^۵)^۲ = ۳^{۱۰}$$

برای پاسخ دادن به بعضی از سوالات به صورت تواندار گاهی اوقات باید پایه‌ی اعداد تواندار را تجزیه کنیم.

مثال: $۱۶^{۳} \times ۳۲^{۷} = (۲^{۴})^{۳} \times (۲^{۵})^{۷}$

$= ۲^{۱۲} \times ۲^{۳۵} = ۲^{۴۷}$

ـ اگر در صورت و مخرج یک کسر با اعداد تواندار فقط علامت ضرب داشتیم می‌توانیم اعداد صورت و مخرج را در صورت امکان ساده کنیم.

مثال:

$$\frac{۵^{۷} \times ۳^{۸}}{۳^{۶} \times ۵^{۵}} = ۵^{۲} \times ۳^{۲} = ۱۵^{۲}$$

$$\frac{۳^{۷} \times ۵^{۱۳}}{۱۵^{۷}} = \frac{۳^{۷} \times ۵^{۷} \times ۵^{۶}}{۳^{۷} \times ۵^{۷}} = ۵^{۶}$$

مفهوم ریشه دوم و جذر: سال گذشته آموختید که اعداد ۵+,۵- ریشه‌های دوم عدد۲۵ هستند و همچنین با علامت $\sqrt{\ }$ آشنا شدید و دانستید $\sqrt{۲۵} = ۵$ یعنی علامت رادیکال ریشه دوم مثبت عدد را نشان می‌دهد.

جذر تقریبی:

الف) محاسبه جذر تقریبی تا یک رقم اعشار:

فرض کنید می‌خواهیم مقدار $\sqrt{۳۴}$ را تا یک رقم اعشار حساب کنیم، دو گام زیر را انجام می‌دهیم:

گام اول: باید مشخص کنیم که جذر عدد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد مثلا $\sqrt{۳۴}$ بین دو عدد ۵ و ۶ قرار دارد $\sqrt{۲۵} < \sqrt{۳۴} < \sqrt{۳۶}$

گام دوم: فاصله بین ۵ و ۶ را نصف می کنیم تا عدد ۵/۵ به دست بیابد با توجه به اینکه $(۵/۵)^۲ = ۳۰/۲۵$ پس حتماً جذر ۳۴ از عدد ۵/۵ بزرگتر است.

با محاسبه مقادیر

$$(۵/۹)^۲, (۵/۸)^۲, (۵/۷)^۲, (۵/۶)^۲$$

در جدول مقدار تقریبی $\sqrt{۳۴}$ را در می‌یابیم.

عدد	۵ / ۶	۵ / ۷	۵ / ۸	۵ / ۹
مجذور	۳۱ / ۳۶	۳۲ / ۴۹	۳۳ / ۶۴	۳۴ / ۸۱

$$\Rightarrow \sqrt{۳۴} \simeq ۵/۸$$

ب) محاسبه جذر تقریبی تا دو رقم اعشار: حالا فرض کنید بخواهیم $\sqrt{۳۴}$ را تا دو رقم اعشار حساب کنیم پس از انجام مراحل بالا و تشخیص اینکه $۵/۸ < \sqrt{۳۴} < ۵/۹$ بار دیگر فاصله ۵/۸۰ تا ۵/۹۰ نصف می‌کنیم و عدد ۵/۸۵ را بدست می‌آوریم با توجه به اینکه:

$$(۵/۸۵)^{۲} = ۳۴/۲۳۲۵$$

نتیجه می گیریم $\sqrt{۳۴}$ کمتر از ۵/۸۵ می‌باشد و با محاسبهٔ:

$$(۵/۸۱)^{۲}, (۵/۸۲)^{۲}, (۵/۸۳)^{۲}, (۵/۸۴)^{۲}$$

در جدول زیر مقدار تقریبی $\sqrt{۳۴}$ را تا دو رقم اعشار را می‌نویسیم.

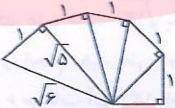
عدد	۵/۸۱	۵/۸۲	۵/۸۳	۵/۸۴
مجذور	۳۳/۷۵۶۱	۳۳/۸۷۲۴	۳۳/۹۸۸۹	۳۴/۱۰۵۶

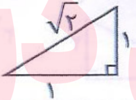
$$\sqrt{۳۴} \simeq ۵/۸۳$$

ساخت اعداد رادیکالی با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه:

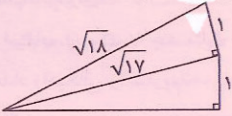
با استفاده از یک یا چند مثلث قائم‌الزاویه می‌توانیم اعداد رادیکالی را بسازیم.

مثال:



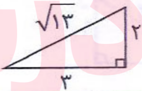


- برای ساختن اعداد بزرگ، بهتر است ابتدا عددی را که قبل از عدد موردنظر ما دارای جذر طبیعی است پیدا کنیم و جذر آن را به عنوان یکی از ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه در نظر بگیریم و ضلع دیگر را یک در نظر بگیریم آنگاه یک واحد، یک واحد، بالاتر برویم تا به اندازه موردنظر برسیم مثلاً برای ساختن $\sqrt{۱۸}$ از عدد ۴ شروع می‌کنیم.



- گاهی برای ساختن یک عدد مانند $\sqrt{۱۳}$ با یک مرحله می‌توانید این کار را انجام دهید یعنی دو عدد طبیعی پیدا کنید که مجموع مربعات آنها ۱۳ باشد.

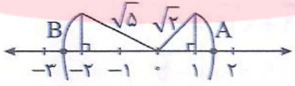
$$۳^۲ + ۲^۲ = ۱۳$$

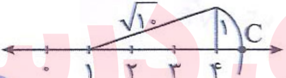


نمایش اعداد رادیکالی روی محور: برای نمایش یک عدد رادیکالی روی محور ابتدا با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه عدد رادیکالی را می‌سازیم سپس دهانه پرگار را به اندازه آن باز می کنیم و از نقطه صفر یک کمان می‌زنیم تا محل عدد رادیکالی را روی محور نمایش دهیم.

اگر رادیکال مثبت بود به سمت مثبت‌ها کمان می‌زنیم و اگر رادیکال منفی بود به سمت منفی ها کمان می‌زنیم. مثال

$A = \sqrt{۲}$ $\qquad$ $B = -\sqrt{۵}$





$c = ۱ + \sqrt{۱۰}$

خواص ضرب و تقسیم رادیکال‌ها:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt{۲} \times \sqrt{۱۸} = \sqrt{۳۶} = ۶$$

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\xrightarrow{\text{مثال}} \sqrt{۱۸} \div \sqrt{۲} = \sqrt{۱۸} = \sqrt{۹} = ۳$$

دقت کنید که جمع و تفریق رادیکال‌ها این خاصیت را ندارند.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

مثال: $\sqrt{۹} + \sqrt{۱۶} \neq \sqrt{۹+۱۶}$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

مثال: $\sqrt{۷} - \sqrt{۳} \neq \sqrt{۴}$

داده‌ها: به اطلاعات عددی که مسئله به شما می‌دهد و یا شما آنها را جمع آوری می کنید «داده‌ها» یا «داده‌های آماری» می گویند.

علم آمار: به علم جمع‌آوری دسته بندی و تحلیل و تفسیر داده‌ها علم آمار می گویند.

محدوده‌ای از اعداد : گاهی در ریاضی از نماد $(\ldots < x \leq \ldots)$ و یا $(\ldots < x < \ldots)$ استفاده می‌شود که ۴ دسته زیرا را یاد بگیرید.

الف) $۲ < x < ۷$ (یعنی اعداد بین ۲ و ۷ بدون خود آنها)

ب) $۲ < x \leq ۷$ (یعنی اعداد بین ۲ و ۷ با خود ۷ بدون ۲)

ج) $۲ \leq x < ۷$ (یعنی اعداد بین ۲ و ۷ با خود عدد ۲ و بدون ۷)

د) $۲ \leq x \leq ۷$ (یعنی اعداد بین ۲ و ۷ با خود آنها)

دامنه تغییرات: به اختلاف کم‌ترین و بیش‌ترین داده‌های آماری دامنه تغییرات می گویند.

کوچک ترین داده − بزرگترین داده =r دامنه تغییرات

دسته بندی داده‌ها:

اگر تعداد داده‌ها جمع آوری شده در عمل آمارگیری زیاد باشند بررسی آنها طولانی و غیرمفید می‌شود به همین دلیل داده‌ها را دسته‌بندی می کنند برای این کار ۴ مرحله زیر را به ترتیب انجام دهید:

۱ـ بزرگ‌ترین و کوچکترین داده را مشخص کنید.

۲ـ دامنه تغییرات را محاسبه کنید.

۳ـ با توجه به تعداد دسته‌ها که خودتان یا مسئله مشخص می کند طول دسته‌ها را از رابطه زیر بیابید:

$$\text{طول هر دسته} = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}}$$

۴ـ فراوانی هر دسته را با استفاده از چوب خط زدن تعیین کنید.
(تعداد داده‌های هر دسته را فراوانی آن دسته می گویند)
پس از اینکه داده‌های آماری در جدول سازماندهی می‌شوند به کمک نمودارها درک بهتری از داده‌ها به دست می‌آید.
ـ انواع نمودارها: ۱ـ ستونی ۲ـ خط شکسته ۳ـ میله‌ای ۴ـ تصویری ۵ـ دایره‌ای
میانگین داده‌ها: برای محاسبه میانگین چند عدد کافی است مجموع آن‌ها (s) را بر تعداد آنها (n) تقسیم کنید تا میانگین $(\overline{x})$ به دست آید.

$$\overline{x} = \frac{s}{n}$$

برای داده‌های دسته‌بندی شده با استفاده از رابطه فلش ۶۲ میانگین را محاسبه کنید:

$$\frac{\text{مجموع (فراوانی × متوسط)}}{\text{تعداد کل داده‌ها}} = \text{میانگین داده‌های دسته بندی شده}$$

- در روش بالا شاید میانگین محاسبه شده با میانگین واقعی متفاوت باشد اما معمولاً مقدار محاسبه شده دارای دقت خوبی است.

احتمال یا اندازه‌گیری شانس: برای محاسبه احتمال رخ دادن یک اتفاق از رابطه زیر استفاده کنید:

$$\frac{\text{تعداد حالتهای مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات ممکن}} = \text{احتمال رخ دادن یک اتفاق}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

- مجموع احتمال رخ دادن یک اتفاق و احتمال رخ ندادن همان اتفاق همواره یک است.

- برای نوشتن کل حالت‌های یک رویداد از دو روش: ۱)جدول نظام‌دار
۲) نمودار درختی می‌توان استفاده کرد.

تعریف دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که همگی آنها از یک نقطه ثابت به یک فاصله باشند، دایره نامیده می‌شود.

این نقطه ثابت را «مرکز دایره» و فاصله ثابت را «شعاع دایره» می گویند.

معمولا برای نام گذاری دایره از حرف C و برای نام‌گذاری مرکز از حرف O و برای نام‌گذاری شعاع از حرف R یا r استفاده می‌شود.

کمان: به قسمتی از محیط دایره که بین دو نقطه محدود شده است کمان می گویند کمان را می‌توان با دو حرف یا چند حرف نشان داد مانند $\overset{\frown}{AC}$ و یا $\overset{\frown}{AB}$ و یا $\overset{\frown}{ABC}$ وقتی کمانی را با دو حرف نشان می‌دهند منظور کمان کوچک‌تر بین دو نقطه است.

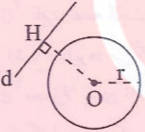
وضعیت خط دایره:

خط و دایره نسبت به هم سه وضعیت دارند:

۱ـ خط و دایره هیچ نقطه مشترک ندارند

فاصله خط تا مرکز دایره بزرگتر از شعاع دایره است

$r \langle oH$



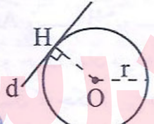
۲ـ خط و دایره یک نقطه مشترک دارند.

فاصله خط تا مرکز دایره، با شعاع دایره مساوی است

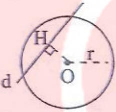
در این حالت خط بر دایره مماس است

شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است

$r = oH$

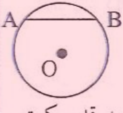


۳ـ خط و دایره دو نقطه مشترک دارند.
فاصله خط تا مرکز دایره کوچک‌تر از شعاع دایره است.



$r > oH$

وتر یک دایره: پاره‌خطی که دو نقطه از یک دایره را به هم وصل می کند، وتر نامیده می‌شود.
- بزرگترین وتر دایره قطر دایره است.



وتر $= \overline{AB}$

ـ فاصله وترها تا مرکز دایره هرچه قدر کمتر باشد آن وتر بزرگتر است.

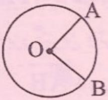
عمودمنصف هر وتر دلخواه از دایره از مرکز دایره می گذرد.

ـ خطی که از مرکز دایره بگذرد و بر وتری از دایره عمود باشد ،آن وتر را نصف می کند.

ـ خطی که از مرکز دایره بگذرد و وتری از دایره را نصف کند حتماً برآن وتر عمود است.

ـ ازیک نقطه خارج دایره می‌توان دو مماس برآن رسم کرد و طول این دو مماس همیشه مساوی است.

زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای است که راس آن روی مرکز دایره و ضلع‌های آن شعاع‌دایره هستند.



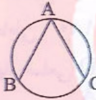
$\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$ مرکزی است

ـ اندازه هر زاویه مرکزی مساوی است با کمان مقابلش

ـ در یک دایره کمان‌های نظیر (روبه‌رو) به وترهای مساوی با هم مساوی‌اند.

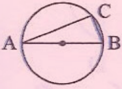
ـ در یک دایره وترهای نظیر (روبه‌رو) به کمان‌های مساوی با هم مساوی‌اند.

زاویه محاطی: زاویه ای است که راس آن روی محیط دایره قرار دارد و ضلع‌هایش دو وتر از دایره‌اند.



اندازه زاویهٔ محاطی نصف کمان روبروی آن است.

$\widehat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$ محاطی است



اندازه هر زاویه محاطی روبه رو به قطر همواره ۹۰° می‌باشد.

$\widehat{C} = ۹۰^\circ$

ـ در یک دایره زاویه‌های محاطی مقابل به یک کمان با هم برابرند.

$\widehat{D} = \widehat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

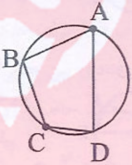
محیط یک دایره بر حسب درجه ۳۶۰° می‌باشد.

ـ اگر چهار راس یک چهارضلعی روی محیط یک دایره باشد به آن چهارضلعی محاطی می گویند. و مجموع هر دو زاویه‌ی مقابل در یک چهار ضلعی محاطی ۱۸۰° می‌باشد.

چهار ضلعی ABCD محاطی است

$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰°$

$\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰°$



ـ اگر در یک دایره یک زاویه محاطی و یک زاویه مرکزی روبه رو به یک کمان باشند.

اندازه زاویه مرکزی دو برابر اندازه زاویه محاطی است.

$\hat{O}_۱ = ۲\hat{C}$