به نام خدا

نکات فصل ۵ بردار ها — ریاضی هشتم

نکته اول

مختصات بردار یا نقطه به طول x و عرض y را به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ یا (x و y) و یا $\left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ نمایش می دهند.

مثال اول:

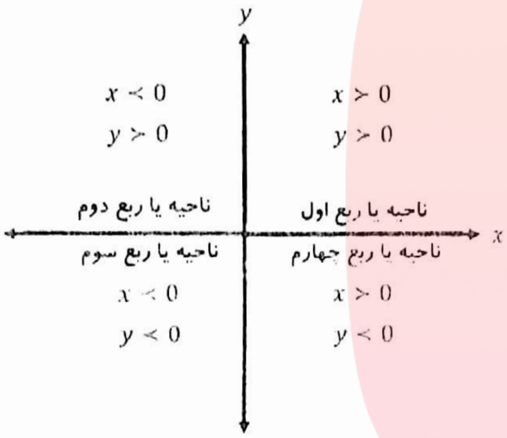
نقطه $A=\begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix}$ یا $A=(۳ \text{ و } -۴)$ و یا $A=\left| \begin{matrix} ۳ \\ -۴ \end{matrix} \right.$

مثال دوم:

بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix} -۷ \\ ۳ \end{bmatrix}$ یا $\vec{a}=(-۷ \text{ و } ۳)$ و یا $\vec{a}=\left| \begin{matrix} -۷ \\ ۳ \end{matrix} \right.$

نکته دوم

نمایش دستگاه مختصاتی



مثال:

نقطه ی $M=\begin{bmatrix} a^۲+۱ \\ a-۳ \end{bmatrix}$ در کدام ناحیه ی مختصاتی نمی تواند قرار بگیرد؟

پاسخ:

چون $a^۲$ مثبت است پس اگر با ۱ جمع شود باز هم مثبت است $a^۲+۱>0$ و $a-۳$ هم می تواند منفی و هم مثبت باشد پس نقطه ی M در نواحی ۱ و ۴ می تواند باشد ولی در ناحیه ۲ و ۳ نمی تواند باشد.

نکته سوم

هر نقطه که روی محور طول ها باشد دارای عرض صفر است .

هر بردار که موازی محور طول ها یا روی محور طول ها باشد دارای عرض صفر است.

هر برداری که عمود بر محور عرض ها باشد دارای عرض صفر است .

مثال:

مقدار m را طوری تعیین کنید که بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix} ۳m-۱ \\ \frac{۲m+۱}{۲} \end{bmatrix}$ موازی محور طول ها باشد.

پاسخ:

$$\frac{۲m+۱}{۲}=0 \Rightarrow ۲m+۱=0 \Rightarrow ۲m=-۱ \Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}$$

نکته چهارم

هر نقطه که روی محور عرض ها باشد دارای طول صفر است .

هر بردار که موازی محور عرض ها یا روی محور عرض ها باشد دارای طول صفر است.

هر برداری که عمود بر محور طول ها باشد دارای طول صفر است .

مثال:

مقدار m را طوری تعیین کنید که بردار $\vec{b}=\begin{bmatrix}4m-1\\ \frac{m+1}{2}\end{bmatrix}$ موازی محور طول ها باشد.

پاسخ: $4m-1=0 \Rightarrow 4m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{4}$

نکته پنجم

هر نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم باشد دارای طول و عرض برابر است .

هر بردار که موازی نیمساز ربع اول و سوم یا روی نیمساز ربع اول و سوم باشد دارای طول و عرض برابر است .

هر بردار که عمود بر نیمساز ربع دوم و چهارم باشد دارای طول و عرض برابر است .

مثال:

اگر نقطه ی $M=\begin{bmatrix}6m-1\\ \frac{m+1}{2}\end{bmatrix}$ روی نیمساز ربع اول و سوم باشد، مقدار M را بدست آورید.

پاسخ: $6m-1=\frac{m+1}{2} \Rightarrow 12m-2=m+1 \Rightarrow 12m-m=2+1 \Rightarrow 11m=3 \Rightarrow m=\frac{3}{11}$

نکته ششم

هر نقطه روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد دارای طول و عرض قرینه است .

هر بردار که موازی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد طول و عرض قرینه یکدیگرند .

هر بردار که عمود بر نیمساز ربع اول و سوم باشد طول و عرض قرینه یکدیگرند .

مثال:

مقدار n را طوری تعیین کنید که بردار $\vec{c}=\begin{bmatrix}3n-2\\ -2n+3\end{bmatrix}$ موازی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

پاسخ: $3n-2=-(-2n+3) \Rightarrow 3n-2=2n-3 \Rightarrow 3n-2n=2-3 \Rightarrow n=-1$

نکته هفتم

قرینه نقطه ی M به مختصات فرضی $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ یا بردار $\vec{m}$ مختصات $\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ به حالت های مختلف به صورت زیر نمایش می دهند.

$M=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول ها}}\begin{bmatrix}x\\ -y\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{m}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول ها}}\begin{bmatrix}a\\ -b\end{bmatrix}$

$M=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض ها}}\begin{bmatrix}-x\\ y\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{m}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض ها}}\begin{bmatrix}-a\\ b\end{bmatrix}$

$M=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدا مختصات}}\begin{bmatrix}-x\\ -y\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{m}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدا مختصات}}\begin{bmatrix}-a\\ -b\end{bmatrix}$

$M=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم}}\begin{bmatrix}y\\ x\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{m}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم}}\begin{bmatrix}b\\ a\end{bmatrix}$

$M=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم}}\begin{bmatrix}-y\\ -x\end{bmatrix}$ $\qquad$ $\vec{m}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم}}\begin{bmatrix}-b\\ -a\end{bmatrix}$

نکته هشتم

قرینه نقطه ی $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ نسبت به نقطه ی $\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ نقطه ی $\begin{bmatrix}2a-x\\ 2b-y\end{bmatrix}$ است.

مثال اول:

قرینه نقطه ی $\begin{bmatrix}-3\\ 4\end{bmatrix}$ نسبت به نقطه ی $\begin{bmatrix}5\\ -2\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

پاسخ: $\begin{bmatrix}2\times5-(-3)\\ 2\times(-2)-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\ -8\end{bmatrix}$

مثال ۲:

مقدار a و b را چنان تعیین کنید که دو بردار $\begin{bmatrix} -۵ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۲a-۱ \\ ۳b+۲ \end{bmatrix}$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم قرینه یکدیگر باشند.

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} ۲a-۱ \\ ۳b+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ \\ ۴ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} ۲a-۱=-۴ \Rightarrow ۲a=-۴+۱ \Rightarrow ۲a=-۳ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲} \\ ۳b+۲=۵ \Rightarrow ۳b=۵-۲ \Rightarrow ۳b=۳ \Rightarrow b=\frac{۳}{۳}=۱ \Rightarrow b=۱ \end{cases}$$

نکته نهم

اگر نقطه ی $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و نقطه ی $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ مختصات دو سر پاره خط AB باشند مختصات نقطه M وسط این پاره خط از رابطه ی مقابل بدست می آید.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{a+x}{۲} \\ \frac{b+y}{۲} \end{bmatrix}$$

مثال:

اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۸ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۶ \end{bmatrix}$ باشد مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را بدست آورید.

پاسخ:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{۵+(-۳)}{۲} \\ \frac{-۸+۶}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

نکته دهم

اگر مختصات $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ مختصات دو سر بردار $\overrightarrow{AB}$ باشد ،اندازه (طول) بردار از رابطه زیر بدست می آید.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a-x)^۲+(b-y)^۲}$$

مثال:

اگر نقاط $M = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$ و $N = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ابتدا و انتهای بردار $\overrightarrow{MN}$ باشند اندازه $\overrightarrow{MN}$ را حساب کنید.

پاسخ:

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(۶-(-۲))^۲+(۰-۶)^۲} = \sqrt{۶۴+۳۶} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

نکته یازدهم

شرط این که دو بردار موازی هم باشند این است که نسبت طول و عرض دو بردار برابر باشد.

دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ موازیند هر گاه :

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

مثال:

مقدار m چه عددی باشد تا دو بردار $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۸ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۶ \\ m-۱ \end{bmatrix}$ موازی باشند؟

پاسخ:

$$\frac{-۶}{m-۱} = \frac{۴}{۸} \Rightarrow ۴m-۴=-۴۸ \Rightarrow ۴m=-۴۸+۴=-۴۴ \Rightarrow m=\frac{-۴۴}{۴} \Rightarrow m=-۱۱$$

نکته دوازدهم

شرط عمود بودن دوبردار این است که مجموع حاصل ضرب طول ها با حاصل ضرب عرض های دو بردار مساوی صفر شوند .

دو بردار $\vec{m} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ بر هم عمودند هرگاه:

$$ax + by = 0 \Leftrightarrow \vec{m} \perp \vec{n}$$

مثال:

مقدار x را طوری تعیین کنید که دو بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}۳m-۱\\-۲\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}۴\\m+۱\end{bmatrix}$ برهم عمود باشند.

پاسخ:

$$۴(۳m-۱)-۲(m+۱)=۰$$

$$۱۲m-۴-۲m-۲=۰$$

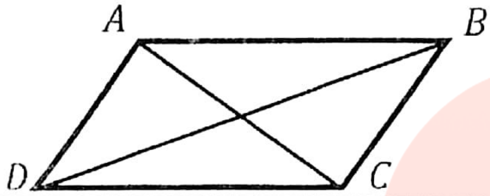
$$۱۲m-۲m=۴+۲$$

$$m=۶$$

$$m=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow m=\frac{۳}{۵}$$

نکته سیزدهم

درهر متوازی الاضلاع مجموع مختصات نقاط روی دو سر قطر ها باهم برابرند.



$$x_A+x_C=x_B+x_D$$

$$y_A+y_C=y_B+y_D$$

مثال:

اگر $A\begin{vmatrix}-۱\\۲\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۳\\۴\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۲\\۰\end{vmatrix}$ مختصات سه راس متوازی الاضلاع ABCD باشد مختصات نقطه D را بدست آورید.

پاسخ:

$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow -۱+۲=۳+x_D\to x_D=-۲$$

$$y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow ۲+0=۴+y_D\to y_D=۲-۴=-۲\to y_D=-۲$$

پس مختصات نقطه $D=\begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix}$ است.

نکته چهاردهم

با داشتن مختصات دو سر بردار $\overrightarrow{AB}$ میتوان مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ را از رابطه زیر بدست آورد.

$$\overrightarrow{AB}=B-A$$

مثال:

در صورتی که $A\begin{vmatrix}-۳\\-۱\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۴\\-۲\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}۵\\۲\end{vmatrix}$ باشند حاصل $۴\overrightarrow{AB}-۷\overrightarrow{BC}$ را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بدست آورید.

پاسخ:

$$۴\overrightarrow{AB}-۷\overrightarrow{BC}=۴(B-A)-۷(C-B)=۴(\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۳\\-۱\end{bmatrix})-۷(\begin{bmatrix}۵\\۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴\\-۲\end{bmatrix})=$$

$$۴\begin{bmatrix}۷\\-۱\end{bmatrix}-۷\begin{bmatrix}۱\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۸\\-۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۷\\-۲۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۱\\-۳۲\end{bmatrix}$$

نکته پانزدهم

دو بردار را قرینه یکدیگر گویند هر گاه طول ها قرینه هم وعرض ها نیز قرینه ی یکدیگر باشند.

مثال:

m و n راطوری پیدا کنید که دوبردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}۳m\\n-۱\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}-۴m+۳\\-۲n\end{bmatrix}$ قرینه یکدیگر باشند.

پاسخ:

$$-۴m+۳=-۳m\to -۴m+۳m=-۳\to -۱m=-۳\to m=۳$$

$$n-۱=۲n\to n-۲n=۱\to -۱n=۱\to n=-۱$$