



ریاضی هفتم

فصل ششم:

سطح و حجم

شکل های سه بعدی



کتابچه در این فصل به آموزیب:

✓ شکل ها یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی چه ویژگی های دارند؟

✓ حجم ها هندسی و غیر هندسی چه تفاوتی دارند؟

✓ اجزای حجم ها منشوری چیست؟ فرمول به دست آوردن تعدادش چیست؟

✓ تفاوت مساحت جانبی با مساحت کل چیست؟

✓ چگونه حجم و مساحت منشور و استوانه را به دست آوریم؟

✓ گسترده شکل ها چیست؟

✓ حجم ها از زوایای مختلف چگونه دیده می شوند؟

مای درسی

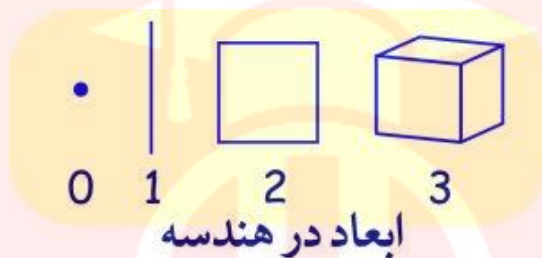
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

درس اول: حجم‌های هندسی

بخش ۱: بعد در هندسه

❖ در هندسه هر شکل می‌تونه ابعاد مختلفی داشته باشه:



❖ نقطه هیچ بعدی نداره. خط یه بعد داره. صفحه دو بعد داره و جسم‌هایی که اطراف ما هستند سه بعد دارند.

ما در این فصل قراره در مورد شکل‌های سه بعدی صحبت کنیم که بهشون می‌گیم: **حجم**.

بخش ۲: حجم‌های هندسی

❖ به صورت کلی حجم‌ها دو دسته دارند:

(۱) حجم‌های غیر هندسی:

(۲) حجم‌های هندسی:

❖ حجم‌های هندسی خودشون چهار دسته اند:

(۱) کره:

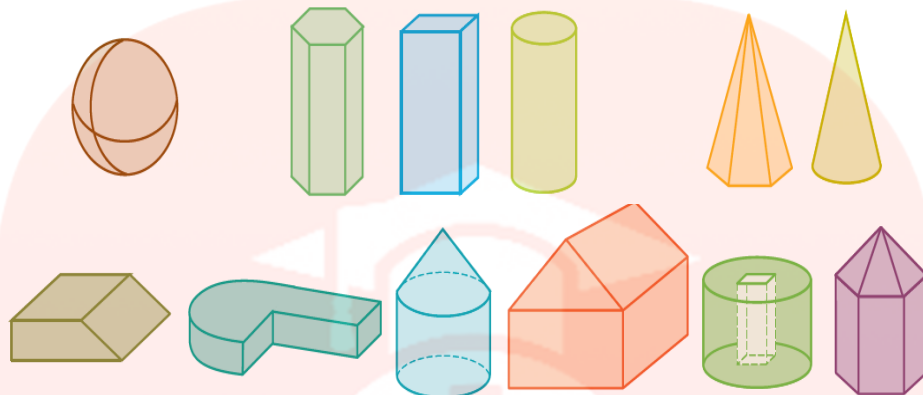
(۲) منشوری:

(۳) هرمی:

(۴) ترکیبی:

مای دارس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

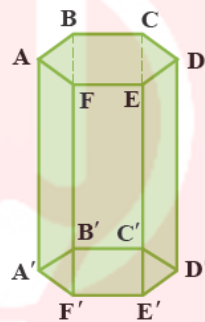
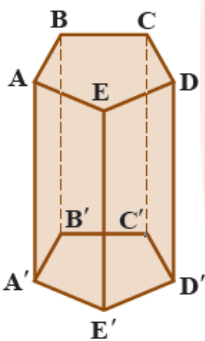
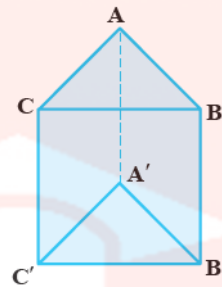
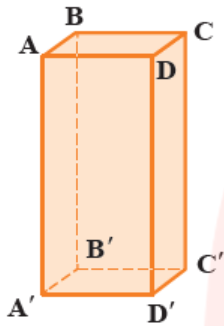


بخش ۳: اجزای حجم‌های منشوری

❖ حجم‌های منشور با توجه به تعداد پهلوها نام‌گذاری می‌شوند. مثال:

- ✓ به سطح‌های موازی و هم‌نهشت در منشور می‌گوییم. هر منشور قاعده دارد.
- ✓ تعداد اضلاع قاعده یک منشور n پهلو است.
- ✓ به سطح‌های اطراف منشور می‌گوییم. این سطح‌ها معمولا به شکل و گاهی هستند.
- ✓ به محل برخورد سطح‌ها می‌گوییم.
- ✓ یک منشور n پهلو یال دارد. مثال:
- ✓ به محل برخورد یال‌ها می‌گوییم.
- ✓ یک منشور n پهلو راس دارد.
- ✓ یک منشور n پهلو وجه دارد.

مثال ۱:

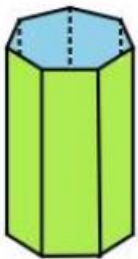


مثال ۲: در یک منشور ۱۰ پهلو تعداد راس‌ها، تعداد یال‌ها و تعداد وجه‌ها را بیابید.

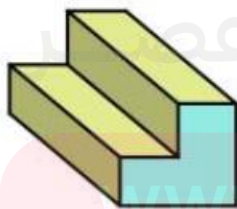
مثال ۳: یک منشور دارای ۱۸ یال است. تعداد راس‌های آن را بیابید.

مثال ۴: یک منشور دارای ۲۲ راس است. تعداد یال‌های آن را بیابید.

مثال ۵: در هر یک از شکل‌های زیر تعداد وجه‌های جانبی، راس‌ها و یال‌ها را بیابید.



الف

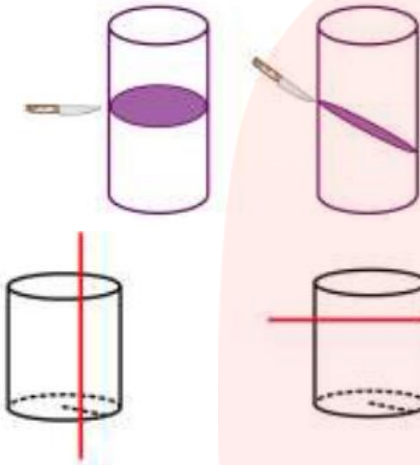


ب

بخش ۴: مقطع زدن

❖ وقتی به شکل سه بعدی رو با یک صفحه قطع کنیم، به این کار مقطع زدن میگویند و به اون سطح ایجاد شده، سطح مقطع گفته می‌شود.

مثال ۱: سطح مقطع یک استوانه چه شکلهایی می‌تواند باشد؟



مثال ۲: مقطع یک کره چیست؟

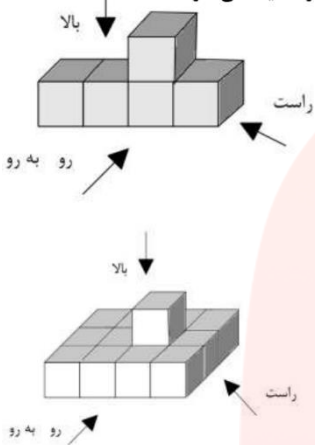
مثال ۳: مقطع یک مکعب چه چیزهایی می‌تواند باشد؟



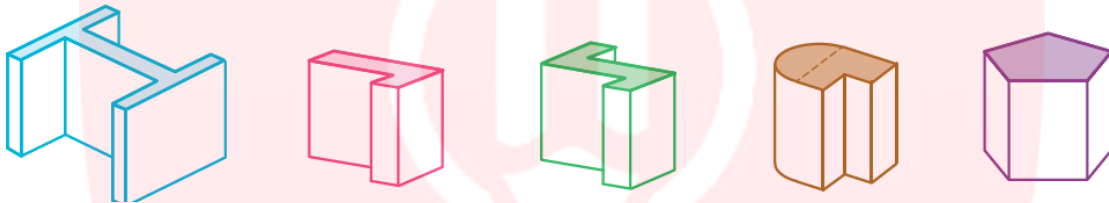
نکته: اکثراً منظور از مقطع منشور مقطعی است که با قاعده‌ها موازی است.

مثال ۴: هر کدام از حجم‌های رسم شده از جهت‌های مختلف به چه شکل دیده می‌شوند؟ رسم کنید.

www.my-dars.ir



مثال ۵: هر کدام از منشورها از بالا به چه شکلی دیده می‌شوند؟ رسم کنید.



مثال ۶: مقطع هر کدام از منشورهای زیر را رسم کنید.

ب: یک مکعب درون استوانه

الف: یک منشور شش پهلوی

مای دارس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

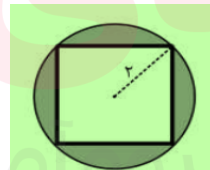
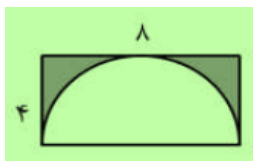
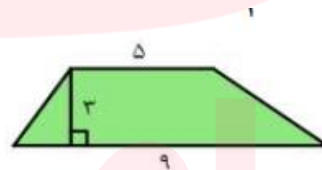
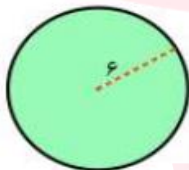
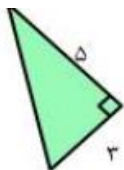
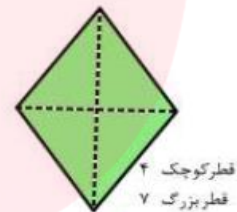
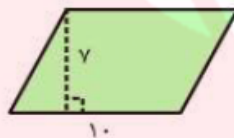
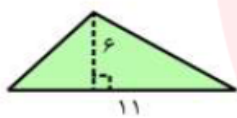
درس دوم: محاسبه حجم‌های منشوری

بخش ۱: یادآوری

❖ از اونجایی که در این فصل از فرمول‌های مساحت که در دوران دبستان خوندید زیاد استفاده میکنیم، خوبه که فرمولا رو یادآوری کنیم. ضمنا مساحت رو در ریاضی همیشه با S نشون می‌دیم.

- مساحت مربع: مساحت مثلث: مساحت مستطیل:
- مساحت لوزی: مساحت متوازی الاضلاع: مساحت ذوزنقه:
- مساحت دایره:

مثال ۱: مساحت شکل‌های زیر را به دست‌آورید.



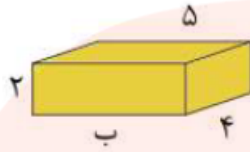
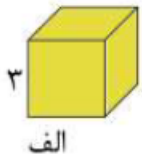
❖ فرمول محاسبه حجم مکعب و مکعب مستطیل رو هم از قبل میدونید. حجم رو در ریاضی همیشه با V نشون میدیم.

www.my-dars.ir

حجم مکعب مستطیل:

حجم مکعب:

مثال ۲: حجم شکل‌های رو به رو را به دست آورید.

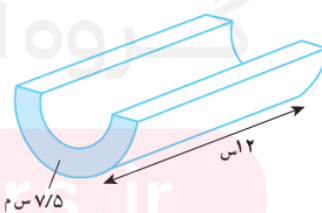
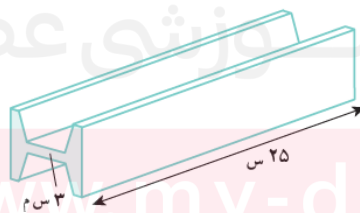
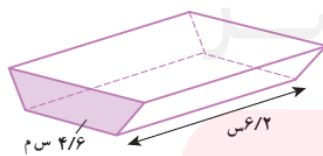
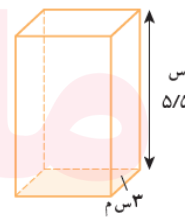
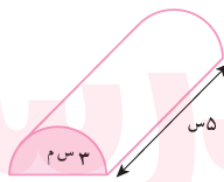
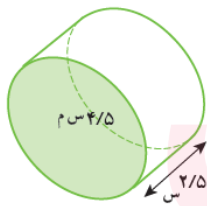
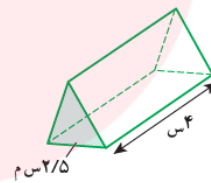
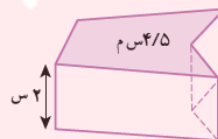
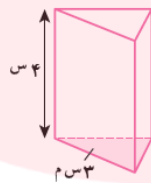
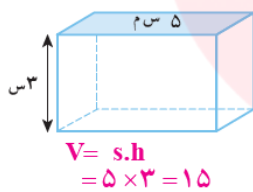


بخش ۲: محاسبه حجم منشور و استوانه

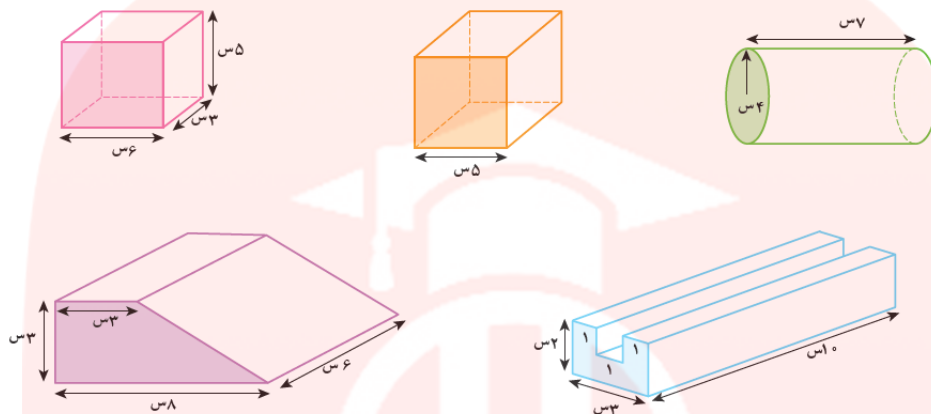
❖ حجم یعنی جایی که یک جسم سه بعدی اشغال می‌کند. برای محاسبه حجم‌های منشوری (منشور و استوانه) از فرمول زیر استفاده می‌کنیم. ارتفاع یک منشور یعنی

$$V = Sh$$

مثال ۱: حجم شکل‌های داده شده را بیابید.



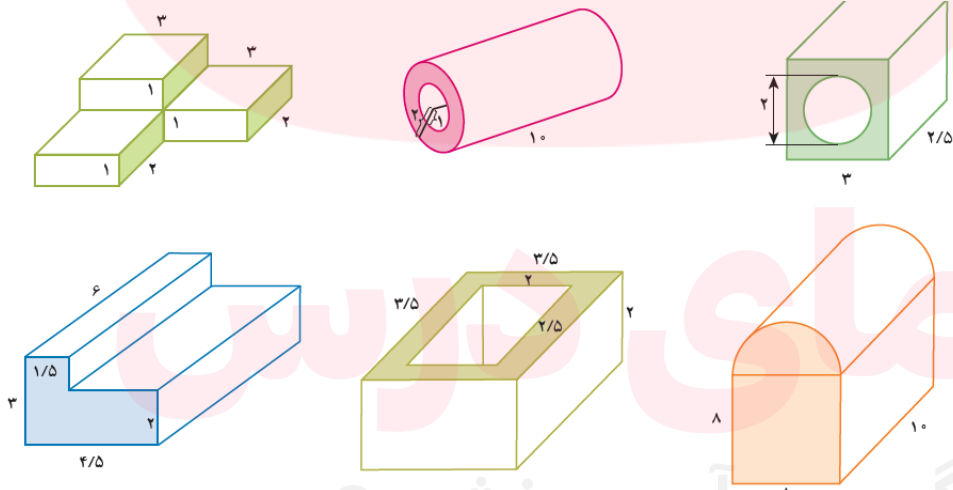
مثال ۲: حجم شکل‌های زیر را به دست آورید.



نکته ۱: برای اندازه گیری حجم از واحدهای مختلفی استفاده می شود، مانند:

نکته ۲: هر متر مکعب لیتر و هر لیتر سی سی یا سانتی متر مکعب است.

مثال ۳: حجم اشکال زیر را به دست آورید.



بخش ۳: کاربرد حجم

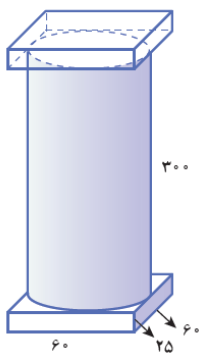
مثال ۱: منبع آبی به شکل استوانه است که قطر آن $\frac{1}{4}$ متر و ارتفاع آن ۳ متر است. این منبع چند لیتر آب در خود جا می‌دهد؟

مثال ۲: حوضی به شکل مکعب مستطیل با ابعاد ۴ و ۳ و $\frac{1}{5}$ متر است. این حوض را با شیر آبی که در هر دقیقه ۶۰ لیتر آب وارد آن می‌شود پر می‌کنیم. چند ساعت طول می‌کشد تا حوض پر شود؟

مثال ۳: یک پارچ به شکل استوانه است که ارتفاع آن ۳۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده آن ۸ سانتی‌متر است. آب این پارچ را در لیوان‌هایی به شکل استوانه که ارتفاع آن ۱۰ و شعاع قاعده‌اشان ۴ سانتی‌متر است می‌ریزیم. چند لیوان پر می‌شود؟

مثال ۴: ارتفاع یک منشور ۱۰ متر و قاعده آن متوازی الاضلاعی به قاعده ۵ و ارتفاع ۳ متر است. حجم این منشور چند لیتر است؟

مثال ۵: حجم ستون شکل مقابل را یک بار به صورت تقریبی و یکبار به صورت دقیق حساب کنید.



مثال ۶: یک جعبه دستمال کاغذی به شکل مکعب مستطیل داریم که ابعاد آن ۲۵، ۱۲ و ۵ است. تعیین کنید چه تعداد از این جعبه‌ها در کارتنی به مکعب مستطیل با ابعاد ۵۰، ۳۰ و ۲۴ جا می‌گیرد؟

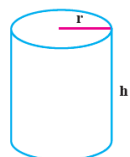
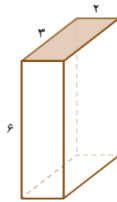
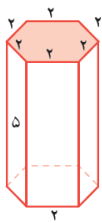
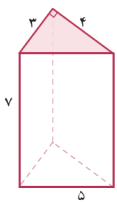
مثال ۷: چاهی به عمق ۱۲ متر حفر کرده ایم. شعاع دهانه این چاه $\frac{۰}{۴}$ متر است. وقتی خاک کنده و بیرون ریخته می شود حجم آن $\frac{۱}{۳}$ برابر می شود. اگر خاک این چاه بعد از بیرون ریخته شدن در سطحی به ابعاد ۴ و ۵ متر به طور یکنواخت ریخته شود تا یک مکعب مسطیل به وجود آید، ارتفاع خاک چقدر خواهد بود؟

درس سوم: مساحت جانبی و مساحت کل

بخش ۱: گسترده یک شکل

❖ زمانی که یک حجم را باز کرده و روی صفحه پهن کنیم، گسترده آن به دست به دست می آید.

مثال: گسترده شکل های زیر را رسم کنید.



مای درس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

بخش ۲: مساحت جانبی و مساحت کل

مساحت جانبی:

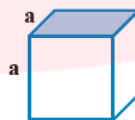
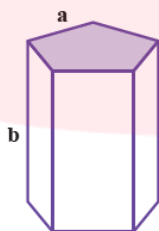
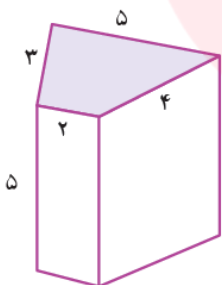
مساحت کل:

مثال ۱: در مثال بخش قبل با کمک گسترده حجم‌های منشوری مساحت جانبی و مساحت کل شکل‌ها را به دست آورید. تلاش کنید فرمولی برای این محاسبه استخراج کنید.

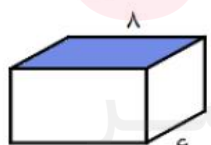
فرمول مساحت جانبی:

فرمول مساحت کل:

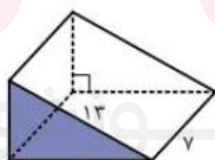
مثال ۲: مساحت جانبی شکل‌های زیر را به دست آورید.



مثال ۳: مساحت کل هر شکل را بیابید.



شکل ۱

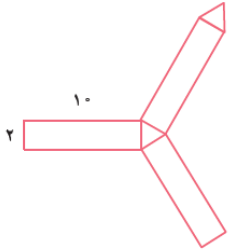


شکل ۲



شکل ۳

مثال ۴: شکل مقابل گسترده یک منشور را نشان می‌دهد. مساحت جانبی آن را بیابید.



بخش ۳: مساحت جانبی و مساحت کل در کاربرد

مثال ۱: ستونی به شکل منشور ۶ پهلوست که هر ضلع آن $\frac{3}{10}$ متر و ارتفاع آن ۴ متر است.

می‌خواهیم دور تا دور آن را کاشی کنیم. به چند متر مربع کاشی نیاز داریم؟



مثال ۲:

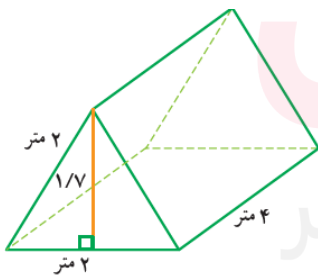
۲- یک غلتک روی زمین آسفالت شده باید ۴ بار غلت بزند تا سطح آن صاف شود. اگر شعاع غلتک 50° سانتی‌متر و ارتفاع استوانه آن ۱ متر باشد، برای آسفالت کردن سطح یک کوچه به طول ۲۰ و عرض ۴ متر، این غلتک باید به‌طور تقریبی چند بار بچرخد؟

مثال ۳:

۳- یک چرخ ماشین که کاملاً خیس شده است، با 10° دور چرخیدن روی زمین جای خود را مشخص می‌کند تا خشک شود. اگر این چرخ به ضخامت 20° سانتی‌متر و قطر 70° سانتی‌متر باشد، چه مساحتی از زمین را خیس خواهد کرد؟

مثال ۴:

۴- یک چادر مسافرتی به شکل مقابل است. چند متر پارچه برای ساخت آن به کار رفته است؟
حجم این چادر چقدر است؟

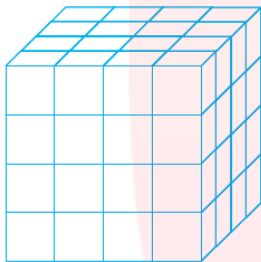


مثال ۵: ۵- یک مخزن نفت به شکل استوانه‌ای است که شعاع قاعده آن ۳ متر و ارتفاعش ۵ متر است. می‌خواهیم بدنه خارجی و سقف آن را رنگ بزنیم. اگر هزینه رنگ کردن هر متر مربع 3000° تومان باشد، برای رنگ کردن این مخزن چقدر باید هزینه کرد؟

مثال ۶: ۶- می خواهیم با مقوا مکعبی به ضلع 10 cm بسازیم. چند سانتی متر مربع مقوا به کار می رود؟

مثال ۷: ۷- یک جعبه به شکل مکعب مستطیل به ابعاد 30° و 50° و 40° سانتی متر را با کاغذ کادو پوشانده ایم. برای پوشاندن این جعبه حداقل چند سانتی متر مربع کاغذ کادو لازم داریم؟ چرا در این مسئله حداقل کاغذ لازم خواسته شده است؟

بخش ۴: یک مسئله باحال و فکری



۸- با مکعب های به ضلع ۱ واحد حجم مقابل را ساخته ایم. اگر تمام سطح های این حجم را

رنگ کنیم، چند مکعب رنگ نمی شوند؟

چند مکعب رنگ می شود؟

چند مکعب ۲ وجهشان رنگ می شود؟

چند مکعب ۳ وجهشان رنگ شده است؟

مای درس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

درس چهارم: حجم و سطح

بخش ۱: مقایسه حجم‌ها

مثال ۱: یک مستطیل به طول و عرض ۶۰ و ۴۰ سانتی متر داریم. یک بار آنرا طوری لوله می‌کنیم که عرض‌هایش روی هم قرار گیرند و بار دیگر طوری لوله می‌کنیم که طول‌هایش روی هم قرار بگیرند. حجم استوانه را در هر حالت به دست آورید. از مقایسه این حجم‌ها چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

مثال ۲: در مثال ۱ مساحت جانبی دو استوانه را به دست آورده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

مثال ۳: در مثال ۱ مساحت کل دو استوانه را به دست آورده و با هم مقایسه کنید.

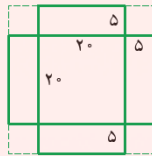
مثال ۴: یک شرکت تولید چای از دو نوع بسته بندی برای ارائه به مشتریان استفاده می‌کند. کدام یک چای بیشتری در خود جای می‌دهند؟



مثال ۵: در مثال ۴ برای بسته بندی از ورقه گالوانیزه استفاده می‌شود. کدام یک ورق کمتری مصرف می‌کند؟

مثال ۶:

برای بسته‌بندی شیرینی، جعبه‌هایی را درست می‌کنند. شکل گسترده این جعبه‌ها به صورت زیر است و پس از تا کردن مربع‌های کوچک گوشه‌ها روی هم قرار می‌گیرند و جعبه درست می‌شود.



با توجه به اندازه‌های داده شده، حجم (گنجایش) جعبه را پیدا کنید.

اگر به جای ۵ سانتی متر لبه‌ها را ۶ سانتی متر در نظر بگیریم، جعبه‌ای که با همین مقوا ساخته می‌شود، حجم بیشتری دارد یا کمتر؟

مثال ۷:

۳- یک صابون مکعب مستطیل شکل به حجم ۳۲ سانتی متر مکعب پس از چند بار مصرف، کوچک شده و به ابعاد $2\frac{1}{3}$ و ۴ و $1\frac{1}{4}$ سانتی متر تبدیل شده است. چند درصد این صابون استفاده شده است؟

بخش ۲: حجم حاصل از دوران

❖ با چرخاندن یک سطح حول یک محور در فضا حجم ساخته می‌شود.

مثال ۱: در هر مورد چه حجمی حاصل می‌شود؟ شکل حاصل را رسم کنید.

الف: دوران دادن یک مستطیل حول طول آن

ب: دوران دادن یک مستطیل حول عرض آن

ج: دوران دادن یک دایره حول قطر آن

د: دوران دادن یک نیم دایره حول قطر آن

ه: دوران دادن یک ربع دایره حول شعاع آن

و: دوران دادن یک مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائمه

مثال ۲: مستطیلی به ابعاد ۲ و ۳ را حول طولش دوران داده‌ایم. حجم شکل حاصل را بیابید.

مثال ۳: مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ سانتی متر را حول عرضش دوران داده‌ایم. مساحت جانبی شکل حاصل را بیابید.

مثال ۴: در شکل رو به رو خط چین محور تقارن مستطیل است. مستطیل را حول خط چین ۱۸۰ درجه دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.



مای درس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir