نمونه سؤالات نهایی دروس ریاضی پایهٔ دوازدهم و یازدهم (ریاضی- تجربی- انسانی)

ریاضیات گسسته (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

حمیدرضا امیری

۱| کدام گزاره درست و کدام گزاره نادرست است؟ نادرستی گزاره‌های نادرست را با مثال نقض نشان دهید.

الف) اگر $n^۲$ مضرب ۸ باشد آنگاه n مضرب ۸ است.

ب) حاصل‌ضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ عددی گنگ است.

پ) اگر $a \mid b^۲$ آنگاه $a \mid b$.

ت) اگر $a^m \mid b^n$ و $m \geq n$ آنگاه $a \mid b$.

۲| اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر ۵ و ۷ به‌ترتیب ۱ و ۴ باشد، باقیماندهٔ تقسیم a را بر ۳۵ بیابید.

۳| اگر $۷ \mid ۳k-۱$ و $k \in \mathbb{Z}$، ثابت کنید $۴۹ \mid ۲۱k^۳ + ۲k^۲ + ۱۵k - ۶$.

۴| باقیماندهٔ تقسیم عدد $A = (۳^{۱۳۰} - ۲^{۱۳۰}) + ۲۵$ را بر عدد ۲۱ بیابید.

۵| اگر $a \overset{۵۱}{\equiv} b$ و باقیماندهٔ تقسیم b بر ۱۱۹ مساوی با ۲۵ باشد، در این صورت باقیماندهٔ تقسیم $(a+۹)$ را بر ۱۷ بیابید.

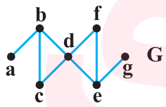
۶| اعداد طبیعی چون x بیابید که ۷ برابر آن‌ها را اگر بر ۱۱ تقسیم کنیم، باقیماندهٔ تقسیم برابر با ۸ می‌شود، با فرض $۹ \leq x < ۵۰$.

۷| گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ و مجموعهٔ یال‌های $E = \{\{x,y\} \mid xy = ۵k, k \in \mathbb{Z}\}$ را رسم کرده و حاصل $(\Delta - \delta)$ را به‌دست آورید.

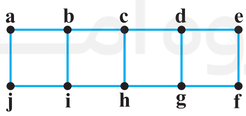
۸| اگر اندازهٔ گراف G از ۶ برابر مرتبهٔ آن ۲۰ واحد کم‌تر باشد و G گرافی ۴- منتظم باشد، مجموع مرتبه و اندازهٔ این گراف را بیابید.

۹| گراف G از مرتبهٔ ۸ فقط رأس‌های از درجهٔ ۲ و ۵ دارد در این گراف بیش‌ترین مقدار برای اندازهٔ (q) را بیابید.

۱۰| با توجه به گراف G حاصل عبارت $\dfrac{|N_G(c)|}{|N_G[f]|} \times \dfrac{|N_G(b)|}{|N_G[d]|}$ را بیابید.



۱۱| با توجه به گراف زیر کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ای احاطه‌گر و می‌نیمال است اما می‌نیمم نمی‌باشد؟ (با ذکر دلیل)



الف) $D_۱ = \{a,h,e\}$

ب) $D_۲ = \{a,i,c,g,e\}$

پ) $D_۳ = \{b,c,h,e\}$

ت) $D_۴ = \{a,j,d,g\}$

۱۲| جاهای خالی را با عدد یا کلمات مناسب پر کنید.

الف) تعداد رأس‌های زوج در هر گراف ....

ب) تعداد یال‌های گراف $K_۷$ از تعداد یال‌های گراف $K_۹$، .... یال کم‌تر است.

پ) گراف G را .... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک .... وجود داشته باشد.

۱۳| ابتدا اختلاف تعداد یال‌های گراف $P_{۱۱}$ و $C_۷$ را بیابید و سپس یک γ- مجموعه برای گراف $C_۷$ بنویسید و عدد احاطه‌گری آن را مشخص کنید.

۱۴| ۴ مداد متمایز و ۴ خودکار متمایز به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار بگیرند هرگاه بخواهیم:

الف) همواره خودکارها کنار هم باشند.

ب) به‌صورت یک در میان قرار بگیرند.

۱۵| با ارقام ۱,۱,۲,۲,۳,۴ چند عدد <u>پنج رقمی</u> و چند عدد <u>چهار رقمی</u> می‌توان نوشت؟

۱۶| ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در یک رستوران که فقط ۴ نوع غذا دارد، سفارش غذا بدهند به شرط آن که هر نفر فقط یک پرس غذا سفارش بدهد؟

۱۷| معادلهٔ $x_۱ + \sqrt{x_۲} + x_۳ + x_۴ = ۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱۸| الف) مربع لاتین A را درنظر بگیرید. با اعمال جایگشت $۳ \to ۱$ و $۲ \to ۲$ و $۴ \to ۳$ و $۱ \to ۴$ مربع لاتین B را به‌دست آورید.

ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ (با ذکر دلیل)

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ \hline ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

۱۹| در یک دانشکده حداقل چند دانشجو مشغول تحصیل باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۹ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است؟

۲۰| چه تعداد عدد طبیعی مانند n که $۱ \leq n \leq ۲۰۰$ وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر نباشند و بر ۶ بخش‌پذیر نباشند و بر ۵ نیز بخش‌پذیر نباشند؟

پاسخ نمونه سؤالات نهایی دروس ریاضی پایهٔ دوازدهم و یازدهم (ریاضی - تجربی - انسانی)
ریاضیات گسسته (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

۱ | الف) نادرست است، زیرا اگر $n=4$ در این صورت $n^2=16$ مضرب ۸ است ولی $n=4$ مضرب ۸ نیست.

ب) نادرست است، زیرا $\sqrt{2}\in Q'$ و $0\in Q$ ولی $0\times\sqrt{2}=0\notin Q'$

پ) نادرست است، زیرا اگر $a=9$ و $b=6$ در این صورت $9|36$ ولی $9\nmid 6$

ت) درست است.

۲ | طبق فرض مسأله داریم:

$$\begin{cases}(1)\quad a=5q_1+1\\(2)\quad q=7q_2+4\end{cases}\Rightarrow$$

حال به دنبال دو عدد صحیح و متوالی هستیم که مضرب ۳۵ در طرف دو متساوی‌ها ایجاد کرده که دو عدد ۱۴ و ۱۵ این ویژگی را دارند پس تساوی (۱) را در ۱۴ و تساوی (۲) را در ۱۵ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases}14a=14\times 5q_1+14\\15a=15\times 7q_2+60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}14a=2\times 35q_1+14\\15a=3\times 35q_2+60\end{cases}$$

$$\Rightarrow(15a-14a)=35(\overbrace{3q_2-2q_1}^{q'})+(60-14)$$

$$\Rightarrow a=35q'+46=35q'+35+11=35(\overbrace{q'+1}^{q})+11$$

$$\Rightarrow a=35q+11\Rightarrow\boxed{r=11}$$

۳ |

طبق فرض:

$$7|3k-1\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}49|9k^2-6k+1\qquad(1)$$

$$7|3k-1\xrightarrow{\text{طرفین}\times 7}49|21k-7\qquad(2)$$

$$49|21k-7\xrightarrow{\text{سمت راست}\times K^2}49|21k^3-7k^2\quad(1)$$

$$(1),(2),(3)\xrightarrow{+}49|21k^3+2k^2+15k-6$$

۴ | می‌دانیم اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ و $a\overset{n}{\equiv}b$ و $(m,n)=1$ آنگاه $a\overset{mn}{\equiv}b$

$$3\overset{3}{\equiv}0\rightarrow 3^{130}\overset{3}{\equiv}0\qquad(1)$$

$$3^3=27\overset{7}{\equiv}6\overset{7}{\equiv}-1\rightarrow 3^3\overset{7}{\equiv}-1\rightarrow(3^3)^{43}\overset{7}{\equiv}(-1)^{43}$$

$$\rightarrow 3^{129}\times 3^1\overset{7}{\equiv}(-1)\times 3\rightarrow 3^{130}\overset{7}{\equiv}-3\qquad(2)$$

$$2\overset{3}{\equiv}-1\rightarrow 2^{130}\overset{3}{\equiv}1\qquad(3)$$

$$(1),(3)\rightarrow 3^{130}-2^{130}\overset{3}{\equiv}0-1=-1\overset{3}{\equiv}2\rightarrow 3^{130}-2^{130}\overset{3}{\equiv}2\ (4)$$

$$2^6=64\overset{7}{\equiv}1\rightarrow 2^{126}\overset{7}{\equiv}1^{21}\overset{7}{\equiv}1\rightarrow 2^{126}\times 2^4\overset{7}{\equiv}16$$

$$\rightarrow 2^{130}\overset{7}{\equiv}16\overset{7}{\equiv}2\rightarrow 2^{130}\overset{7}{\equiv}2\qquad(5)$$

$$(2),(5)\rightarrow 3^{130}-2^{130}\overset{7}{\equiv}-3-2=-5,-5\overset{7}{\equiv}2$$

$$\rightarrow 3^{130}-2^{130}\overset{7}{\equiv}2\qquad(6)$$

$$(6),(4)\rightarrow 3^{130}-2^{130}\overset{7\times 3}{\equiv}2\rightarrow(3^{130}-2^{130})\overset{21}{\equiv}2$$

$$\rightarrow(3^{130}-2^{130})+25\overset{21}{\equiv}2+25=27\overset{21}{\equiv}6$$

$$\rightarrow(3^{130}-2^{130})+25\overset{21}{\equiv}6\rightarrow r=6$$

۵ | طبق فرض باقیماندهٔ تقسیم b بر ۱۱۹ مساوی با ۲۵ است پس $b\overset{119}{\equiv}25$ و طبق فرض $a\overset{51}{\equiv}b$ لذا داریم:

$$\begin{cases}a\overset{51}{\equiv}b\\a\overset{119}{\equiv}25\end{cases}\rightarrow a\overset{(119,51)}{\equiv}25\rightarrow a\overset{17}{\equiv}25$$

$$\rightarrow a+9\overset{17}{\equiv}25+9=34\overset{17}{\equiv}0$$

پس باقیماندهٔ $(a+9)$ بر ۱۷ صفر است.

۶ | معادل این جمله که «باقیماندهٔ تقسیم هفت برابر x بر ۱۱، مساوی با ۸ است» به‌صورت $7x\overset{11}{\equiv}8$ نوشته می‌شود پس در واقع باید x هایی را بیابیم با فرض $9\le x<50$ که در معادلهٔ هم‌نهشتی بالا صدق کنند: (توجه داریم که به هر طرف یک هم‌نهشتی می‌توان هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.)

$$7x\overset{11}{\equiv}8\rightarrow 7x\overset{11}{\equiv}8+55\rightarrow 7x\overset{11}{\equiv}63\rightarrow 7x\overset{11}{\equiv}7\times 9$$

$$\xrightarrow{(7,11)=1}x\overset{11}{\equiv}9\rightarrow x=11K+9$$

$K=0\rightarrow x=9$

$K=1\rightarrow x=20$

$K=2\rightarrow x=31$

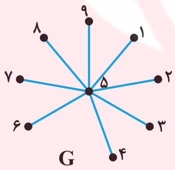
$K=3\rightarrow x=42$

۷ | $v=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$E=\{\{x,y\}\,|\,xy=5k,k\in\mathbb{Z}\}$

$E=\{\{1,5\},\{2,5\},\{3,5\},\{4,5\},\{6,5\},\{7,5\},\{8,5\},\{9,5\}\}$

$\Delta=8,\delta=1\rightarrow\Delta-\delta=7$



۸ | اگر اندازه را با q و مرتبهٔ G را با p نمایش دهیم، طبق فرض داریم:

$q=6p-20$ و منتظم است 4 - گرافی $G\rightarrow 4p=2q$

$$\begin{cases}q=6p-20\\4p=2q\end{cases}\rightarrow\begin{cases}q=6p-20\\q=2p\end{cases}\rightarrow 6p-20=2p$$

$2p=q$

$\rightarrow 4p=20$

$\rightarrow p=5,q=2p=10$

$\rightarrow p+q=5+10=15$

۹ | چون گراف G فقط رأس‌های درجهٔ ۲ و ۵ دارد پس $\delta=2$ و $\Delta=5$ از طرفی برای این که بیش‌ترین مقدار برای q را به‌دست آوریم باید درجهٔ رأس‌ها تا حد ممکن بیش‌ترین مقدار باشد یعنی باید حتی‌الامکان درجهٔ رأس‌ها را از درجهٔ ۵ فرض کنیم. (اگر ۷ رأس را از درجهٔ ۵ و ۱ رأس را از درجهٔ ۲ فرض کنیم در این صورت تعداد رأس‌های درجهٔ فرد، فرد است و این امکان ندارد.) یعنی باید ۶ رأس از درجهٔ ۵ و ۲ رأس از درجهٔ ۲ داشته باشیم تا q بیش‌ترین مقدار را داشته باشد.

$$\rightarrow q_{max}=\frac{(6\times 5)+(2\times 2)}{2}=\frac{34}{2}=17$$

۱۰ | $N_G(c)=\{d,b\}\rightarrow|N_G(c)|=2$

$N_G[f]=\{f,e,d\}\rightarrow|N_G[f]|=3$

$N_G(b)=\{a,c,d\}\rightarrow|N_G(b)|=3$

$N_G[d]=\{d,b,c,f,e\}\rightarrow|N_G[d]|=5$

$$\rightarrow\frac{|N_G(c)|}{|N_G[f]|}\times\frac{|N_G(b)|}{|N_G[d]|}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

۱۱ | می‌دانیم مجموعهٔ احاطه‌گری مینیمال است که با حذف هر عضو از آن مجموعه، احاطه‌گری از بین برود و آن مجموعه دیگر احاطه‌گر نباشد و می‌دانیم $\gamma=3$ پس:

الف) $D_1=\{a,h,e\}\rightarrow$ این مجموعه احاطه‌گر است ولی می‌نیمم است.

ب) $D_2=\{a,i,c,g,e\}\rightarrow$ این مجموعه احاطه‌گر بوده و می‌نیمال است زیرا هر عضو آن را حذف کنیم دیگر احاطه‌گر نمی‌باشد.

پ) $D_3=\{b,c,h,e\}\rightarrow$ احاطه‌گر نیست

ت) $D_4=\{a,j,d,g\}\rightarrow$ این مجموعه نیز احاطه‌گر و می‌نیمال است ولی چون ۴ عضوی است می‌نیمم نمی‌باشد.

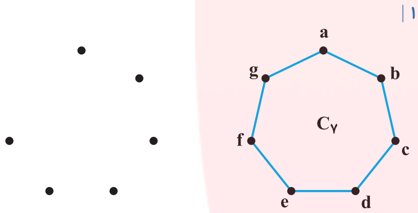
۱۲ | الف) عددی حسابی است (تعداد رأس‌های زوج در هر گراف عددی حسابی است.)

ب) ۱۵ (تعداد یال‌های گراف K_7 از تعداد یال‌های گراف K_9، ۱۵ یال کم‌تر است.)

پ) هم‌بند- مسیر

گراف G را هم‌بند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۱۳ |



$q_1=7$

$q_2=10$

$q_2-q_1=10-7=3$

C_7 مجموعه برای $-\gamma=\{a,d,f\}\rightarrow$ عدد احاطه‌گری $=3$

(هیچ مجموعهٔ دو عضوی از رأس‌های C_7 نمی‌تواند احاطه‌گر باشد.)

۱۴ | ۴ مداد متمایز داریم و ۴ خودکار که متمایزند.

الف) ۴ خودکار را یک شیء فرض کرده که با ۴ مداد روی هم ۵ شیء شده که تعداد !۵ جایگشت داشته و در هر حالت ۴ خودکار در عین حال که کنار هم هستند !۴ جایگشت دارند پس جواب (الف) برابر است با $5!\times 4!$

ب) چون تعداد دو گروه شیء با هم برابر است برای یک در میان قرار گرفتن هم می‌توان با مداد شروع کرد و هم با خودکار یعنی:

۴!

خ م خ م خ م خ م $\rightarrow 4!\times 4!$

۴!

۴!

م خ م خ م خ م خ $\rightarrow 4!\times 4!$

۴!

جواب $\rightarrow 4!\times 4!+4!\times 4!$

۱۵ | می‌دانیم همواره «تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء با تعداد جایگشت‌های $(n-1)$ تایی از همان n شیء برابر است» پس تعداد ۵ رقمی‌ها از این ۶ رقم با ۶ رقمی‌ها از همین ۶ رقم برابر است.

$$\text{تعداد ۵ رقمی‌ها}=\text{تعداد ۶ رقمی‌ها}=\frac{6!}{2!\times 2!}=\frac{720}{4}=180$$

برای محاسبهٔ ۴ رقمی‌ها که با این ارقام ۱،۱،۲،۲،۳،۴ می‌توان نوشت باید تعداد حالت‌های زیر را جدا جدا محاسبه و با هم جمع کنیم:

چهار رقمی‌های شاملِ ۱،۱،۲،۲ $\rightarrow \frac{۴!}{۲!\times ۲!}=۶$

چهار رقمی‌های شاملِ ۱،۱،۲،۳ $\rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$

چهار رقمی‌های شاملِ ۱،۱،۲،۴ $\rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$

چهار رقمی‌های شاملِ ۱،۱،۳،۴ $\rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$

چهار رقمی‌های شاملِ ۲،۲،۳،۱ $\rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$

چهار رقمی‌های شاملِ ۲،۲،۴،۱ $\rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$

چهار رقمی‌های شاملِ ۲،۲،۳،۴ $\rightarrow \frac{۴!}{۲!}=۱۲$

چهار رقمی‌های شاملِ ۱،۲،۳،۴ $\rightarrow ۴!=۲۴$

تعداد کل چهار رقمی‌ها $\rightarrow ۶\times(۱۲)+۶+۲۴=۱۰۲$

۱۶ | اگر فرض کنیم $x_i\ (۱\le i\le ۴)$ تعداد انتخاب‌ها از غذای نوع i ام باشد در این صورت تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۷$ جوابِ مسأله می‌باشد.

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $\rightarrow \binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!\times ۷!}$

$=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times \cancel{۷!}}{۳!\times \cancel{۷!}}=۱۲۰$

۱۷ | برای یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+\sqrt{x_۲}+x_۳+x_۴=۴$ برای $x_۲$ مقادیر ۰،۱،۴،۹،۱۶ که همگی مربع کامل هستند را در نظر گرفته و در هر حالت جواب‌های صحیح و نامنفی را به‌دست آورده و همه را با هم جمع می‌کنیم.

$x_۲=۰\rightarrow x_۱+۰+x_۳+x_۴=۴$

$\rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=\binom{۶}{۲}=۱۵$

$x_۲=۱\rightarrow x_۱+\sqrt{۱}+x_۳+x_۴=۴\rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۳$

$\rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=\binom{۵}{۲}=۱۰$

$x_۲=۴\rightarrow x_۱+\sqrt{۴}+x_۳+x_۴=۴\rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۲$

$\rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=\binom{۴}{۲}=۶$

$x_۲=۹\rightarrow x_۱+\sqrt{۹}+x_۳+x_۴=۴\rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۱$

$\rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=\binom{۳}{۲}=۳$

$x_۲=۱۶\rightarrow x_۱+\sqrt{۱۶}+x_۳+x_۴=۴\rightarrow x_۱+x_۳+x_۴=۰$

$\rightarrow$ تعداد جواب‌ها $=\binom{۲}{۲}=۱$

تعداد کل جواب‌ها $=۱۵+۱۰+۶+۳+۱=۳۵$

۱۸ |

الف)

$$A=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۲&۱&۴&۳\\\hline ۳&۴&۱&۲\\\hline ۱&۲&۳&۴\\\hline ۴&۳&۲&۱\\\hline\end{array}\xrightarrow[۱\rightarrow ۳,\,۴\rightarrow ۱]{۳\rightarrow ۴,\,۲\rightarrow ۲}B=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline ۲&۳&۱&۴\\\hline ۴&۱&۳&۲\\\hline ۳&۲&۴&۱\\\hline ۱&۴&۲&۳\\\hline\end{array}$$

ب) اگر این دو مربع لاتین را روی هم قرار دهیم خواهیم داشت:

۲۲	۱۳	۴۱	۳۴
۳۴	۴۱	۱۳	۲۲
۱۳	۲۲	۳۴	۴۱
۴۱	۳۴	۲۲	۱۳

چون اعداد دورقمی و تکراری در خانه‌های این مربع جدید مشاهده می‌شود پس A و B متعامد نیستند.

۱۹ |

$K+۱=۹\rightarrow K=۸$

$n=۱۲\times ۷=۸۴$

$Kn+۱=۸\times(۸۴)+۱=۶۳۷$

(طبق تعمیم اصل لانه کبوتری، هرگاه $(Kn+۱)$ کبوتر در n لانه قرار بگیرند، حداقل ۱ لانه هست که در آن حداقل $(K+۱)$ کبوتر قرار خواهد داشت.)

۲۰ | مجموعه‌های A ، B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A=\{۱\le n\le ۲۰۰ \mid ۴|n\}$

$B=\{۱\le n\le ۲۰۰ \mid ۶|n\}$

$C=\{۱\le n\le ۲۰۰ \mid ۵|n\}$

واضح است که تعداد اعضای مجموعهٔ $(A'\cap B'\cap C')$ موردنظر است.

$|(A'\cap B'\cap C')|=|(A\cup B\cup C)'|=|S|-|A\cup B\cup C|$

$|S|=۲۰۰,\ |A|=\frac{۲۰۰}{۴}=۵۰,\ |B|=\left[\frac{۲۰۰}{۶}\right]=۳۳,\ |C|=\frac{۲۰۰}{۵}=۴۰$

$|A\cap B|=\left[\frac{۲۰۰}{[۴,۶]}\right]=\left[\frac{۲۰۰}{۱۲}\right]=۱۶,\ |A\cap C|=\left[\frac{۲۰۰}{[۴,۵]}\right]$

$=\left[\frac{۲۰۰}{۲۰}\right]=۱۰$

$|B\cap C|=\left[\frac{۲۰۰}{[۶,۵]}\right]=\left[\frac{۲۰۰}{۳۰}\right]=۶,\ |A\cap B\cap C|=\left[\frac{۲۰۰}{[۴,۶,۵]}\right]$

$=\left[\frac{۲۰۰}{۶۰}\right]=۳$

$|S|-|A\cup B\cup C|=۲۰۰-(۵۰+۳۳+۴۰-۱۶-۱۰$

$-۶+۳)=\underline{۹۴}$

$(|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|$

$-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$