subject:

Year: Month: Date:

«دایره»

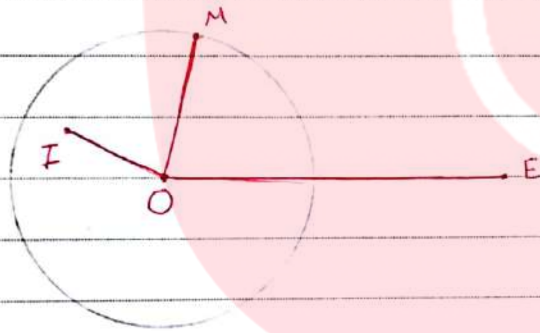
مجموعه نقطه‌هایی از نقطه ثابت O به فاصله معلوم r باشند را دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r می‌گوییم و آن را با نماد $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۱: هر دایره صفحه را به سه بخش روی دایره، داخل دایره و خارج دایره تقسیم می‌کند:

الف) روی دایره: مجموعه نقطه‌هایی مانند M که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره برابر شعاع دایره است. $(OM = r)$

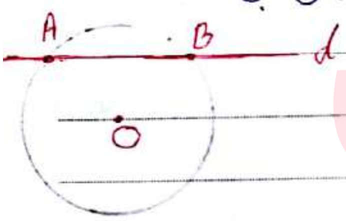
ب) داخل دایره: مجموعه نقطه‌هایی مانند I که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره است. $(OI < r)$

ج) خارج دایره: مجموعه نقطه‌هایی مانند E که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است. $(OE > r)$

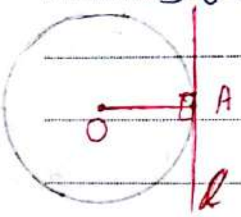


«اوضاع نسبی یک خط و یک دایره»

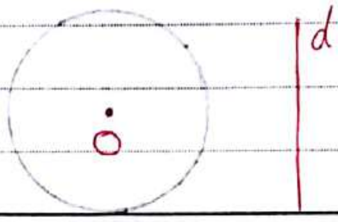
الف) خط قاطع: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند، خط قاطع نسبت به دایره نامیده می‌شود. مانند خط d در شکل مقابل.



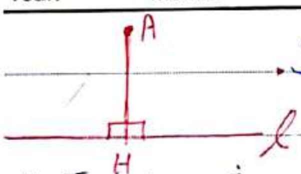
ب) خط مماس: خط l که از نقطه A می‌گذرد و بر شعاع OA عمود است، خط مماس بر دایره در نقطه A نامیده می‌شود.



ج) خطی که می‌تواند با دایره هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشد.



subject:
Year: Month: Date:



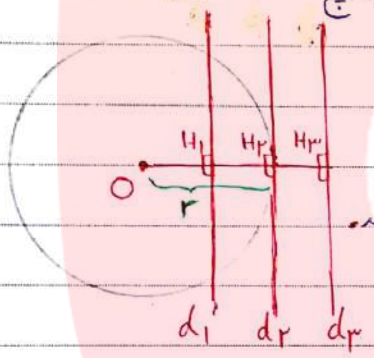
نکته ۲: فاصله نقطه A غیر واقع بر خط l تا خط l همان اندازه پاره خط عمود AH بر خط l است.

نکته ۳: اگر d یک خط و $C(O,r)$ یک دایره و نقطه‌ی H پای عمودی باشد، که از نقطه O بر خط d رسم می‌شود، در اینصورت داریم:

الف) اگر فاصله خط d_1 از مرکز دایره کمتر از شعاع باشد ($OH_1<r$)، در اینصورت خط و دایره دو نقطه اشتراک دارند و متقاطع اند.

ب) اگر فاصله خط d_2 تا مرکز دایره برابر شعاع باشد ($OH=r$)، در اینصورت خط و دایره یک نقطه‌ی اشتراک دارند و خط بر دایره مماس است.

ج) اگر فاصله خط d_3 از مرکز دایره، بیشتر از شعاع باشد ($OH_3>r$)، در اینصورت خط و دایره هیچ نقطه‌ی تقاطعی ندارند.



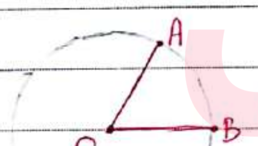
به عبارتی در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و فقط اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

زوایای مرکزی، محاطی و ظلی:

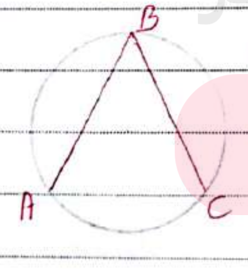
شعاع دایره: پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

وتر دایره: پاره خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه روی محیط دایره را به هم وصل می‌کند.

قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد. (بزرگترین وتر دایره)



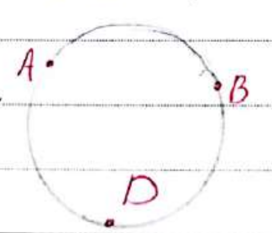
زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن دو شعاع دایره باشند.



$A\hat{B}C$ زاویه محاطی

زاویه محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن دو وتر دایره می‌باشند.

کمان: هر نقطه از دایره مانند A و B دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کنند که برای مشخص کردن آن‌ها می‌توان از یک نقطه‌ی دیگر روی کمان استفاده کرد.

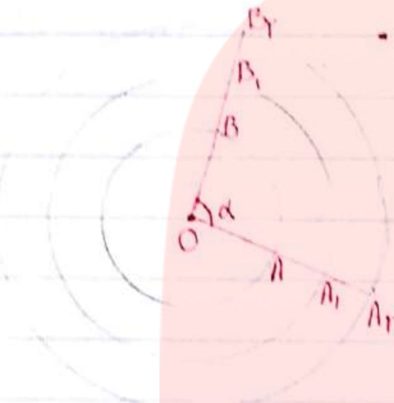


کمان $\overset{\frown}{ADB}$ و $\overset{\frown}{AB}$

اندازه کمان: اندازه کمان همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

$A\hat{O}B = \widehat{AB}$ درجه

تذکر: کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های متفاوت داشته باشند.



$A\hat{O}B = A_1\hat{O}B_1 = A_2\hat{O}B_2 = \alpha$

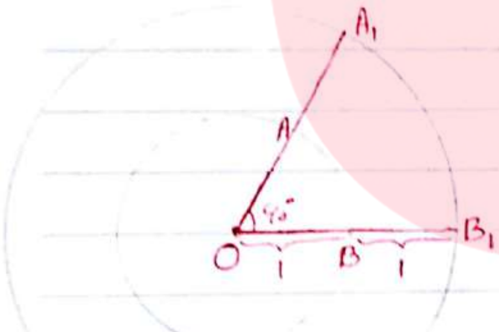
$\Longrightarrow \widehat{AB}^\circ = \widehat{A_1B_1}^\circ = \widehat{A_2B_2}^\circ$ اندازه

$\widehat{AB} \neq \widehat{A_1B_1} \neq \widehat{A_2B_2}$ طول

تذکر: محیط یک دایره، یک کمان به اندازه 360° است. پس داریم:

$$\frac{\text{اندازه } \widehat{AB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{\text{محیط}}$$

- در شکل مقابل، اندازه و طول کمان‌های خواسته شده را بنویسید.



$\text{اندازه } \widehat{AB}^\circ = \text{اندازه } \widehat{A_1B_1}^\circ = 60^\circ$

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{2\pi} \longrightarrow \text{طول } \widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول } \widehat{A_1B_1}}{4\pi} \longrightarrow \text{طول } \widehat{A_1B_1} = \frac{2\pi}{3}$$

قضیه ۱: در هر دایره، وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم برابرند و برعکس.

اثبات: از O به A و B و C و D وصل می‌کنیم.

حکم: $AB = CD$ فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ طرف اول:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \longrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OC \\ OB = OD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\hat{A}B \cong O\hat{C}D \longrightarrow AB = CD$$

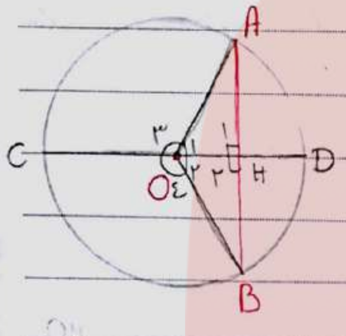
subject:

Year: Month: Date:

طرف دوم : فرض: $AB = CD$ حکم: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

$$\left.\begin{matrix} AB = CD \\ OA = OC \\ OB = OD \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\hat{A}B \cong O\hat{C}D \longrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \longrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

قضیه ۲. در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند.

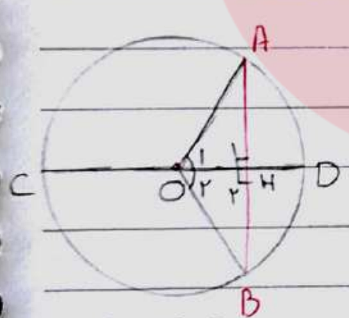


فرض: $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \text{ قطر} \end{cases}$ حکم: $\begin{cases} AH = HB \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \end{cases}$

اثبات: از O به A و B وصل می کنیم. داریم:

$$\left.\begin{matrix} OA = OB \\ OH = OH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \longrightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \longrightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \\ \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \longrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \end{cases}$$

قضیه ۳. اگر قطر CD، وتر AB را نصف کند، آنگاه قطر CD بر وتر AB عمود است و کمان $\overset{\frown}{AB}$ را نصف می کند.

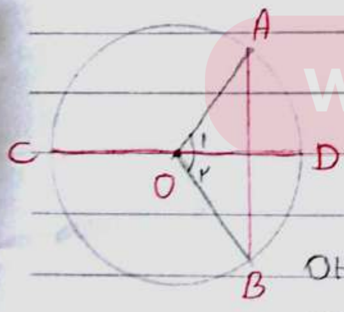


فرض: $\begin{cases} AH = HB \\ CD \text{ قطر} \end{cases}$ حکم: $\begin{cases} CD \perp AB \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \end{cases}$

اثبات: از O به A ، B وصل می کنیم. داریم:

$$\left.\begin{matrix} OA = OB \\ OH = OH \\ AH = HB \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \longrightarrow \begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \longrightarrow CD \perp AB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \longrightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \\ \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \longrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \end{cases}$$

قضیه ۴. اگر قطر CD، کمان AB را نصف کند، آنگاه CD بر AB عمود است و آن را نصف می کند.

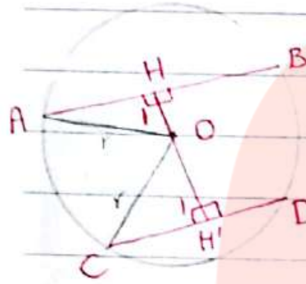


فرض: $\begin{cases} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \\ CD \text{ قطر} \end{cases}$ حکم: $\begin{cases} CD \perp AB \\ AH = HB \end{cases}$

اثبات: از O به A و B وصل می کنیم. داریم:

$$\left.\begin{matrix} OH = OB \\ OH = OH \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \longrightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \longrightarrow \begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \longrightarrow CD \perp AB \\ AH = HB \end{cases}$$

- در دایره $C(O,r)$ نشان دهید، $AB > CD$ است اگر و فقط اگر $OH < OH'$ باشد. (OH و OH' فاصله مرکز دایره از دو وتر AB و CD است.) (به عبارتی در هر دایره، هر وتر که بزرگتر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.) (مسئله ده کتاب درسی)



اثبات: از O به A و C وصل می‌کنیم. عمود OH و OH' بنا به قضیه‌ای، وترهای AB و CD را نصف می‌کنند.

$$A\hat{O}H: \hat{H}_1 = 90^\circ \longrightarrow OA^2 = AH^2 + OH^2 \xrightarrow{AH = \frac{AB}{2}} r^2 = \frac{AB^2}{4} + OH^2$$

$$C\hat{O}H': \hat{H}'_1 = 90^\circ \longrightarrow OC^2 = CH'^2 + OH'^2 \xrightarrow{CH = \frac{CD}{2}} r^2 = \frac{CD^2}{4} + OH'^2$$

$$\longrightarrow \frac{AB^2}{4} + OH^2 = \frac{CD^2}{4} + OH'^2 \longrightarrow \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4} = OH'^2 - OH^2 \quad (1)$$

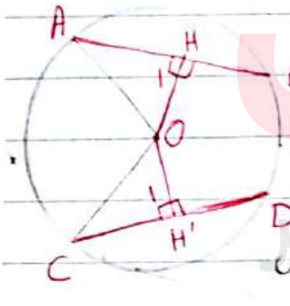
طرف اول: فرض: $AB > CD$ حکم: $OH < OH'$

$$AB > CD \longrightarrow \frac{AB^2}{4} > \frac{CD^2}{4} \longrightarrow \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4} > 0 \xrightarrow{(1)} OH'^2 > OH^2 \longrightarrow \boxed{OH < OH'}$$

طرف دوم: فرض: $OH < OH'$ حکم: $AB > CD$

$$OH < OH' \longrightarrow OH'^2 - OH^2 > 0 \xrightarrow{(1)} \frac{AB^2}{4} - \frac{CD^2}{4} > 0 \longrightarrow \frac{AB^2}{4} > \frac{CD^2}{4} \longrightarrow \boxed{AB > CD}$$

- ثابت کنید در هر دایره، هر دو وتر مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.



اثبات: از O به A و C وصل می‌کنیم. عمودهای OH و OH' را بر وترهای AB و CD رسم می‌کنیم تا آن‌ها را نصف کند.

طرف اول: فرض: $AB = CD$ حکم: $OH = OH'$

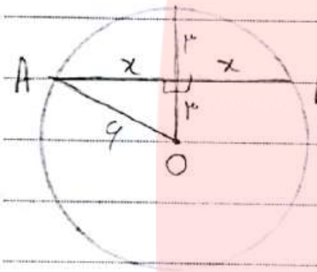
$$AB = CD \longrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} AH = CH' \\ OA = OC \\ \hat{H}_1 = \hat{H}'_1 = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\hat{A}H \cong O\hat{C}H' \longrightarrow \boxed{OH = OH'}$$

subject:
Year: Month: Date:

طرف دوم: فرض: $OH = OH'$ حکم: $AB = CD$

$$\left.\begin{array}{l} OH' = OH \\ OA = OC \\ \hat{H}_1 = \hat{H}'_1 = 90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} O\hat{A}H \cong O\hat{C}H' \longrightarrow AH = CH' \longrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} \longrightarrow \boxed{AB = CD}$$

ـ دایره‌ای با شعاع ۶ مفروض است. طول وتری از این دایره را بدست آورید که عمودمنصف یک شعاع دایره باشد.

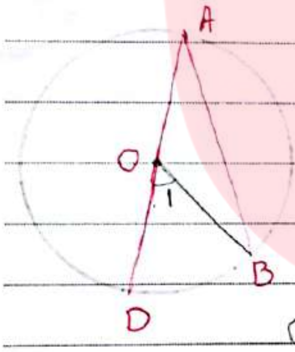


$$O\hat{A}H:\ \hat{H} = 90^\circ \longrightarrow OA^2 = OH^2 + AH^2 \longrightarrow 36 = 9 + x^2$$

$$\longrightarrow x^2 = 27 \longrightarrow x = 3\sqrt{3} \longrightarrow \boxed{AB = 6\sqrt{3}}$$

قضیه ۵: اندازه هر زاویه محاطی در یک دایره برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.

برای اثبات این قضیه، سه حالت در نظر می‌گیریم: حالت اول: یک ضلع زاویه محاطی قطر دایره باشد.

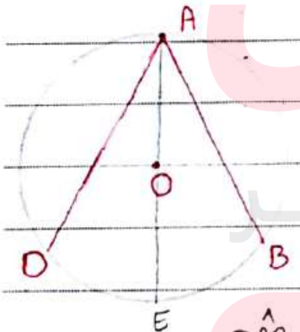


حکم: $\hat{A} = \frac{1}{2}\widehat{BD}$ اثبات: از O به B وصل می‌کنیم.

$OA = OB \longrightarrow \hat{A} = \hat{B}$ (1) $O\hat{A}B$ زاویه خارجی $\hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B} \overset{(1)}{=} 2\hat{A}$

$\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{O}_1 \longrightarrow \hat{A}_1 = \frac{1}{2}\widehat{BD}$

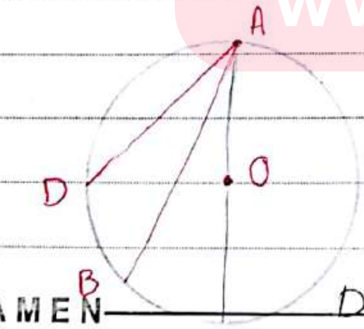
حالت دوم: دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز واقع است.



حکم: $\hat{A} = \frac{1}{2}\widehat{BD}$ اثبات: قطر AE را رسم می‌کنیم.

$$D\hat{A}B = D\hat{A}E + E\hat{A}B \xrightarrow{\text{حالت اول}} \frac{1}{2}\widehat{DE} + \frac{1}{2}\widehat{EB} = \frac{1}{2}\widehat{BD}$$

حالت سوم: دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز دایره واقع است.

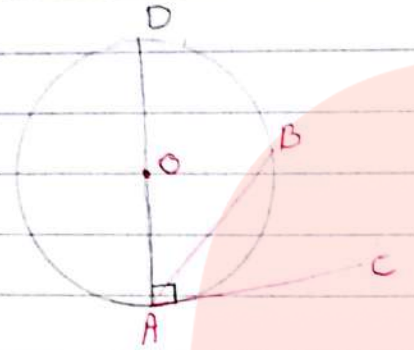


حکم: $D\hat{A}B = \frac{1}{2}\widehat{BD}$ اثبات: قطر AE را رسم می‌کنیم.

$$D\hat{A}B = D\hat{A}E - B\hat{A}E \xrightarrow[\text{حالت اول}]{} \frac{1}{2}\widehat{DE} - \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{BD}$$

زاویه ظلی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن وتری از دایره باشد.

قضیه ۶: اندازه هر زاویه ظلی، با نصف کمان روبروی آن برابر است.

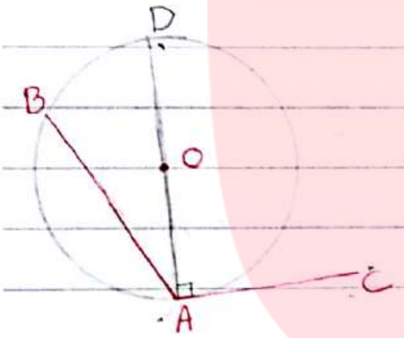


حکم: $B\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ اثبات: قطر AD را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{مماس } AC \longrightarrow C\hat{A}D = 90^\circ \\ \text{قطر } AD \longrightarrow \overset{\frown}{ABD} = 180^\circ \end{array}\right\} \longrightarrow C\hat{A}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABD} \quad (1)$$

$$B\hat{A}C = D\hat{A}C - \underbrace{D\hat{A}B}_{\text{محاطی}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{DB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

اگر زاویه ظلی مانند شکل مقابل منفرجه باشد، قضیه برقرار است.

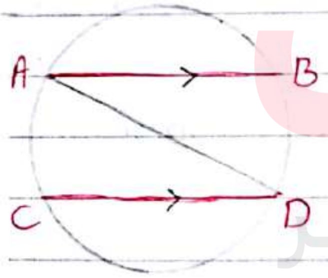


حکم: $B\hat{A}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ اثبات: قطر AD را رسم می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{مماس } AC \longrightarrow C\hat{A}D = 90^\circ \\ \text{قطر } AD \longrightarrow \overset{\frown}{ABD} = 180^\circ \end{array}\right\} \longrightarrow C\hat{A}D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABD} \quad (1)$$

$$B\hat{A}C = D\hat{A}C + \underbrace{D\hat{A}B}_{\text{محاطی}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$$

قضیه ۷: دو وتر از یک دایره موازی‌اند اگر و فقط اگر، کمان‌های غیرمتقاطع محدود بین آن‌ها مساوی باشند.



اثبات: AD را رسم می‌کنیم.

طرف اول: فرض: $AB \parallel CD$ حکم: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

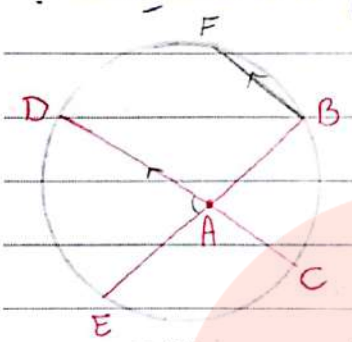
$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{مورب } AD} \hat{A} = \hat{D} \longrightarrow \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} \longrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

طرف دوم: فرض: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ حکم: $AB \parallel CD$

$$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} \longrightarrow \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} \longrightarrow \hat{A} = \hat{D} \xrightarrow{\text{عکس موازی و مورب}} AB \parallel CD$$

subject:
Year: Month: Date:

قضیه ۸ : (زاویه‌ی بین دو وتر) اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدود است.



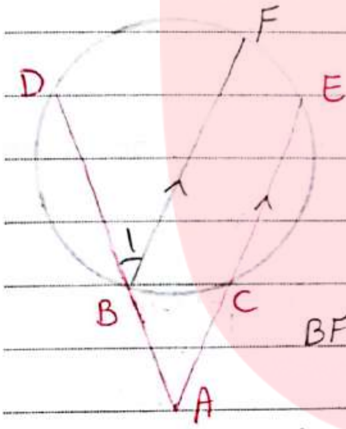
حکم: $D\hat{A}E = \frac{1}{2}(\widehat{DE}+\widehat{BC})$

اثبات: از B خطی موازی DC رسم می‌کنیم تا دایره را در F قطع کند.

$BF \parallel CD \xrightarrow{\text{قضیه ۷}} \widehat{DF} = \widehat{BC}$ (1)

$BF \parallel CD \xrightarrow{\text{مورب } BE} D\hat{A}E = \underbrace{\hat{B}}_{\text{محاطی}} = \frac{1}{2}(\widehat{DF}+\widehat{DE}) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(\widehat{BC}+\widehat{DE})$

قضیه ۹ : (زاویه بین امتداد دو وتر) اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره به وجود می‌آید، برابر نصف قدر مطلق تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدود است.



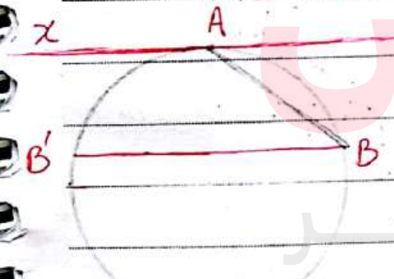
حکم: $\hat{A} = \frac{1}{2}|\widehat{DE}-\widehat{BC}|$

اثبات: از B خطی موازی AE رسم می‌کنیم تا دایره را در F قطع کند.

$BF \parallel CE \xrightarrow{\text{قضیه ۷}} \widehat{BC} = \widehat{EF}$ (1)

$BF \parallel AE \xrightarrow{\text{مورب } AD} \hat{A} = \underbrace{\hat{B}_1}_{\text{محاطی}} = \frac{1}{2}\widehat{DF} = \frac{1}{2}(\widehat{DE}-\widehat{EF}) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}|\widehat{DE}-\widehat{BC}|$

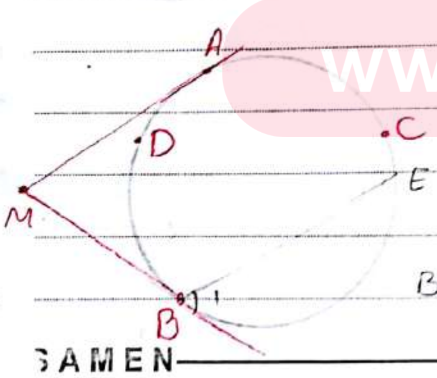
- خط xy در نقطه A بر دایره مماس است. وتر BB' از دایره را موازی xy رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $\widehat{AB} = \widehat{AB'}$



حکم: $\widehat{AB} = \widehat{AB'}$ اثبات: از A به B وصل می‌کنیم.

$xy \parallel BB' \xrightarrow{\text{مورب } AB} \underbrace{y\hat{A}B}_{\text{ظلی}} = \underbrace{\hat{B}}_{\text{محاطی}} \Rightarrow \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}\widehat{AB'} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AB'}$

- در شکل‌های زیر ثابت کنید:



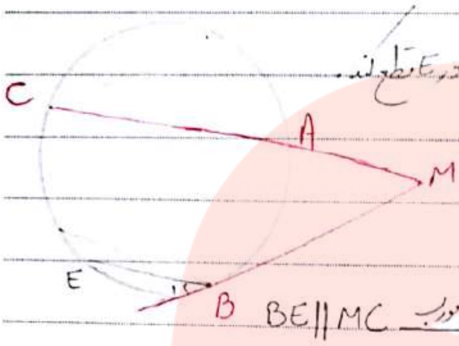
الف) $\hat{M} = \frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{2}$ از B خطی موازی MA رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند.

$BE \parallel MA \xrightarrow{\text{بنا بر سؤال قبل}} \widehat{ACE} = \widehat{ADB}$ (1)

subject:
Year: Month: Date:

$BE \parallel MA \xrightarrow{\text{مورب } MB} \hat{M}=\hat{B}_1=\dfrac{\overset{\frown}{BE}}{۲}=\dfrac{1}{۲}(\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ACE}) \overset{①}{=} \dfrac{1}{۲}(\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ADB})$

ب) $\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}$ از B خطی موازی MC رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند.

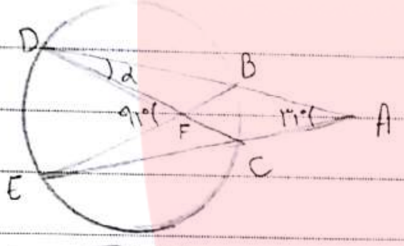


$BE \parallel MC \longrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CE}$ ①

$BE \parallel MC \xrightarrow{\text{مورب } MB} \hat{M}=\hat{B}_1=\dfrac{\overset{\frown}{BE}}{۲}=\dfrac{1}{۲}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{CE}) \overset{①}{=} \dfrac{1}{۲}(\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AB})$

«تمرین»

۲ـ در شکل مقابل اندازه زاویه α را بدست آورید.

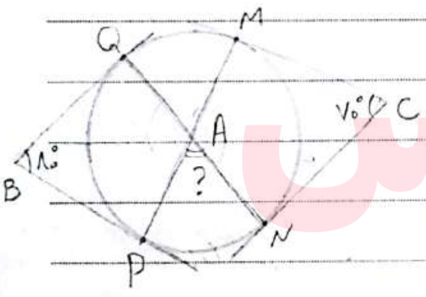


$\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC}}{۲} \longrightarrow ۶۲^\circ=\overset{\frown}{DE}-\overset{\frown}{BC}$ ①

$\hat{F}=\dfrac{\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BC}}{۲} \longrightarrow ۱۸۲^\circ=\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{BC} \xrightarrow{①} ۲\overset{\frown}{DE}=۲۴۴^\circ \longrightarrow \overset{\frown}{DE}=۱۲۲^\circ \longrightarrow \overset{\frown}{BC}=۶۰^\circ$

$\alpha=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\dfrac{۶۰^\circ}{۲} \longrightarrow \alpha=۳۰^\circ$

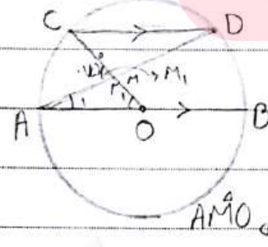
۳ـ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه A چند درجه است؟



$$\begin{cases} \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{MQPN}-\overset{\frown}{MN}}{۲} \longrightarrow \overset{\frown}{MQPN}-\overset{\frown}{MN}=۱۴۰^\circ \\ \hat{B}=\dfrac{\overset{\frown}{QMNP}-\overset{\frown}{QP}}{۲} \longrightarrow \overset{\frown}{QMNP}-\overset{\frown}{QP}=۱۶۰^\circ \end{cases}$$

$\longrightarrow ۲(\overset{\frown}{QM}+\overset{\frown}{PN})=۳۰۰^\circ \longrightarrow \overset{\frown}{QM}+\overset{\frown}{PN}=۱۵۰^\circ \longrightarrow \hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{QM}+\overset{\frown}{PN}}{۲}=\dfrac{۱۵۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$

۴ـ در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$، اندازه کمان $\overset{\frown}{CD}$ را بدست آورید.



$AB \parallel CD \longrightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD} \longrightarrow \hat{O}_1=۲\hat{A}$

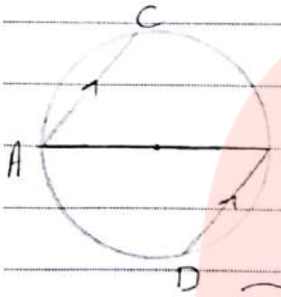
$AM\hat{O}$ زاویه خارجی $\hat{M}_1=\hat{A}_1+\hat{O}_1=\hat{A}+۲\hat{A}=۷۵^\circ \longrightarrow \hat{A}=۲۵^\circ$

SAMEN

subject:
Year: Month: Date:

$\hat{O} = \widehat{AC} = \widehat{BD} = ۵۰^\circ \longrightarrow \widehat{CD} = ۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ - ۵۰^\circ = ۸۰^\circ$

۵) در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید: $AC = BD$



$AC \parallel BD \longrightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$

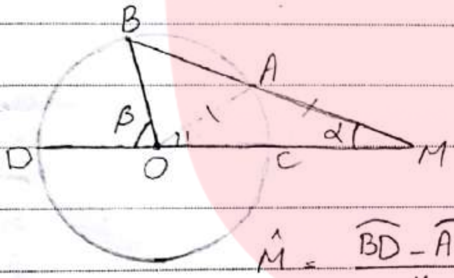
قطر $AB \longrightarrow \widehat{ACB} = \widehat{BDA}$

$\widehat{ACB} - \widehat{BC} = \widehat{BDA} - \widehat{AD}$

$\longrightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \longrightarrow \boxed{AC = BD}$

۶ـ دایره $C(O, R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$

نشان دهید: $\beta = ۳\alpha$ از O به A وصل می‌کنیم.

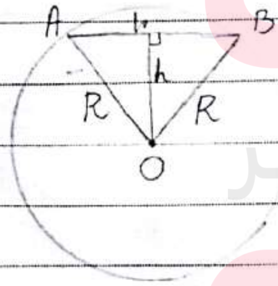


$OA = AM = R \longrightarrow \hat{O}_1 = \hat{M} = \alpha \longrightarrow \widehat{AC} = \alpha$

$\hat{M} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AC}}{۲} \longrightarrow \alpha = \frac{\widehat{BD} - \alpha}{۲} \longrightarrow ۲\alpha = \widehat{BD} - \alpha \longrightarrow \widehat{BD} = ۳\alpha$

$\widehat{BD} = \hat{O}_2 = \boxed{\hat{\beta} = ۳\alpha}$

۷ـ در دایره $C(O,R)$، $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$ فاصله O از وتر AB را بدست آورید.



$\widehat{AB} = ۶۰^\circ \longrightarrow \hat{O} = ۶۰^\circ, \ AO = BO = R \longrightarrow \hat{A} = \hat{B} = ۶۰^\circ$

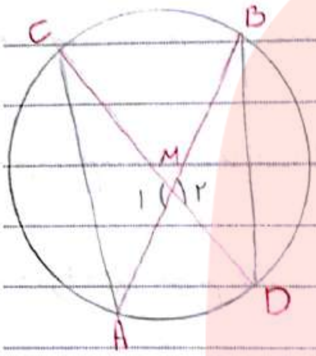
$\longrightarrow AO = BO = ۱۰ \longrightarrow h = \frac{\sqrt{۳}}{۲} R = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۱۰ = ۵\sqrt{۳}$

SAMEN

«رابطه‌های طولی در دایره»

قضیه ۱۰. هرگاه وترهای AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره، یکدیگر را قطع کنند، آنگاه $MC \times MD = MB \times MA$

حکم: $MA.MB = MC.MD$



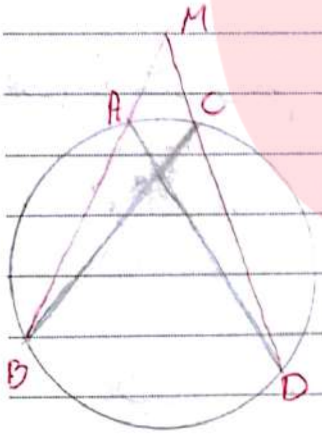
حل: از A به C، و از B به D وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} A\hat{M}C \sim D\hat{M}B \longrightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$$

$$\longrightarrow \boxed{MA.MB = MC.MD}$$

قضیه ۱۱. هرگاه وترهای AB و CD یکدیگر را در نقطه‌ای مانند M در خارج دایره قطع کنند. آنگاه: $MA.MB = MC.MD$

حکم: $MA.MB = MC.MD$



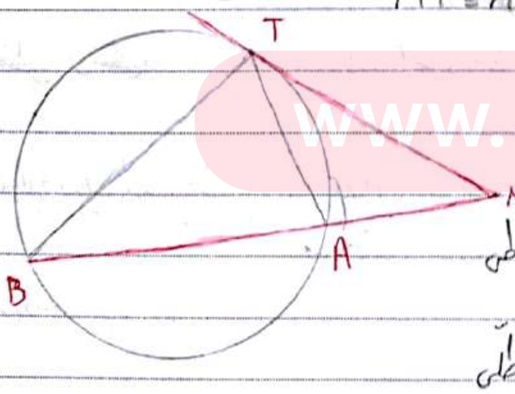
اثبات: از A به D، و از C به B وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} M\hat{A}D \sim M\hat{C}B \longrightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$$

$$\longrightarrow \boxed{MA.MB = MC.MD}$$

قضیه ۱۲. از یک نقطه خارج یک دایره، یک مماس و یک قطع نسبت به دایره رسم می‌کنیم. مربع اندازه مماس با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قطع برابر است.

به عبارتی مماس واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه قاطع است. حکم: $MT^2 = MA.MB$



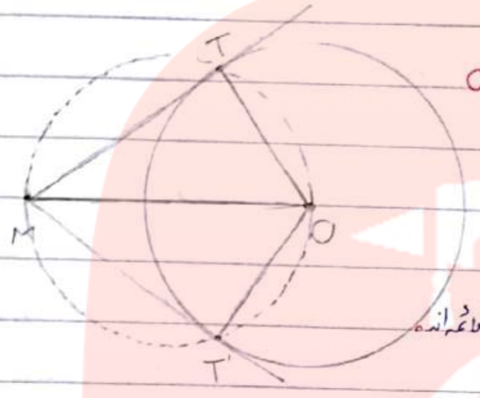
اثبات: از T به A و B وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی } \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{TA}}{۲} \\ \text{ظلی } A\hat{T}M = \dfrac{\overset{\frown}{TA}}{۲} \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{B} = A\hat{T}M \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} M\hat{T}A \sim M\hat{T}B$$

subject:
Year: Month: Date:

$\rightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \rightarrow \boxed{MT^2 = MA.MB}$

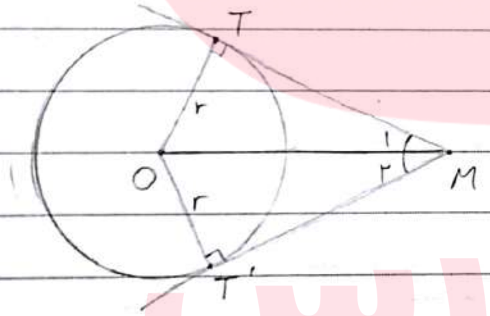
رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن :



فرض کنید دایره $C(O,r)$ و نقطه M خارج آن داده شده باشد. دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم. این دایره، دایره C را در دو نقطه‌ی T و T' قطع می‌کند. از T و T' به O و M وصل می‌کنیم. زاویه‌های MTO و $MT'O$ محاطی و مقابل به قطر می‌باشند، پس قائمه‌اند. بنابراین شعاع‌های نقطه‌ی تماس بر پاره‌خط‌های MT و MT' عمودند. پس این دو پاره‌خط بر دایره مماس‌اند.

قضیه ۱۳ . هرگاه از نقطه M خارج از دایره $C(O,r)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند :

الف) اندازه‌های دو مماس باهم برابرند . ب) نیم‌خط MO نیمساز زاویه $T\hat{M}T'$ است .



$\left.\begin{array}{l} MO = MO \\ \hat{T} = \hat{T'} = 90^\circ \\ OT = OT' = r \end{array}\right\}$ وتر و یک ضلع $\rightarrow O\hat{M}T \cong O\hat{M}T'$

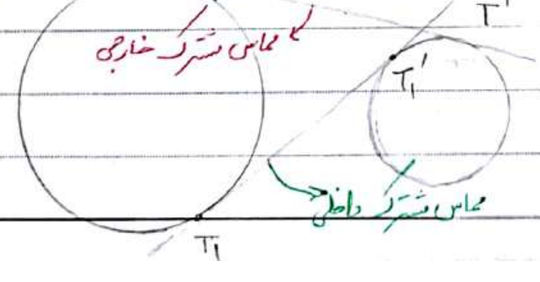
$\rightarrow$ الف) $\boxed{MT = MT'}$

ب) $\boxed{\hat{M}_1 = \hat{M}_2} \rightarrow$ MO نیمساز $T\hat{M}T'$

مماس مشترک دو دایره :

هر خط یا پاره‌خطی که بر هر دو دایره مماس باشد را مماس مشترک دو دایره می‌نامند.

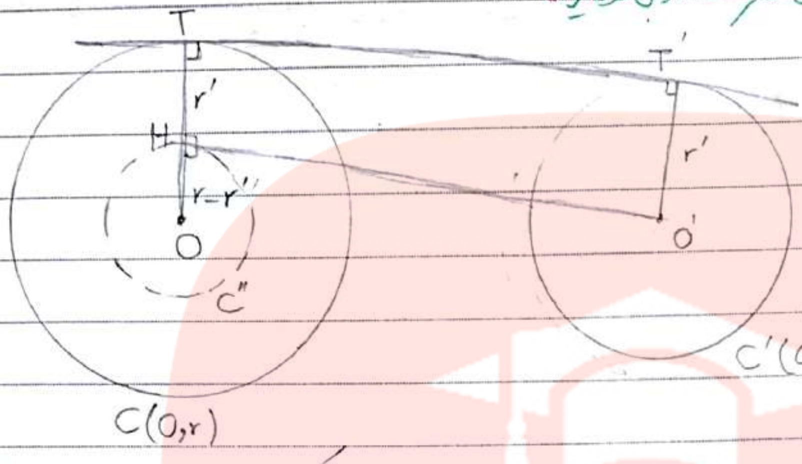
اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره دو طرف خط مماس باشند، این خط مماس مشترک داخلی دایره نامیده می‌شود.



subject:

Year: Month: Date:

«رسم مماس مشترک خارجی دو دایره»



فرض کنید دایره $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ با فرض $r>r'$ داده شده باشند و TT' مماس مشترک خارجی این دو دایره باشند. از O' خطی به موازات TT' رسم می‌کنیم تا OT را در H قطع کند. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{T}=\hat{T'}=90^\circ \longrightarrow HT \parallel O'T' \\ O'H \parallel TT'\end{array}\right\} \Longrightarrow \underset{\text{مستطیل}}{\overset{\square}{T'THO'}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}TH=r' \\ \hat{H}=90^\circ \\ OH=r-r'\end{array}\right.$$

بنابراین $O'H$ بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $r-r'$ مماس است.

روش رسم: به مرکز دایره بزرگتر و به شعاع $r-r'$، دایره C'' را رسم می‌کنیم. از O' مماس $O'H$ را بر دایره C'' رسم می‌کنیم. از O به H وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره C را در نقطه T قطع کند. از T خطی به موازات $O'H$ رسم می‌کنیم. این خط در نقطه T' بر دایره C' مماس است.

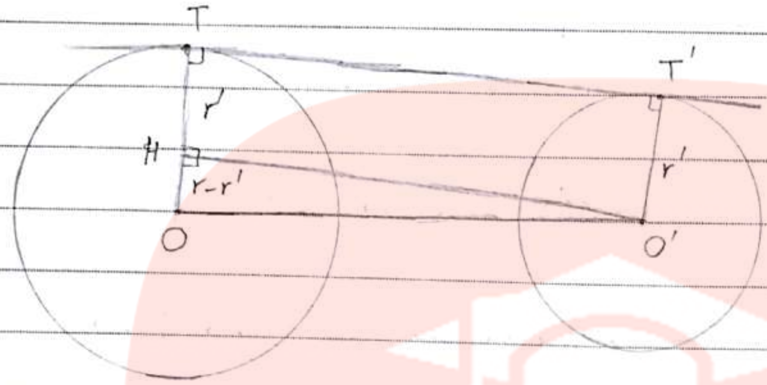
«قضیه ۱۴»: اگر دو مماس مشترک خارجی دو دایره، متقاطع باشند، نقطه تقاطع آن‌ها روی خط المرکزین دو دایره قرار دارد.

اثبات: فرض می‌کنیم این دو مماس، یکدیگر را در نقطه M قطع کنند. از M به O و O' رسم می‌کنیم. با توجه به قضیه ۱۳، MO' نیمساز زاویه M و همچنین MO نیمساز زاویه M می‌باشد. چون نیمساز زاویه یکتاست، پس MO و MO' بر هم منطبق اند. یعنی نقطه تلاقی دو مماس مشترک روی خط المرکزین دو دایره قرار دارد.

subject:

Year: Month: Date:

«محاسبه طول مماس مشترک خارجی دو دایره (برحسب شعاع های دو دایره و خط المرکزین)».



داریم:

$$\begin{cases} O'H = TT' \\ TH = r' = O'T' \\ OH = r - r' \\ \hat{H} = 90^\circ \\ OO' = d \end{cases}$$

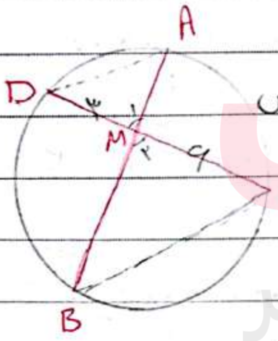
$$O'\hat{H}O : \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} OO'^2 = OH^2 + O'H^2$$

$$\longrightarrow TT'^2 = d^2 - (r - r')^2$$

$$\longrightarrow \boxed{TT' = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}}$$

«تمرین»

۱- در دایره $C(O,R)$، وتر AB، وتر CD به طول $9cm$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11cm$، آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟ از A به D، و از B به C وصل می‌کنیم.



$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ متقابل به رأس

$\hat{B} = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ زاویه محاطی

$$\xrightarrow{\text{ز ز}} A\hat{M}D \sim C\hat{M}B \longrightarrow \frac{AM}{CM} = \frac{AD}{CB} = \frac{MD}{MB}$$

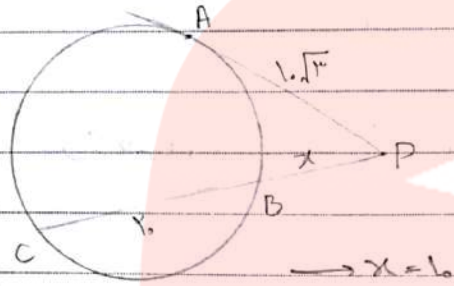
$$\longrightarrow \frac{AM}{6} = \frac{3}{MB} \longrightarrow AM \cdot MB = 18 \ , \ AM + MB = 11 \longrightarrow AM = 2 \ , \ MB = 9$$

$$\longrightarrow \frac{MB}{AM} = \frac{9}{2}$$

subject:

Year: Month: Date:

۲- از نقطه P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را از آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC=20$. طول‌های PB و PC را بدست آورید.

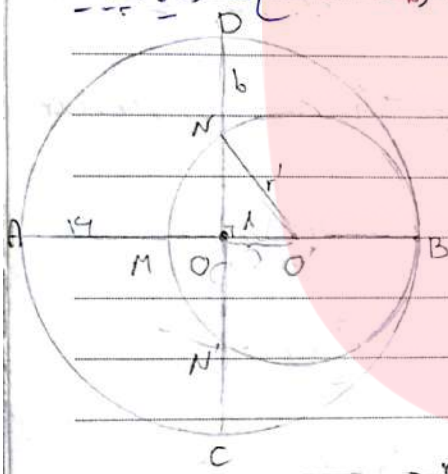


$$PA^2 = PB.PC \to (10\sqrt{3})^2 = x.(20+x)$$

$$\to x^2+20x-300=0 \to (x+30)(x-10)=0$$

$$\to x=10 \to PB=10 ,\ PC=30$$

۳- در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر برهم عمودند. اگر $AM=16$ و $ND=10$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



$$AB - BM = AM \to 2r - 2r' = 16 \to r - r' = 8$$

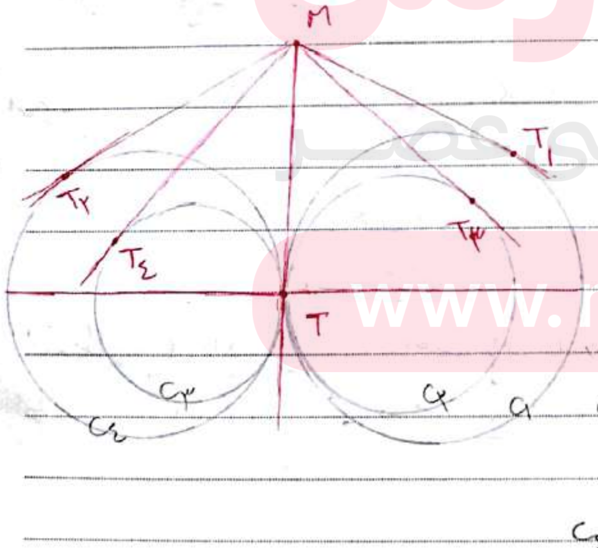
$$\overset{\triangle}{OO'N}: OO'^2 + ON^2 = O'N^2 \to 8^2 + (r-10)^2 = (r-8)^2$$

$$\to 64 + r^2 - 20r + 100 = r^2 - 16r + 64 \to 4r = 100 \to r = 25$$

$$\to r' = 17$$

۴- مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آن‌ها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم.

ثابت کنید: $MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$



برابری مماس‌های یک دایره

دایره C_1: $MT = MT_1$

دایره C_2: $MT = MT_3$

دایره C_3: $MT = MT_4$

دایره C_4: $MT = MT_2$

$$\to MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$$

subject:

Year: Month: Date:

۵- طول شعاع های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آن ها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آن ها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آن ها مساوی ۸ واحد است.

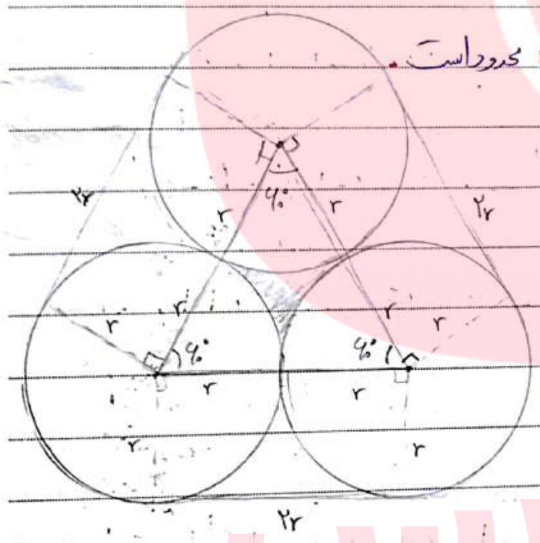
$3\sqrt{7} = \sqrt{8^2-(r-r')^2} \to 63 = 64-(r-r')^2$

$(r-r')^2 = 1 \to r-r' = 1 \to r = r'+1$ ①

$\sqrt{15} = \sqrt{8^2-(r+r')^2} \to 15 = 64-(r+r')^2 \to (r+r')^2 = 49 \to r+r' = 7$ ②

①, ② $\to r'+1+r' = 7 \to r' = 3 , r = 4$

۶- سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو بر هم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخی بسته شده اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r+2\pi r$. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3}-\pi/2)$ محدود است.



طول نخ: $3\times 2r + 3\times\left(\overbrace{\frac{120^\circ}{360^\circ}}^{1/3}\times 2\pi r\right) = 6r+2\pi r$

$S_{\text{هاشور}} = S_{\text{مثلث}} - 3S_{1/6\ \text{دایره}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - 3\times\left(\frac{1}{6}\pi r^2\right)$

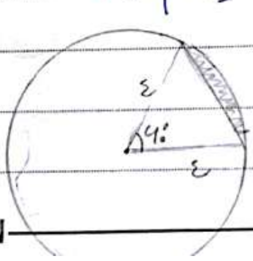
$\to S_{\text{هاشور}} = \sqrt{3}r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = r^2(\sqrt{3}-\pi/2)$

۷- طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی 2cm و مساحت ناحیه محدود بین آن ها 16π سانتی متر مربع است. طول شعاع ها دو دایره را به دست آورید.

$r-r' = 2 \quad , \quad \pi r^2 - \pi r'^2 = 16\pi \to \pi(r^2-r'^2) = 16\pi \to r^2-r'^2 = 16$

$(r'+2)^2 - r'^2 = 16 \to \cancel{r'^2}+4r'+4-\cancel{r'^2} = 16 \to r' = 3 , r = 5$

۸- مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام دارد.

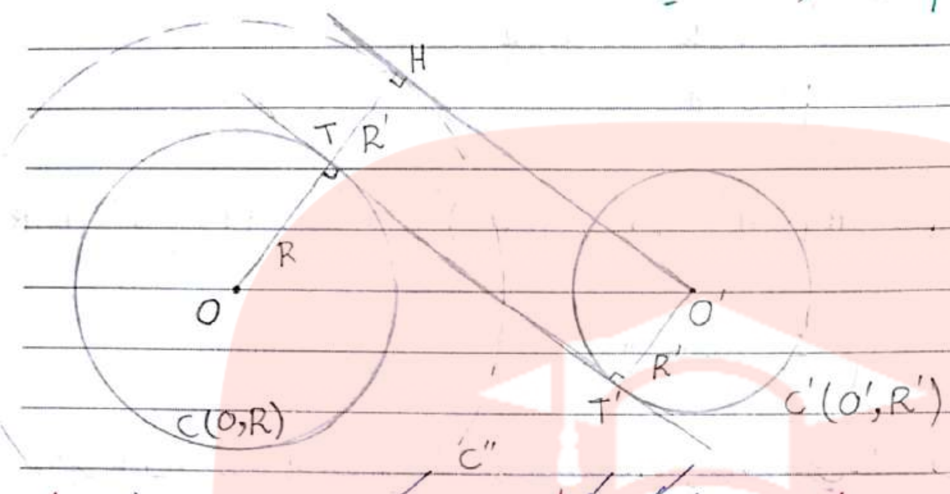


$S_{\text{هاشور}} = -S_{\text{مثلث}} + S_{1/6\ \text{دایره}} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2 + \frac{1}{6}\pi\times 4^2 = 4\times\left(-\sqrt{3}+\overbrace{\frac{4\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}\right)$

subject:

Year: Month: Date:

رسم مماس مشترک داخلی دو دایره:



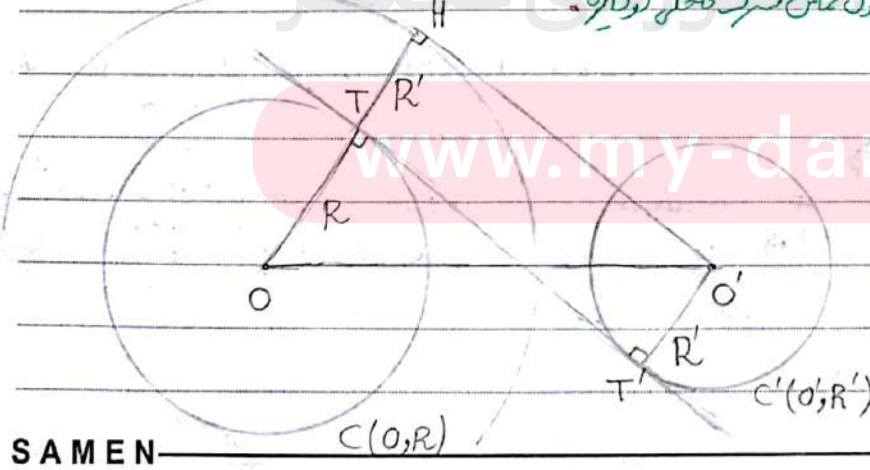
دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $R > R'$ درنظر می‌گیریم، اگر TT' مماس مشترک داخلی این دو دایره باشد، از O' خطی موازی TT' رسم می‌کنیم تا امتداد OT را در H قطع کند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{T} = \hat{T'} = 90^\circ \longrightarrow HT \parallel O'T' \\ O'H \parallel TT' \end{array}\right\} \longrightarrow \underset{\text{مستطیل}}{\overset{\square}{O'HTT'}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} TH = O'T' = R' \\ H = 90^\circ \\ OH = R + R' \\ O'H = TT' \end{array}\right.$$

بنابراین $O'H$ بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R+R'$ مماس است.

روش رسم: به مرکز دایره بزرگتر و به شعاع $R+R'$، دایره C'' را رسم می‌کنیم. از O' مماس $O'H$ را بر دایره C'' رسم می‌کنیم. از O به H وصل می‌کنیم تا دایره C را در T قطع کند. از T خطی موازی $O'H$ رسم می‌کنیم. این خط بر دایره C' در نقطه T' مماس است.

محاسبه طول مماس مشترک داخلی دو دایره:



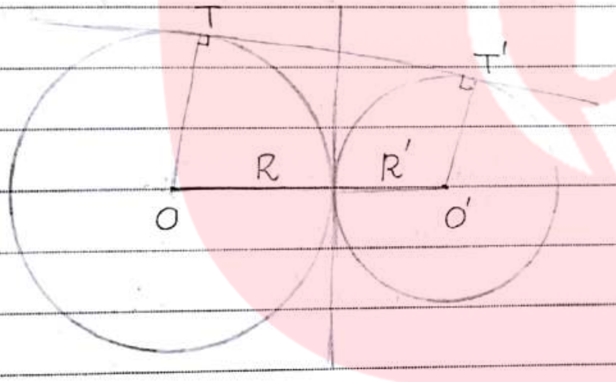
بافرض: $\begin{cases} OT = R \\ O'T' = R' \\ OO' = d \end{cases}$ داریم: $\begin{cases} \hat{H} = 90^\circ \\ O'H = TT' \\ OH = R+R' \end{cases}$

$$OO'H : \hat{H} = 90^\circ \longrightarrow OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \longrightarrow d^2 = (R+R')^2 + TT'^2 \longrightarrow \boxed{TT' = \sqrt{d^2-(R+R')^2}}$$

« حالت های دو دایره نسبت به هم »

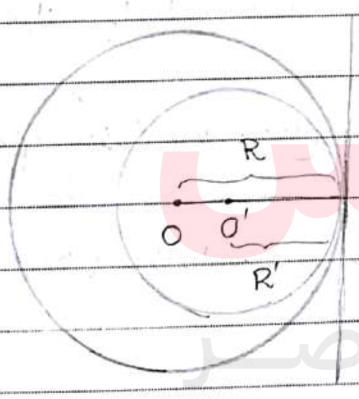
« دو دایره مماس » دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس می نامند. در این نقطه مشترک، یک خط بر هر دو دایره مماس است.

اگر مرکزهای دو دایره در دو طرف این مماس باشند، آن دو دایره مماس خارجی اند. اگر هر دو مرکز در یک طرف مماس باشند، دو دایره مماس داخلی اند.



دو دایره مماس خارج اند و $OO' = d = R+R'$

دارای دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی است.



دو دایره مماس داخلند و $OO' = d = |R-R'|$

دارای یک مماس مشترک خارجی

نکته: نشان دهید در دو دایره مماس خارج، $TT' = 2\sqrt{RR'}$ می باشد.

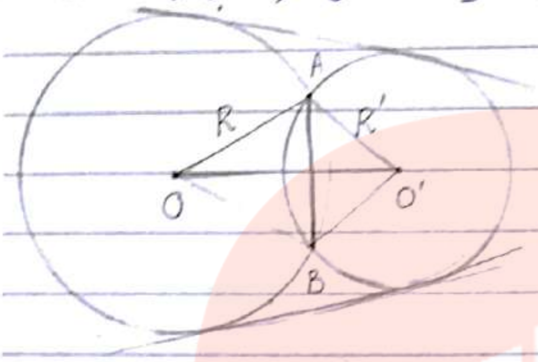
طول مماس مشترک خارجی: $TT' = \sqrt{d^2-(R-R')^2} \underset{d=R+R'}{=} \sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2} = \sqrt{R^2+R'^2+2RR'-R^2-R'^2+2RR'}$

$= \sqrt{4RR'} = \boxed{2\sqrt{RR'}}$

subject:

Year: Month: Date:

• دو دایره متقاطع: دو دایره را اگر فقط دو نقطه مشترک داشته باشند را متقاطع می‌نامند. در این حالت، دو دایره، فقط دو مماس مشترک خارجی دارند.



$$|R-R'| < OO' < R+R'$$

• نکته: در دو دایره متقاطع نشان دهید: $|R-R'| < OO' < R+R'$

با توجه به نامساوی مثلثی در $O\hat{A}O'$ (قضیه حمار):

$OO' < R+R'$ ①

$$\left.\begin{array}{l} R' < OO'+R \longrightarrow -OO' < R-R' \\ R < OO'+R' \longrightarrow R-R' < OO' \end{array}\right\} \longrightarrow -OO' < R-R' < OO' \longrightarrow |R-R'| < OO' \text{ ②}$$

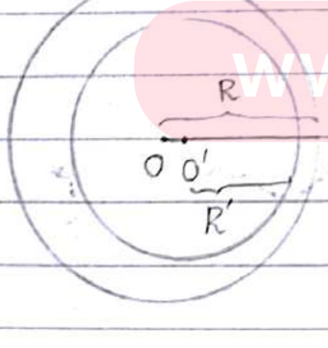
$$①, ② \longrightarrow |R-R'| < OO' < R+R'$$

• نکته: نشان دهید در شکل بالا، پاره خط OO' عمودمنصف وتر مشترک AB است.

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = R \longrightarrow O \text{ روی عمودمنصف } AB \\ O'A = O'B = R' \longrightarrow O' \text{ روی عمودمنصف } AB \end{array}\right\} \longrightarrow OO' \text{ عمودمنصف } AB$$

• دو دایره متداخل: دو دایره را اگر تمام نقاط یکی در دیگری باشد، متداخل می‌نامند. در این حالت، دو دایره، هیچ مماس مشترکی ندارند.

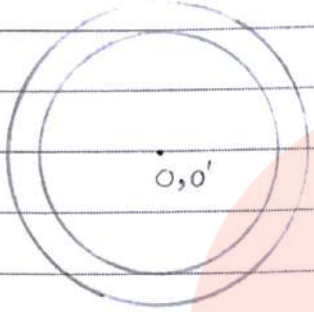
همچنین: $d = OO' < |R-R'|$



subject:

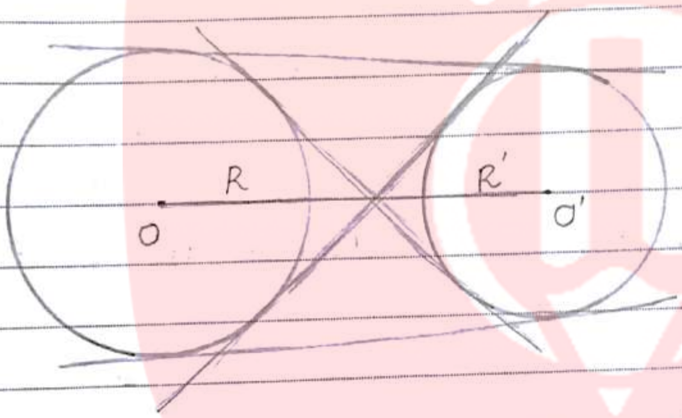
Year: Month: Date:

«دودایره هم مرکز»: در دو دایره هم مرکز، مرکزهای دو دایره بر هم منطبق می باشند و هیچ مماس مشترک ندارند.



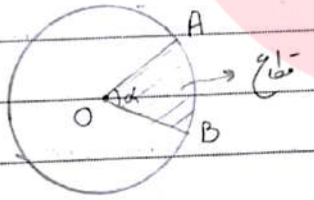
$d=0$

«دو دایره متخارج»: دو دایره که هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند را متخارج گوییم. که در این حالت دو دایره دارای دو مماس مشترک خارجی و دو مماس مشترک داخلی می باشند.



$d=OO'>R+R'$

«قطاع»



ناحیه ای از درون و روی دایره که به شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره نامیده می شود.

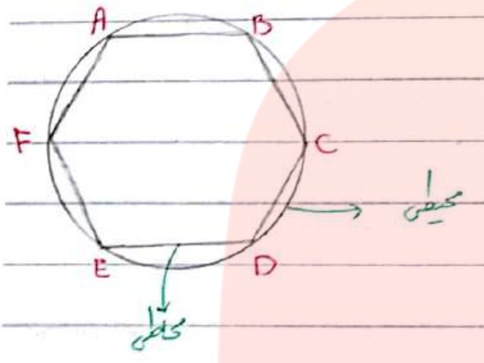
«نکته»: اگر زاویه ی مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ برحسب درجه مساوی α باشد، در این صورت داریم:

(طول $\widehat{AB}$) $L=\frac{\pi R\alpha}{180}$ (مساحت قطاع) $S=\frac{\pi R^2\alpha}{360}$

«چندضلعی‌های محاطی و محیطی»

«چندضلعی‌های محاطی»: چند ضلعی را محاطی می‌گوییم، اگر و فقط اگر، دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد. مانند چندضلعی ABCDEF در شکل زیر.

بر دایره‌ای که از همه رأس‌های چندضلعی می‌گذرد، دایره محیطی آن چندضلعی می‌گویند.



«قضیه»: یک چندضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر، عمودمنصف‌های همه‌ی ضلع‌های آن همرس باشند.

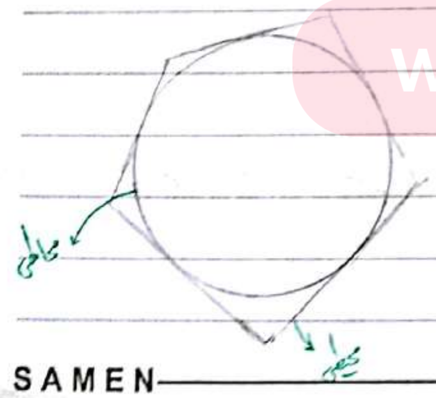
اثبات: طرف اول: فرض: چندضلعی محاطی است. حکم: عمودمنصف‌ها همرس هستند.

چندضلعی محاطی است، پس دایره‌ای از تمام رئوس آن می‌گذرد، چون فاصله‌ی تمام رأس‌ها تا مرکز دایره، برابر شعاع دایره است، پس طبق خاصیت عمودمنصف، چون فاصله مرکز تا دو سر هر ضلع برابر است، پس مرکز دایره روی عمودمنصف این اضلاع قرار دارد. بنابراین عمودمنصف‌های همه اضلاع همرس اند.

طرف دوم: فرض: عمودمنصف‌ها همرس اند. حکم: چندضلعی محاطی است.

چون عمودمنصف‌های اضلاع چندضلعی همرس اند، با توجه به خاصیت عمودمنصف، همه‌ی رأس‌های چندضلعی، از نقطه‌ی همرسی به یک فاصله اند پس دایره به مرکز نقطه‌ی همرسی و به شعاع فاصله ثابت از تمام رئوس چندضلعی می‌گذرد، پس چندضلعی محاطی است.

«چندضلعی محیطی»: یک چند ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر، دایره‌ای وجود داشته باشد که بر همه‌ی ضلع‌های آن چندضلعی مماس باشد. در این صورت دایره را، دایره محاطی این چندضلعی می‌نامیم.



subject:

Year: Month: Date:

قضیه: یک چندضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همهٔ نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چندضلعی است.

اثبات: طرف اول: فرض: چندضلعی محیطی است. حکم: نیمسازهای زوایای داخلی چندضلعی همرس اند.

چندضلعی محیطی است، پس اضلاع چندضلعی بر دایره مماس اند و شعاع در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است. پس فاصله مرکز دایره از اضلاع چندضلعی، برابر شعاع دایره است. بنابراین طبق خاصیت نیمساز، روی نیمساز هر یک از زاویه‌ها قرار دارد. پس نیمسازهای زوایای داخلی چندضلعی همرس اند.

طرف دوم: فرض: نیمسازهای زوایای داخلی چندضلعی همرس اند. حکم: چندضلعی محیطی است.

اگر O محل تلاقی نیمسازهای داخلی این چندضلعی باشد، طبق خاصیت نیمسازها داریم: $OH = OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$ از طرفی همگی بر اضلاع عمودند، پس دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH با اضلاع چندضلعی مماس است، پس چندضلعی محیطی است.

نکته: اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط 2P، شعاع دایره محاطی r باشد، نشان دهید: $r = \frac{S}{P}$ (P: نصف محیط)

(طبق شکل بالا) $S_{کل} = S_{A\hat{O}B} + S_{B\hat{O}C} + S_{C\hat{O}D} + S_{D\hat{O}E} = \frac{1}{2} r (AB + BC + CD + DE) = \frac{1}{2} r \times 2p = rp$

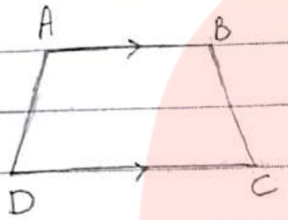
$\longrightarrow \boxed{r = \frac{S}{P}}$ نصف محیط

subject:

Year: Month: Date:

تمرین صفحه ۲۹

۱- اثبات: طرف اول: فرض: ذوزنقه ABCD یک چهارضلعی محاطی است. حکم: ذوزنقه ABCD متساوی الساقین است.

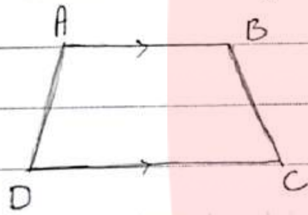


ABCD محاطی است. $\longrightarrow \hat{A}+\hat{C}=180^\circ$

$\longrightarrow \hat{C}=\hat{D}$ ذوزنقه ABCD متساوی الساقین است.

ABCD ذوزنقه است. $\longrightarrow \hat{A}+\hat{D}=180^\circ$

طرف دوم: فرض: ذوزنقه ABCD متساوی الساقین است. حکم: ذوزنقه ABCD یک چهارضلعی محاطی است.

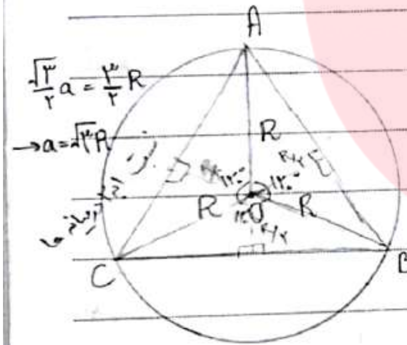


ذوزنقه ABCD متساوی الساقین است. $\longrightarrow \hat{C}=\hat{D}$

ABCD ذوزنقه است. $\longrightarrow \hat{A}+\hat{D}=180^\circ$

$\Big\} \longrightarrow \hat{A}+\hat{C}=180^\circ$ ← ذوزنقه ABCD محاطی است.

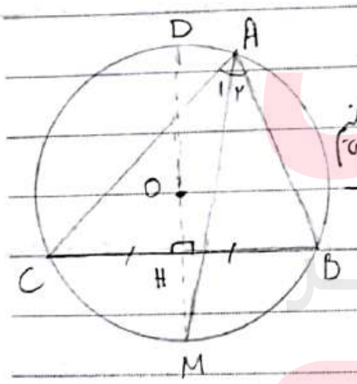
۲-



$$S_{A\hat{B}C}=S_{A\hat{O}C}+S_{A\hat{O}B}+S_{B\hat{O}C}$$

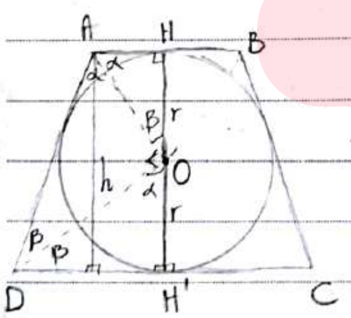
$$\longrightarrow S_{A\hat{B}C}=3\times\left(\frac{1}{2}\times R\times R\times \sin 120^\circ\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

۳- MD قطر است. $\longrightarrow$ OH عمودمنصف BC $\longrightarrow$ $A\hat{B}C:\ OB=OC=R$



از M به A وصل کنیم $\longrightarrow \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{CM} \longrightarrow \frac{\overset{\frown}{BM}}{2}=\frac{\overset{\frown}{CM}}{2} \longrightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2 \longrightarrow$ AM نیمساز $\hat{A}$ است.

۴-



$$S=\frac{1}{2}(AB+CD)\times h \longrightarrow S=\frac{(AB+CD)}{2}\times 2r=r(AB+CD)$$

$$2\alpha+2\beta=180^\circ \longrightarrow \alpha+\beta=90^\circ \longrightarrow A\hat{O}D=90^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{A}H=D\hat{O}H'=\alpha \\ H'\hat{D}O=H\hat{O}A=\beta \end{array}\right\} \longrightarrow A\hat{O}H \sim O\hat{D}H' \longrightarrow \frac{r}{\frac{AB}{2}}=\frac{\frac{CD}{2}}{r} \longrightarrow 2r=\sqrt{AB\times CD}$$

SAMEN

$$\longrightarrow S=r(AB+CD)=\sqrt{AB\times CD}\left(\frac{AB+CD}{2}\right)$$

subject:

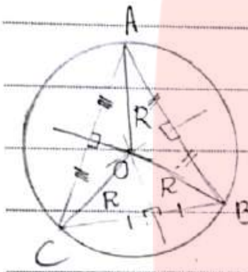
Year: Month: Date:

۵ - الف) $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S}$

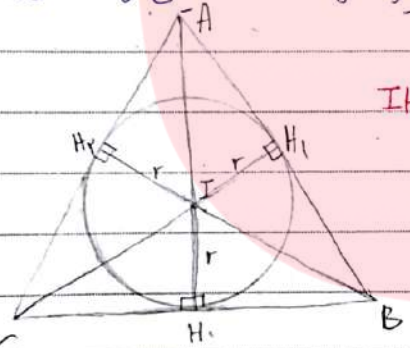
$$\Rightarrow \frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{3p-2p}{S}\Rightarrow\frac{p}{S}=\frac{1}{r}\longrightarrow \boxed{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}}$$

«دایره‌های محیطی و محاطی مثلث»

نکته: نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس این نقطه مرکز دایره محیطی مثلث است، پس هر مثلث همواره محاطی است.



نکته: نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی مثلث نیز از سه ضلع به یک فاصله است، پس این نقطه مرکز دایره محاطی مثلث است، پس هر مثلث همواره محیطی است.



$IH_0=IH_1=IH_2=r$

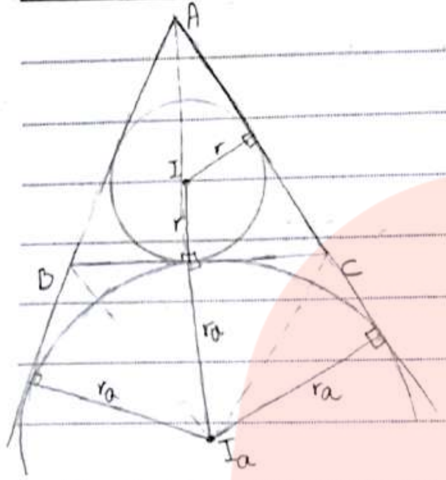
همچنین در مثلث نیز داریم: $r=\frac{S}{p}$ ← نصف محیط

- در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a، شعاع دایره محاطی مثلث را بدست آورید.

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{3}{2}a}\longrightarrow \boxed{r=\frac{\sqrt{3}}{6}a}$$

- دایره‌های محاطی خارجی مثلث: نیمسازهای خارجی دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$، در نقطه‌ی I_A همرس اند، بنابراین I_A مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامیم و شعاع آن را با r_a نمایش می‌دهیم.

همچنین دو دایره محاطی خارجی دیگر در رأس B و C وجود دارد که شعاع آن‌ها را به ترتیب با r_B و r_C نشان می‌دهیم.



محاسبه شعاع دایره محاطی خارجی: حکم: $r_a = \frac{S}{p-a}$

(طبق شکل بالا) $S_{ABC} = S_{AI_aC} + S_{AI_aB} - S_{BI_aC} = \frac{1}{2} r_a \times b + \frac{1}{2} r_a \times c - \frac{1}{2} r_a \times a$

$= \frac{1}{2} r_a (b+c-a)$ ①

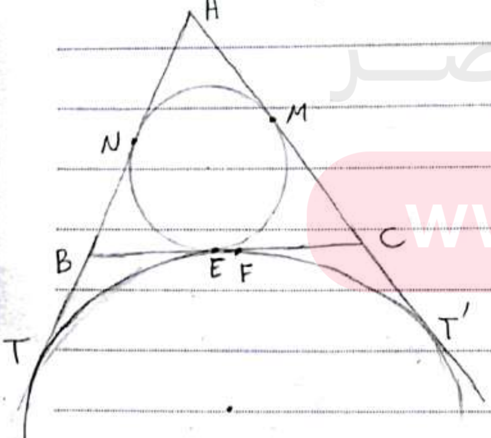
$b+c-a = (a+b+c) - 2a = 2p - 2a$ ②

①,② $\longrightarrow S = \frac{1}{2} r_a (2p-2a) = r_a(p-a) \longrightarrow \boxed{r_a = \frac{S}{p-a}}$

به طور مشابه ثابت می‌شود: $r_b = \frac{S}{p-b} \quad , \quad r_c = \frac{S}{p-c}$

- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث $\hat{ABC}$ با اضلاع آن M ، N و E باشند و T و T' نقاط‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید:

$AM = AN = p-a \ , \ BN = BE = p-b \ , \ CM = CE = p-c \ , \ AT = AT' = p$



می‌دانیم مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره با هم برابرند.

$AN = c - BN$

$AM = b - CM$

$\xrightarrow{+} AN + AM = b + c - (BN + MC)$

$\xrightarrow[BN=BE,\ MC=CE]{AM=AN} 2AN = b + c - (\underbrace{BE+CE}_{a}) = b+c-a = 2p - 2a$

subject:
Year: Month: Date:

$\boxed{AN=AM=p-a}$ ⟶ به همین ترتیب اثبات می‌شود ⟶ $\boxed{BN=BE=p-b}$, $\boxed{CM=CE=p-c}$

$$\left.\begin{array}{l} AT=c+BT \\ AT'=b+CT' \end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} AT+AT'=b+c+BT+CT' \xrightarrow[BT=BF,\ CT'=CF]{AT=AT'} 2AT=b+c+\underbrace{BF+CF}_{a}$$

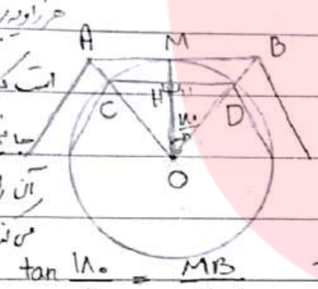
$$\longrightarrow 2AT=a+b+c \longrightarrow \boxed{AT=AT'=p}$$

تمرین های صفحه ۳۰:

۵-ب) $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$

۶- در جزوه به عنوان مثال حل شده است.

۷-

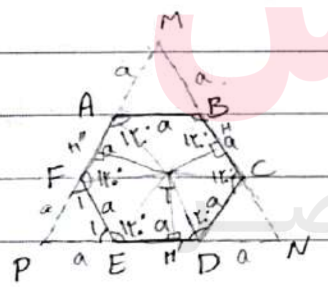


هر زاویه برابر $\frac{360}{n}$ است که OM نیمساز آن را نصف می‌کند

$$\left.\begin{array}{l} \sin\frac{180}{n}=\frac{HD}{OD} \\ HD=\frac{CD}{2},\ OD=r \end{array}\right\} \longrightarrow \sin\frac{180}{n}=\frac{CD}{2r} \xrightarrow{\times 2r} 2r\sin\frac{180}{n}=2r\times\frac{CD}{2r}=CD \checkmark$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\frac{180}{n}=\frac{MB}{OM} \\ MB=\frac{AB}{2},\ OM=r \end{array}\right\} \longrightarrow \tan\frac{180}{n}=\frac{AB}{2r} \xrightarrow{\times 2r} 2r\tan\frac{180}{n}=\cancel{2r}\times\frac{AB}{\cancel{2r}}=AB \checkmark$$

۸-



$$\left.\begin{array}{l} \hat{F}_1=180^\circ-120^\circ=60^\circ \\ \hat{E}_1=180^\circ-120^\circ=60^\circ \end{array}\right\} \longrightarrow \hat{P}=60^\circ \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} \hat{N}=60^\circ,\ \hat{M}=60^\circ$$

الف) ⟶ $M\hat{N}P$ متساوی الاضلاع است.

ب) $\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{M\hat{N}P}}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\times a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 9a^2} \longrightarrow \frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{M\hat{N}P}}=\frac{2}{3}$

پ) $TH+TH'+TH''=MH_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3a=\frac{3\sqrt{3}}{2}a$

ت) $S_{T\hat{A}F}+S_{T\hat{D}E}+S_{T\hat{B}C}=\frac{1}{2}a\times(TH+TH'+TH'')=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \longrightarrow \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}9a^2}=\frac{1}{3}$

$S_{T\hat{B}C}+S_{T\hat{D}E}+S_{T\hat{A}F}=\frac{S_{\text{شش‌ضلعی}}}{2} \longrightarrow S_{T\hat{A}B}+S_{T\hat{E}F}+S_{T\hat{C}D}=\frac{S_{\text{شش‌ضلعی}}}{2}$

$\longrightarrow S_{T\hat{B}C}+S_{T\hat{D}E}+S_{T\hat{A}F}=S_{T\hat{A}B}+S_{T\hat{E}F}+S_{T\hat{C}D}$ (ت

۹) ABCD مربع است. ⟵ قطرهای AC و BD عمود منصف یکدیگرند.

علاوه بر مربع ABCD، مربع QMNP را نیز رسم می‌کنیم و خطوط موجود در شکل عمود منصف‌های اضلاع مربع جدید را نیز تشکیل می‌دهند.

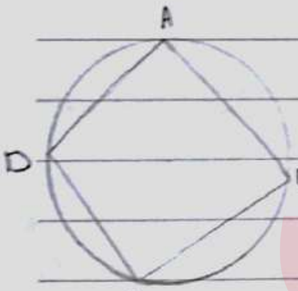
با توجه به اینکه هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است، پس: $BM=MA=AN=ND=DP=PC=CQ=QB$ (1)

Δ مثلث ایجاد شده در شکل متساوی الساقین هستند و زوایای نظیر آن‌ها مساوی‌اند، پس: $\hat{A}=\hat{M}=\hat{B}=\hat{Q}=\hat{C}=\hat{P}=\hat{D}=\hat{N}$ (2)

طبق نتایج (1) و (2)، هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.

• چهارضلعی‌های محاطی و محیطی •

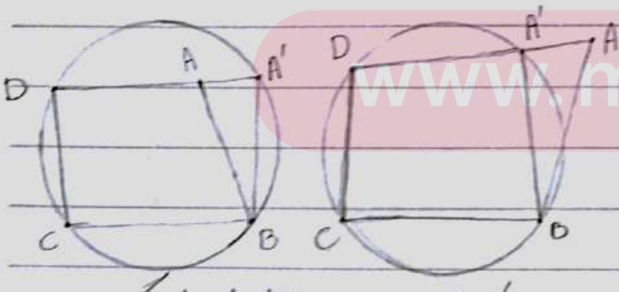
• چهارضلعی محاطی • قضیه: یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.



طرف اول: فرض: $\overset{\frown}{ABCD}$ محاطی است. حکم: $\begin{cases}\hat{A}+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{B}+\hat{D}=180^\circ\end{cases}$

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}+\frac{\overset{\frown}{DAB}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ \checkmark\\ \hat{B}+\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}+\frac{\overset{\frown}{CBA}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ \checkmark\end{cases}$$

طرف دوم: فرض: $\begin{cases}\hat{A}+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{B}+\hat{D}=180^\circ\end{cases}$ حکم: $\overset{\frown}{ABCD}$ محاطی است.



از سه نقطه B، C و D، همواره یک دایره می‌گذرد. (چون هر مثلث یک چندضلعی محاطی است و نقطه همرسی عمود منصف‌ها، مرکز دایره محیطی آن است.)

به برهان خلف، فرض کنیم این دایره از A نگذرد. یا خط AD یا امتداد AD مانند شکل‌های بالا، دایره را در نقطه A' قطع می‌کند. پس

subject:
Year: Month: Date:

چهارضلعی $A'BCD$ محاطی است. | طرف اول ← $\hat{A'}+\hat{C}=180^\circ$ ← $A'BCD$ محاطی

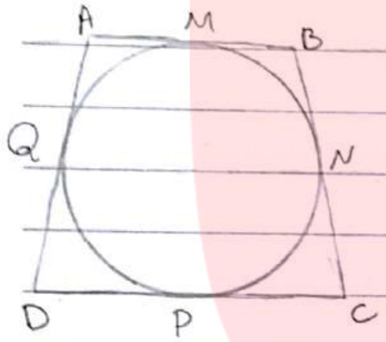
فرض: $\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$ ← $\hat{A}=\hat{A'}$ ✗

که این تناقض است. چون در مثلث $AA'B$، اندازه هر زاویه خارجی از زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگتر است. پس فرض خلف باطل،

و دایره از A نیز می‌گذرد، پس چندضلعی $ABCD$ محاطی است.

چهارضلعی محیطی: قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشد.

طرف اول: فرض: $ABCD$ محیطی است. حکم: $AB+DC=AD+BC$

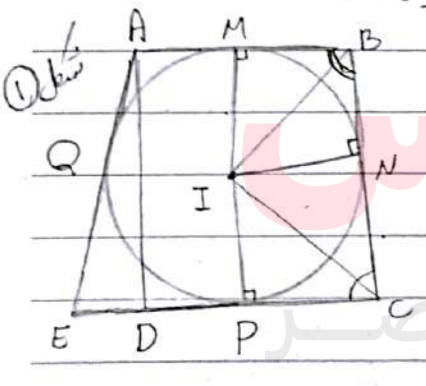


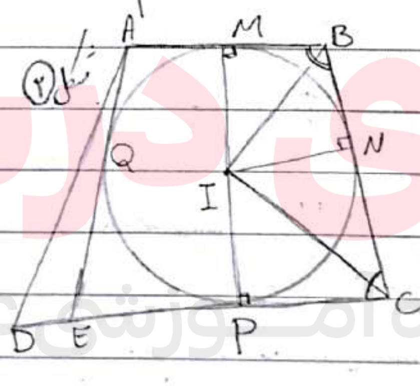
می‌دانیم مماس‌های رسم شده از نقطه‌ی خارج دایره بر دایره با هم برابرند.

$AB+DC=AM+MB+DP+PC=AQ+BN+DQ+CN$

$=(AQ+DQ)+(BN+CN)=AD+BC \longrightarrow \boxed{AB+DC=AD+BC}$ ✓

طرف دوم: فرض: $AB+DC=AD+BC$ حکم: $ABCD$ محیطی است.





نیمسازهای دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در I قطع کنند. از I عمودهایی بر اضلاع AB، BC و DC رسم می‌کنیم. داریم:

I روی نیمساز $\hat{B}$ ← $IM=IN$

I روی نیمساز $\hat{C}$ ← $IN=IP$

← $IN=IM=IP$

subject:
Year: Month: Date:

پس I از سه ضلع AB، BC و DC به یک فاصله است. پس دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM، بر این سه ضلع مماس است، چون شعاع در نقطه تماس بر آن‌ها عمود است. برهان خلف: اگر AD بر این دایره مماس نباشد، از A خط مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم تا DC یا امتداد آن را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی $\overset{\square}{ABCE}$ محیطی است.

$\overset{\square}{ABCE}$ محیطی $\xrightarrow{\text{طرف اول}} AB+EC=AE+BC$

فرض: $AB+DC=AD+BC$

$\xrightarrow{\text{تفاضل}}$ شکل ②: $DC-EC=AD-AE \rightarrow DE+AE=AD$

$A\hat{D}E \xrightarrow{\text{حمار}} DE+AE>AD$

$\rightarrow$ ※

$\xrightarrow{\text{تفاضل}}$ شکل ①: $EC-DC=AE-AD \rightarrow ED+AD=AE$

$A\hat{D}E \xrightarrow{\text{حمار}} ED+AD>AE$

$\rightarrow$ ※

پس فرض خلف باطل و دایره بر AD مماس است. بنابراین چهارضلعی $\overset{\square}{ABCD}$ محیطی است.

ـ محیطی یا محاطی بودن چهارضلعی‌های ذوزنقه، ذوزنقه متساوی‌الساقین، کایت، متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع را مشخص کنید.

۱ـ ذوزنقه: چون زوایای مقابل مکمل نیست، پس محاطی نیست و در حالت کلی نیز جمع دو قاعده و دو ساق با هم برابر نیست، پس در حالت کلی محیطی نیست.

۲ـ ذوزنقه متساوی‌الساقین: زوایای مقابل مکمل‌اند، پس محاطی است و در حالت کلی نیز، محیطی نیست.

۳ـ کایت: در حالت کلی محاطی نیست ولی اگر دو زاویه قائمه داشته باشد، محاطی است و در هر صورت محیطی است.

۴ـ متوازی‌الاضلاع: نه محاطی است، نه محیطی.

۵ـ مستطیل: محاطی است چون زوایای مقابل مکمل‌اند. محیطی نیست چون جمع دو طول با دو عرض با هم برابر نیست.

۶ـ لوزی: محاطی نیست ولی محیطی است.

۷ـ مربع: هم محاطی هم محیطی.

subject:
Year: Month: Date:

تست های زاویه ها در دایره

۱) گزینه ی ۱

$2(3m+4)=20 \to 6m+8=20 \to 6m=12 \to \boxed{m=2}$

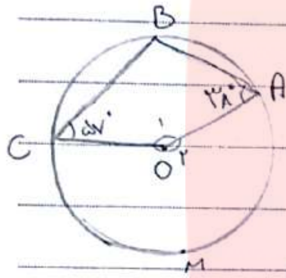
۲) گزینه ی ۳

$\frac{\text{اندازه } \overset{\frown}{AB}}{360^\circ}=\frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{\text{محیط دایره}} \to \frac{45}{360}=\frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{2\pi r} \to \text{طول } \overset{\frown}{AB}=\frac{\pi r}{4}$

$\frac{\text{اندازه } \overset{\frown}{A'B'}}{360^\circ}=\frac{\text{طول } \overset{\frown}{A'B'}}{\text{محیط دایره}} \to \frac{60}{360}=\frac{\text{طول } \overset{\frown}{A'B'}}{2\pi r'} \to \text{طول } \overset{\frown}{A'B'}=\frac{\pi r'}{3}$

$\frac{\pi r}{4}=\frac{\pi r'}{3} \to \boxed{\frac{r}{r'}=\frac{4}{3}}$

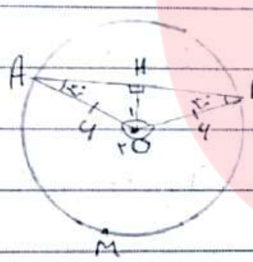
۳) گزینه ی ۲



$\hat B=\frac{\overset{\frown}{AMC}}{2}$, $\hat O_2=\overset{\frown}{AMC} \to 2\hat B=\hat O_2$, $\hat O_2=\hat A+\hat B+\hat C$

$\to \hat B=\hat A+\hat C=95^\circ \to \overset{\frown}{AMC}=2\times 95=190^\circ \to \boxed{\overset{\frown}{ABC}=360^\circ-190^\circ=170^\circ}$

۴) گزینه ی ۴



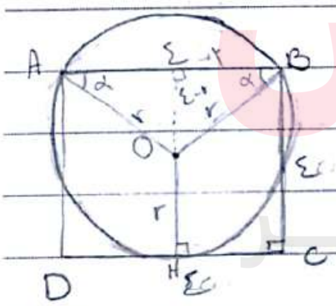
$\frac{\text{اندازه کمان } \overset{\frown}{AMB}}{360^\circ}=\frac{\text{طول کمان } \overset{\frown}{AMB}}{\text{محیط دایره}} \to \frac{\text{اندازه } \overset{\frown}{AMB}}{360^\circ}=\frac{8\pi}{2\pi\times 6}=\frac{2}{3}$

$\text{اندازه } \overset{\frown}{AMB}=240^\circ \to \text{اندازه کمان } \overset{\frown}{AB}=120^\circ \to \hat O_1=120^\circ$

مثلث متساوی الساقین است ← ارتفاع و نیمساز (میانه) منطبق اند → $AH=\frac{\sqrt3}{2}AO \to AH=3\sqrt3$

$\to AB=2AH=2\times 3\sqrt3 \to \boxed{AB=6\sqrt3}$

۵) گزینه ی ۲



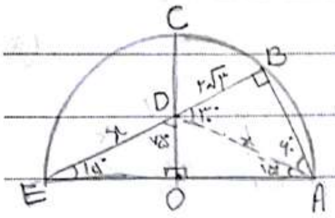
$2^2+(4-r)^2=r^2 \to 4+16-8r+r^2=r^2$

$\to 20=8r \to r=\frac{20}{8}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5$

subject:

Year: Month: Date:

۶) گزینه‌ی ۲

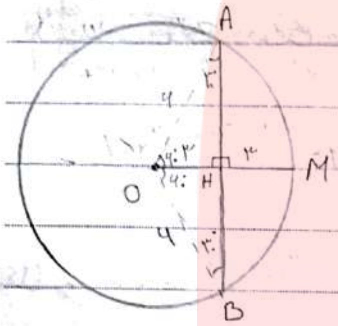


$\widehat{AB}=30^\circ \longrightarrow \hat{E}=\frac{\widehat{AB}}{2}=15^\circ$

$A\hat{B}D:\ \hat{A}=60^\circ \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x=2\sqrt{3} \longrightarrow x=4$

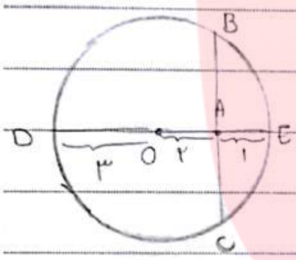
$\longrightarrow AB^2+BD^2=AD^2 \longrightarrow AB^2+12=16 \longrightarrow AB^2=4 \longrightarrow \boxed{AB=2}$

۷) گزینه‌ی ۱



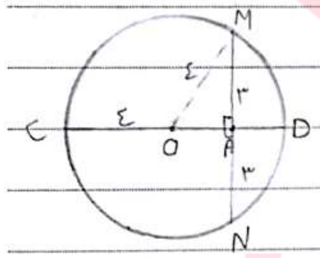
$\frac{\text{اندازه‌ی } \widehat{AMB}}{360^\circ}=\frac{\text{طول } \widehat{AMB}}{2\pi r} \longrightarrow \text{طول } \widehat{AMB}=\frac{120}{360}\times 12\pi=4\pi$

۸) گزینه‌ی ۳ — فرض می‌کنیم که BC از A بگذرد و BC=3 در این صورت: $BA\times AC=AE\times AD$



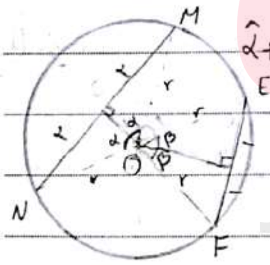
پس چنین وتری وجود ندارد. $\longrightarrow BA\times AC=5\ ,\ BA+AC=3 \longrightarrow \times$

۹) گزینه‌ی ۴



$OA=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

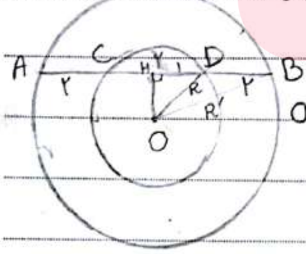
۱۰) گزینه‌ی ۲



$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90^\circ \longrightarrow \sin\alpha=\cos\beta \longrightarrow \frac{2}{r}=\frac{\sqrt{r^2-1}}{r} \longrightarrow 2=\sqrt{r^2-1}$

$\longrightarrow 4=r^2-1 \longrightarrow r=\sqrt{5}$

۱۱) گزینه‌ی ۴

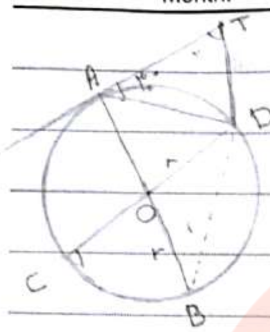


$$\left.\begin{array}{l} O\hat{H}B:\ OH^2+3^2=R'^2 \\ O\hat{H}D:\ OH^2+1^2=R^2 \end{array}\right\} \longrightarrow R'^2-R^2=8 \longrightarrow 9R^2-R^2=8 \longrightarrow R=1,\ R'=3$$

subject:

Year: Month: Date:

۱۲) گزینه ۲



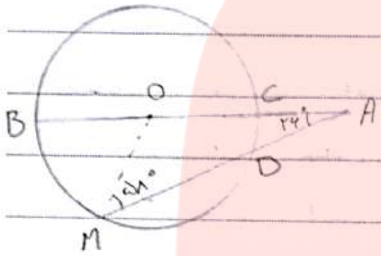
$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = 30^\circ$

$r = r \longrightarrow \hat{B} = \hat{D}$

$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$

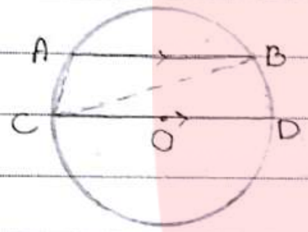
$\longrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{D} \longrightarrow C\hat{D}B = 30^\circ$

۱۳) گزینه ۳



$\hat{O} = 180^\circ - 26^\circ - 58^\circ = 96^\circ \quad , \quad O = \overset{\frown}{MDC} = 96^\circ$

۱۴) گزینه ۴

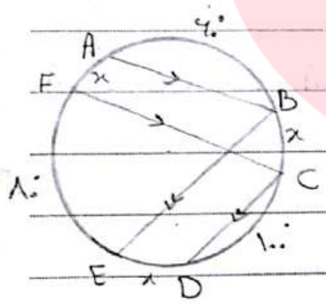


$AB \parallel CD \longrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

$\hat{C} = \frac{180^\circ - 2\overset{\frown}{AC}}{2} = 90^\circ - \overset{\frown}{AC} \quad , \quad \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$\longrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 90^\circ + \overset{\frown}{AC} - \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 90^\circ + \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \longrightarrow \hat{A} - \hat{B} = 90^\circ + \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = 90^\circ$

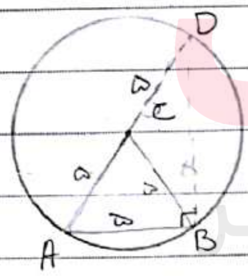
۱۵) گزینه ۴



$\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ED} = x = (180^\circ - 60^\circ - 80^\circ - 100^\circ) \times \frac{1}{3} = 40^\circ$

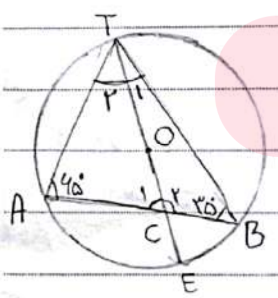
$\longrightarrow F\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{FED}}{2} = \frac{80^\circ + 40^\circ}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

۱۶) گزینه ۱



$BD = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

۱۷) گزینه ۱



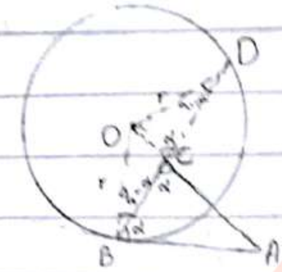
$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{TBE} - \overset{\frown}{TB} = 180^\circ - 65^\circ \times 2 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

$\hat{C}_1 = \frac{\overset{\frown}{AT} + \overset{\frown}{BE}}{2} = \frac{35^\circ \times 2 + 50^\circ}{2} = \frac{70^\circ + 50^\circ}{2} = 60^\circ$

subject:

Year: Month: Date:

۱۸) گزینه‌ی ۲ از O به D وصل می‌کنیم و زاویه‌ی به‌دست‌آمده ۹۰ است.



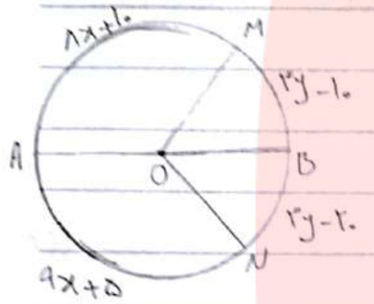
$\hat{C}_1=\hat{C}_2=\hat{B}_1=\alpha$

$B\hat{O}D: BO=DO \to \hat{B}=\hat{D}=90-\alpha$

$\to O\hat{C}D: \hat{O}=180^\circ-(90^\circ-\alpha+\alpha)=90^\circ$

۱۹) گزینه‌ی ۲ ـ با این شرایط مطرح شده در سؤال، تنها دو حالت می‌توان رسم کرد.

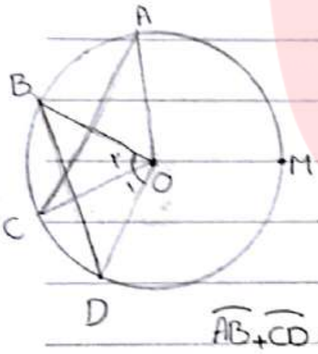
۲۰) گزینه‌ی ۲



$$\left.\begin{array}{l} 9x+5+3y-20=180^\circ \\ 17x+15+6y-30=360^\circ \end{array}\right\} \to 18x+10+6y-40=17x+15+6y-30 \to x=15 \to y=20$$

$\to M\hat{O}N=\overset{\frown}{MBN}=6y-30=120-30=90$

۲۱) گزینه‌ی ۳

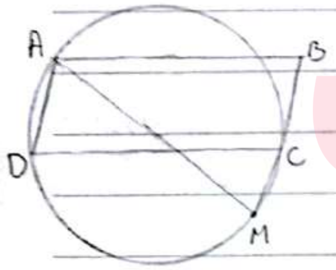


$\overset{\frown}{BC}=20^\circ \to \hat{O}_2=20^\circ \quad , \quad AC=BD \to \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

$\to \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD} \to \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD} \ (1)$

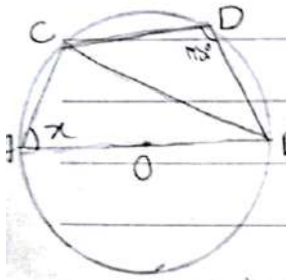
$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AMD}=360^\circ \to \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=140^\circ \xrightarrow{(1)} \overset{\frown}{CD}=70^\circ$

۲۲) گزینه‌ی ۲

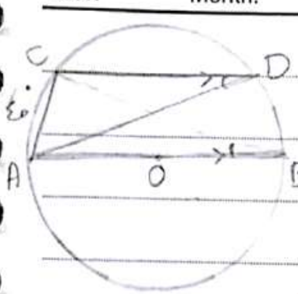


$$\left.\begin{array}{l} \hat{D}=\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} \\ \hat{D}=\hat{B} \end{array}\right\} \to \hat{B}=\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} \to$$ $A\hat{B}M$ متساوی‌الساقین

۲۳) گزینه‌ی ۳



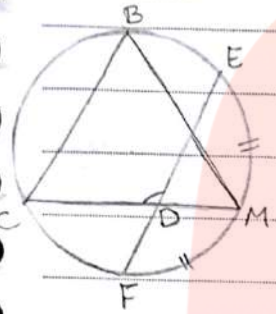
ABCD محاطی $\to \hat{A}+\hat{D}=180^\circ \to \hat{A}=x=55^\circ$



۲۴) گزینه ۳

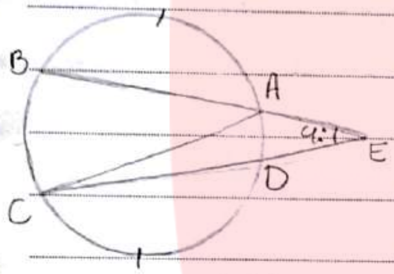
$CD \parallel AB \longrightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}\ ,\ \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{۲} = ۲۰^\circ$

$\hat{A} = \frac{۱۸۰^\circ - (۴۰^\circ + ۴۰^\circ)}{۲} = ۵۰^\circ \longrightarrow A\hat{C}D = ۱۸۰^\circ - (۵۰^\circ + ۲۰^\circ) = ۱۱۰^\circ$



۲۵) گزینه ۳

$\hat{B} + C\hat{D}E = \frac{\widehat{CFM}}{۲} + \frac{\widehat{CBE} + \widehat{FM}}{۲} \underset{\widehat{FM}=\widehat{EM}}{=} \frac{\widehat{CFM} + \widehat{CBE} + \widehat{EM}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$

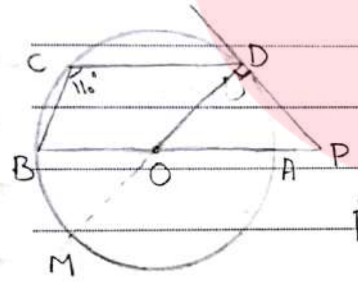


۲۶) گزینه ۲

$\hat{E} = ۶۰^\circ \longrightarrow \widehat{BC} - \widehat{AD} = ۱۲۰^\circ \longrightarrow \widehat{BC} = ۱۲۰^\circ + \widehat{AD}$

$۱۲۰^\circ + \widehat{AD} + \widehat{AD} + ۲\times\left(\frac{۱}{۲}\times(۱۲۰^\circ + \widehat{AD})\right) = ۳۶۰^\circ$

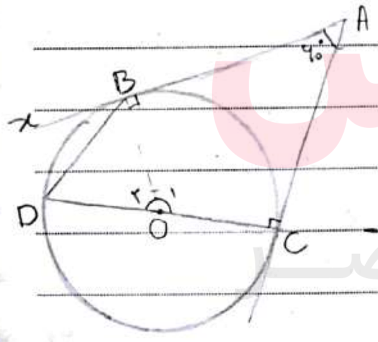
$\longrightarrow ۲۴۰^\circ + ۳\widehat{AD} = ۳۶۰^\circ \longrightarrow ۳\widehat{AD} = ۱۲۰^\circ \longrightarrow \widehat{AD} = ۴۰^\circ \longrightarrow A\hat{C}D = \frac{\widehat{AD}}{۲} = \frac{۴۰^\circ}{۲} = ۲۰^\circ$



۲۷) گزینه ۴

$\hat{C} = ۱۱۰^\circ = \frac{۱۸۰^\circ + \widehat{AD}}{۲} \longrightarrow \widehat{AD} = ۴۰^\circ\ ,\ \widehat{AD} = \widehat{BC}$

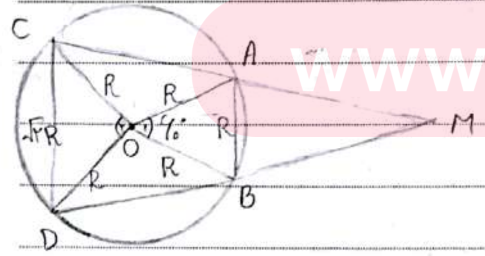
$\hat{P} = \frac{\widehat{BCD} - \widehat{AD}}{۲} = \frac{\cancel{\widehat{BC}} + \widehat{CD} - \cancel{\widehat{AD}}}{۲} = \frac{۱۰۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$



۲۸) گزینه ۳

$\hat{O}_۱ + \hat{B} + \hat{C} + \hat{A} = ۱۸۰^\circ \longrightarrow \hat{O}_۱ = ۱۲۰^\circ \longrightarrow \hat{O}_۲ = ۶۰^\circ \longrightarrow \widehat{BD} = ۶۰^\circ$

$\longrightarrow x\hat{B}D = \frac{\widehat{BD}}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$



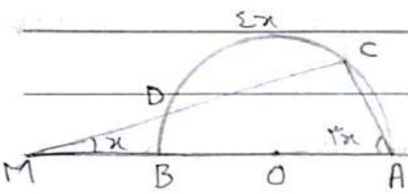
۲۹) گزینه ۱

$R^۲ + R^۲ = (\sqrt{۲}R)^۲ \longrightarrow ۲R^۲ = ۲R^۲$

$\longrightarrow \hat{O}_۲ = ۹۰^\circ \longrightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{۲} = \frac{۹۰^\circ - ۶۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$

subject:
Year: Month: Date:

۳۰) گزینه ۲

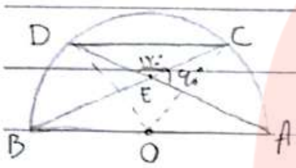


$$\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2}\rightarrow 3x=\frac{4x+\overset{\frown}{BD}}{2}\rightarrow \overset{\frown}{BD}=2x$$

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}}{2}\rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AC}-2x}{2}\rightarrow \overset{\frown}{AC}=4x$$

$$\rightarrow 2x+4x+4x=180^\circ\rightarrow x=18^\circ\rightarrow \overset{\frown}{AC}=72^\circ$$

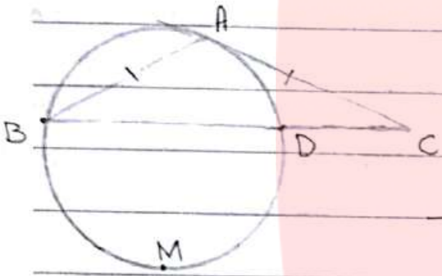
۳۱) گزینه ۳



$$120^\circ=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}}{2}\rightarrow 240^\circ=180^\circ+\overset{\frown}{CD}\rightarrow \overset{\frown}{CD}=60^\circ$$

$\rightarrow D\hat{O}C$ متساوی‌الاضلاع $\rightarrow DC=R\rightarrow \frac{S_{C\hat{D}E}}{S_{A\hat{B}E}}=\left(\frac{CD}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}$

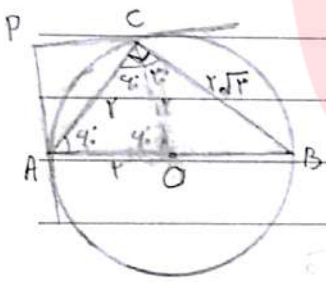
۳۲) گزینه ۳



$$\hat{C}=\hat{B}\rightarrow \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AD}}{2}\rightarrow \overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{AD}$$

$$\rightarrow \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}=3\overset{\frown}{AD}=360^\circ-222^\circ=138^\circ\rightarrow \overset{\frown}{AD}=46^\circ\rightarrow \hat{C}=\frac{46^\circ}{2}=23^\circ$$

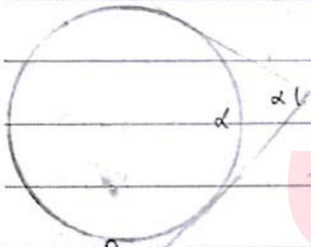
۳۳) گزینه ۴



$$AB=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

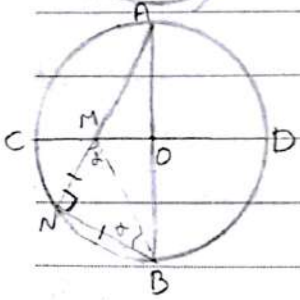
$$\hat{P}=\frac{\overset{\frown}{CBA}-\overset{\frown}{AC}}{2}=\frac{120^\circ+180^\circ-60^\circ}{2}=120^\circ$$

۳۴) گزینه ۲



$$\alpha=\frac{360^\circ-\alpha-\alpha}{2}\rightarrow 4\alpha=360^\circ\rightarrow \alpha=90^\circ$$

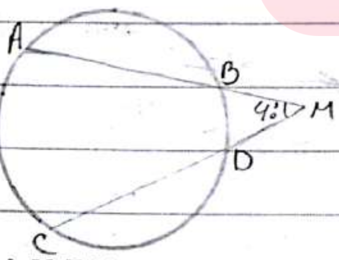
۳۵) گزینه ۴



$$\alpha+\alpha=90^\circ\rightarrow \alpha=45^\circ\ ,\ MA=MB\rightarrow \hat{A}=\hat{B}$$

$$\rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\alpha\rightarrow 2\hat{A}=45^\circ\rightarrow A=22.5^\circ$$

۳۶) گزینه ۳



$$AB=CD\rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}=x,\ 60^\circ=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}}{2}$$

$$\rightarrow \overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}=120^\circ\ ,\ \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=360^\circ-2x$$

$$\rightarrow \overset{\frown}{AC}=240^\circ-x\rightarrow \overset{\frown}{ACD}=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}=240^\circ-x+x=240^\circ$$