

کتابی با منطق ریاضی

گزاره: به جمله‌ی خبری که در حال حاضر یا آئینده، دارای ارزش درست (T-د) یا نادرست (F-ن) باشد، گزاره می‌گوئیم، که معمولاً آن را با p, q, r, s و ... نمایش می‌دهیم.

توجه:

۱- گزاره فقط دارای یک ارزش است یعنی نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

۲- جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره نیستند.

مثال: از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کرده و ارزش آنها را در صورت امکان بنویسید.

الف) ایران کشور آسیایی است. **گزاره‌ی درست است.**

ب) هر عدد زوج بزرگتر از ۱ را می‌توان به صورت حاصلجمع دو عدد اول نوشت. (حوس بلد باخ) **گزاره ولی ارزش آن مشخص نیست.**

پ) آیا $۲+۲$ برابر ۴ است؟ **گزاره نیست.**

ت) چه هوای خوبی! **گزاره نیست.**

ث) در پرتاب یک تاس احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید برابر $\frac{۱}{۳}$ است. **گزاره‌ی درست است.**

ج) هر معادله‌ی درجه دوم دارای دو جواب حقیقی است. **گزاره نادرست است.**

د) $۹-۱ > ۳+۴$ **گزاره‌ی نادرست است.**

جدول ارزش گزاره‌ها:

جدول یک گزاره ای:

P
ص
ج

جدول دو گزاره ای:

P	q
ص	ص
ص	ج
ج	ص
ج	ج

جدول سه گزاره ای:

P	q	r
ص	ص	ص
ص	ص	ج
ص	ج	ص
ص	ج	ج
ج	ص	ص
ج	ص	ج
ج	ج	ص
ج	ج	ج

نتیجه: جدول ارزش گزاره ای دارای 2^n حالت است.

گزاره نام: هر جمله‌ی خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود.

به عنوان نمونه " عدد فرد است " یک گزاره نامرابطه.

اگر $a=l$ در نظر گرفته شود، گزاره ای درست است

و اگر $a=۴$ در نظر گرفته شود، گزاره ای نادرست است.

دامنه متغیر: مجموعه‌ی مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیر در گزاره نام قرار داد، دامنه متغیر آن گزاره نام است. اگر با D نمایش دهیم.

مجموعه جواب: زیر مجموعه‌ها را از دامنه‌ی متغیر است که به ازای تمام عضوهای آن گزاره نما، تبدیل به گزاره‌ی درست شود و با S نمایش می‌دهیم.

سوال: دامنه‌ی متغیر گزاره‌هاها را زیر داده شده است. در هر مورد مجموعه جواب را تعیین کنید.

الف) a عدد فرد است. $(D = \{1, 2, 3, 4\})$ $S = \{1, 3\}$

ب) x مضرب ۷ است. $(D = \mathbb{Z})$

$S = \{0, \pm 7, \pm 14, \dots\}$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$. $(D = \{1, 2, \dots, 6\})$

$S = \{1, 2, \dots, 6\} = D$

ت) $(D = \mathbb{R})$ $2x^2 + 4x + 3 = 0$

$S = \{-1, -\frac{3}{2}\}$

حل معادله: $2+3=5 \leftarrow x_1 = -1$ و $x_2 = -\frac{3}{2}$

$S = \{-1, 0, 1\}$

ث) $(D = \mathbb{Z})$ $|x| < 2$

www.my-dars.ir

تقیض گزاره: تقیض هر گزاره مانند P را با $\sim P$ نمایش می‌دهیم.

سوال: تقیض گزاره‌ی « 3 عدد فرد است» را بنویسید.

3 عدد فرد نیست یا چنین نیست که 3 عدد فرد باشد.

P	$\sim P$
$>$	ن
ن	$>$

جدول ارزش یی گزاره
به همراه تقیض آن

توجه: نقیض نقیض هر گزاره هم ارزش خود آن گزاره است. $\sim(\sim P) \equiv P$

P	$\sim P$	$\sim(\sim P)$
>	ن	>
ن	>	ن

این ادعا طبق جدول رو بر رو ثابت است:

$\sim(\sim P) \equiv P$

ترکیب فصلی دو گزاره: هرگاه P و Q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « P یا Q » را با نماد $P \vee Q$ نمایش داده و آن را ترکیب فصلی دو گزاره نامیم. این ترکیب وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند و اگر حداقل یکی از دو گزاره درست باشد، ترکیب درست است.

توجه: به رابطی منطقی \vee فاصل گفته می شود.

سؤال: معادله $2x^2 - 4x = 0$ را حل کنید.

$$x(2x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{2}$$

P	Q	$P \vee Q$
>	>	>
>	ن	>
ن	>	>
ن	ن	ن

جدول ارزش گزاره مرکب $P \vee Q$:

سؤال: ثابت کنید $\sim P \vee P \equiv T$

P	$\sim P$	$\sim P \vee P$
>	ن	>
ن	>	>

$$\sim P \vee P \equiv T$$

سؤال: جدول ارزش هر مورد را رسم کنید

الف) $P \vee (\sim P)$

P	Q	$\sim Q$	$\sim Q \vee P$	$P \vee (\sim Q \vee P)$
>	>	ن	>	>
>	ن	>	>	>
ن	>	ن	ن	ن
ن	ن	>	>	>

ب) $(P \vee q) \vee (\sim P \vee r)$

P	q	r	$\sim P$	$P \vee q$	$\sim P \vee r$	$(P \vee q) \vee (\sim P \vee r)$
>	>	>	ن	>	>	>
>	>	ن	ن	>	ن	>
>	ن	>	ن	>	>	>
>	ن	ن	ن	>	ن	>
ن	>	>	>	>	>	>
ن	>	ن	>	>	>	>
ن	ن	>	>	ن	>	>
ن	ن	ن	>	ن	>	>

$\Rightarrow (P \vee q) \vee (\sim P \vee r) \equiv T$

پ) $\sim (P \vee \sim q)$

P	q	$\sim q$	$P \vee \sim q$	$\sim (P \vee \sim q)$
>	>	ن	>	ن
>	ن	>	>	ن
ن	>	ن	ن	>
ن	ن	>	>	ن

$\sim (\sim P \vee (P \vee q)) \equiv F$

تمرین: ثابت کنید

P	q	$\sim P$	$P \vee q$	$\sim P \vee (P \vee q)$	$\sim (\sim P \vee (P \vee q))$
>	>	ن	>	>	ن
>	ن	ن	>	>	ن
ن	>	>	>	>	ن
ن	ن	>	ن	>	ن

$\Rightarrow \sim (\sim P \vee (P \vee q)) \equiv F$

توجه: ترکیب فعلی دارای خاصیت ها جا به جایی و شرکت پذیری است.

① $P \vee q \equiv q \vee P$

به عبارت دیگر:

② $P \vee (q \vee r) \equiv (P \vee q) \vee r$

رابطه به کمک جدول صورت می گیرد.

وکتور سید یاسد اراد (1371) اسلامشهر (1358) ش 1 - سالروز اعلام انقلاب فرهنگ (1357) ش 1 - روز
 نکته: $P \vee T \equiv T$, $P \vee F \equiv P$

ترکیب عطفی دو گزاره: هرگاه P و Q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب « P و Q » را با نماد $P \wedge Q$ نمایش داده‌اند و آن را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم. این ترکیب وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند، و اگر حداقل یکی از گزاره‌ها نادرست باشند، ترکیب نادرست است.

توجه: به رابطه‌ی منطقی \wedge عاطف گفته می‌شود.

P	Q	$P \wedge Q$
\wedge	\wedge	\wedge
\wedge	\neg	\neg
\neg	\wedge	\neg
\neg	\neg	\neg

جدول ارزش گزاره‌های مرکب $P \wedge Q$:

سؤال: سؤال دهم $\neg P \wedge P \equiv F$

P	$\neg P$	$\neg P \wedge P$
\wedge	\neg	\neg
\neg	\wedge	\neg

$\Rightarrow \neg P \wedge P \equiv F$

سؤال ۱: جدول ارزش هر مورد را بنویسید.

الف $\neg P \wedge (P \wedge P)$

P	Q	$\neg P$	$P \wedge P$	$\neg P \wedge (P \wedge P)$
\wedge	\wedge	\neg	\wedge	\neg
\wedge	\neg	\neg	\neg	\neg
\neg	\wedge	\wedge	\neg	\neg
\neg	\neg	\wedge	\neg	\neg

$\neg P \wedge (P \wedge P) \equiv F$

ب $\neg(P \wedge \neg Q)$

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
\wedge	\wedge	\neg	\neg	\wedge
\wedge	\neg	\wedge	\wedge	\neg
\neg	\wedge	\neg	\neg	\wedge
\neg	\neg	\wedge	\neg	\wedge

توجه: ترکیب عطفی دارای خاصیت‌های جابه‌جایی و شریک پذیری است. به عبارت دیگر:

① $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

② $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

رابطه‌ها به کمک جدول صورت می‌گیرد.

نکته: $P \wedge T \equiv P, P \wedge F \equiv F$

* قوانین توزیع پذیری (بخشی) *

الف) $P \wedge (q \vee r) \equiv (P \wedge q) \vee (P \wedge r)$

P	q	r	$P \wedge q$	$P \wedge r$	$q \vee r$	$P \wedge (q \vee r)$	$(P \wedge q) \vee (P \wedge r)$
>	>	>	>	>	>	>	>
>	>	<	>	<	>	>	>
>	<	>	<	>	>	>	>
>	<	<	<	<	<	<	<
<	>	>	<	>	>	<	<
<	>	<	<	<	<	<	<
<	<	>	<	<	>	<	<
<	<	<	<	<	<	<	<

همه ارزشها برابر است

ب) $P \vee (q \wedge r) \equiv (P \vee q) \wedge (P \vee r)$

P	q	r	$P \vee q$	$P \vee r$	$q \wedge r$	$P \vee (q \wedge r)$	$(P \vee q) \wedge (P \vee r)$
>	>	>	>	>	>	>	>
>	>	<	>	>	<	>	>
>	<	>	>	>	<	>	>
>	<	<	>	>	<	>	>
<	>	>	>	>	>	>	>
<	>	<	>	>	<	>	>
<	<	>	<	>	<	<	<
<	<	<	<	<	<	<	<

همه ارزشها برابر است

سؤال: عبارت $\sim P \wedge (q \vee P)$ را ساده کنید.

عبارت $\equiv (\sim P \wedge q) \vee (\sim P \wedge P) \equiv \sim P \wedge q$

F

* قوانین دموورگان *

$$\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q \quad \text{الف}$$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P \vee \sim Q$
>	>	ن	ن	>	ن	ن
>	ن	ن	>	ن	>	>
ن	>	>	ن	ن	>	>
ن	ن	>	>	ن	>	>

هم ارزند

$$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q \quad \text{ب}$$

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$	$\sim P \wedge \sim Q$
>	>	ن	ن	>	ن	ن
>	ن	ن	>	>	ن	ن
ن	>	>	ن	>	ن	ن
ن	ن	>	>	ن	>	>

هم ارزند

سؤال: عبارت $\sim(P \vee \sim Q) \vee (P \wedge Q)$ را ساده کنید.

$$\text{عبارت} \equiv (\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \equiv Q \wedge (\underbrace{\sim P \vee P}_T) \equiv Q$$

سؤال: در صورتی که $\sim P \vee Q \equiv F$ باشد عبارات زیر را ساده کنید.

$$\hookrightarrow P \equiv T, Q \equiv F$$

$$\text{الف} \quad P \wedge Q \equiv F$$

$$\text{ب} \quad P \vee \sim Q \equiv T \vee T \equiv T$$

$$\text{پ} \quad (P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P) \equiv \sim Q \wedge (P \vee \sim P) \equiv \sim Q \wedge T \equiv \sim Q$$

تمرین: اگر ارزش P و $(P \wedge \sim Q) \sim$ درست باشد، ارزش Q را تعیین کنید

$$\sim(P \wedge \sim Q) \equiv \sim P \vee Q \equiv F \vee Q \equiv Q \Rightarrow Q \equiv T$$

تمرین: اگر $P \wedge Q \equiv F$ ثابت کنید $(\sim P \vee Q) \wedge P \equiv F$

$$(\sim P \vee Q) \wedge P \equiv (\underbrace{\sim P \wedge P}_F) \vee (\underbrace{P \wedge Q}_F) \equiv F$$

* قوانین جذب *

الف) $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge (P \vee Q)$
>	>	>	>
>	ن	>	>
ن	>	>	ن
ن	ن	ن	ن

همه ارزشها

ب) $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee (P \wedge Q)$
>	>	>	>
>	ن	ن	>
ن	>	ن	ن
ن	ن	ن	ن

همه ارزشها

* نمونه سوال *

۱- اگر $p \wedge q \equiv T$ باشد، درباره‌ی ارزش $p \vee (\neg q)$ چه می‌توان گفت؟

$$p \vee (\neg q) \equiv T$$

$$\hookrightarrow p \equiv T, q \equiv T$$

↓
T

۲- صحت هم‌ارزی‌های زیر را بدین جدول ثابت کنید.

الف) $\sim p \wedge (p \wedge q) \equiv F$

$$\sim p \wedge (p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge p) \wedge q = F \wedge q \equiv F$$

ب) $(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge q$

$$\text{چپ} \equiv [\sim p \vee (\underbrace{\sim q \wedge q}_F)] \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv \sim p \wedge (p \vee q) \equiv (\underbrace{\sim p \wedge p}_F) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p \wedge q$$

پ) $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim p$

$$\text{چپ} \equiv \sim p \wedge (\underbrace{q \vee \sim q}_T) \equiv \sim p$$

ت) $(p \vee \sim q) \vee (p \wedge q) \equiv p \vee \sim q$

$$\text{چپ} \equiv \underbrace{[p \vee (p \wedge q)]}_{p} \vee \sim q \equiv p \vee \sim q$$

ث) $p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F$

$$\text{چپ} \equiv p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\equiv (\underbrace{p \wedge \sim p}_F) \wedge \sim q \equiv F$$

$$\text{ج) } (P \vee \sim Q) \vee (\sim P \vee Q) \equiv T$$

$$\text{پای} \equiv (P \vee \sim P) \vee (\sim Q \vee Q) \equiv T \vee T \equiv T$$

$$\text{د) } P \wedge \sim [Q \vee (P \wedge \sim Q)] \equiv F$$

$$\text{پای} \equiv P \wedge \sim [(Q \vee P) \wedge \overbrace{(Q \vee \sim Q)}^T]$$

$$\equiv P \wedge \sim (Q \vee P) \equiv P \wedge (\sim Q \wedge \sim P)$$

$$\equiv \underbrace{(P \wedge \sim P)}_F \wedge \sim Q \equiv F$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

۳- اگر $q \wedge r \equiv F$ ثابت کنید $(p \vee q) \wedge (r \vee p) \equiv p$

$$(p \vee q) \wedge (r \vee p) \equiv p \vee (q \wedge r) \equiv p$$

۴- اگر ارزش P و $(P \wedge \sim q) \sim$ درست باشند، ارزش q را تعیین کنید.

$$\sim(P \wedge \sim q) \equiv T \Rightarrow \underbrace{\sim P \vee q}_{F} \equiv T \Rightarrow q \equiv T$$

۵- اگر $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv F$ ثابت کنید $p \equiv q$

برهان خلف: $p \neq q$ پس: $p \equiv \sim q$ و $\sim p \equiv q$ ،
بنابراین:

$$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim p) \\ \equiv p \vee (\sim p) \equiv T \rightarrow \text{تناقض است}$$

روش دوم: واضح است که $p \wedge \sim q \equiv F$ و $\sim p \wedge q \equiv F$ هستند.

$$p \equiv p \vee F \equiv p \vee (\sim p \wedge q) \equiv \underbrace{(p \vee \sim p)}_T \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q$$

$$q \equiv q \vee F \equiv q \vee (p \wedge \sim q) \equiv \underbrace{(q \vee p)}_T \wedge (q \vee \sim q) \equiv q \vee p$$

۶- اگر گزاره‌های $\sim q \vee \sim r$ و $\sim p \vee r$ درست باشند، ارزش گزاره‌ی $\sim p \vee \sim q$ چیست؟

$$(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r) \equiv T$$

$$\Rightarrow [(\sim p \vee r) \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p \vee r) \wedge r] \equiv T$$

$$\Rightarrow [(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q \wedge r)] \vee (\sim p \wedge \sim r) \vee \underbrace{(r \wedge \sim r)}_F \equiv T$$

$$\Rightarrow [\sim p \wedge \underbrace{(\sim q \vee \sim r)}_T] \vee (\sim q \wedge r) \equiv T$$

$$\Rightarrow \sim p \vee (\sim q \wedge r) \equiv T$$

$$\Rightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge \underbrace{(\sim p \vee r)}_T \equiv T$$

$$\Rightarrow \sim p \vee \sim q \equiv T$$

۷- اگر $(P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q) \equiv P$ ثابت کنید $Q \equiv F$.

برهان خلف: بگویم $Q \equiv T$ باشد پس در فرض سوال داریم:

$$(P \wedge F) \vee (\sim P \wedge T) \equiv P$$

$$\Rightarrow \sim P \wedge T \equiv P \Rightarrow \sim P \equiv P \rightarrow \text{تناقض}$$

۸- اگر $P \wedge Q \equiv P \wedge R$ ، $P \vee Q \equiv P \vee R$ ، ثابت کنید $Q \equiv R$.

صحت قانون جذب را میتوان نوشت:

$$Q \equiv Q \wedge (Q \vee P)$$

$$\equiv Q \wedge (P \vee R)$$

$$\equiv (Q \wedge P) \vee (Q \wedge R)$$

$$\equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

$$\equiv R \wedge (P \vee Q)$$

$$\equiv R \wedge (P \vee R) \stackrel{\text{جذب}}{\equiv} R$$

۹- اگر $P \wedge Q \equiv F$ باشد ثابت کنید $\sim Q \wedge (P \vee Q) \equiv P$.

$$\sim Q \wedge (P \vee Q) \equiv (\sim Q \wedge P) \vee (\underbrace{\sim Q \wedge Q}_F)$$

$$\equiv (\sim Q \wedge P) \vee (P \wedge Q)$$

$$\equiv P \wedge (\underbrace{\sim Q \vee Q}_T) \equiv P$$

۱۰- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) عدد a فرد یا اول است.
 a اول نیست $\wedge a$ فرد نیست $\equiv (a$ اول است $\vee a$ فرد است) \sim

a نه اول است و نه فرد

ب) عدد صفر زوج و نامنتهاست.

صفر منفی است \vee صفر زوج نیست \equiv (صفر نامنتهاست \wedge صفر زوج است) \sim

صفر عددی منفی است یا زوج نیست

پ) $(P \vee \sim Q) \wedge (Q \vee P)$

$$\sim [(P \vee \sim Q) \wedge (Q \vee P)]$$

$$\equiv \sim [P \vee (\underbrace{\sim Q \wedge Q}_F)] \equiv \sim P$$

۱۱ - ثابت کنید $(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv F$

$$\equiv \sim p \wedge [q \wedge (p \vee \sim q)]$$

$$\equiv \sim p \wedge [(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim q)]$$

$$\equiv \sim p \wedge (p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge p) \wedge q \equiv F$$

۱۲ - با استفاده از جدول درستی هم ارزی زیر را بررسی کنید:

$$[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)] \equiv q$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q)$	$\sim p \vee \sim q$	$q \wedge (\sim p \vee \sim q)$	$[p \wedge (\sim p \vee q)] \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)]$
>	>	ن	ن	>	>	ن	ن	>
>	ن	ن	>	ن	ن	>	ن	ن
ن	>	>	ن	>	ن	>	>	>
ن	ن	>	>	>	ن	>	ن	ن

هم ارزی برقرار است

* آزمون تست *

۱- به جملای خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست باشد، ... گوئیم.

- (۱) گزاره‌ها (۲) گزاره (۳) قضیه (۴) هم‌ارزی منطقی

۲- عبارت "x یک مثلث قائم‌الزاویه است." چگونه عبارتی است؟

- (۱) گزاره (۲) گزاره‌ها (۳) اتحاد (۴) هم‌ارزی

۳- کدام یک از عبارات های زیر درست است؟

(۱) $(P \vee \sim Q) \sim$ وقتی درست است که P و Q هر دو درست باشند

(۲) $(P \vee \sim Q) \sim$ " " " " " " " " نادرست باشد

(۳) " " " " " " " " که P درست و Q نادرست باشد

(۴) " " " " " " " " که P نادرست و Q درست باشد

۴- فرض کنیم $(P_1 \vee P_2) \vee P_3$ و $(P_1 \vee P_2) \sim$ درست باشند کدام یک

از گزینه‌های زیر درست است؟

- (۱) $\sim P_3$ (۲) P_3 (۳) $P_1 \wedge P_2$ (۴) $\sim P_1 \wedge P_2$

فرضی: $\sim(P_1 \vee P_2) \equiv T \Rightarrow P_1 \vee P_2 \equiv F \Rightarrow P_1 \equiv F, P_2 \equiv F$

فرضی: $(P_1 \vee P_2) \vee P_3 \equiv T \Rightarrow F \vee (F \vee P_3) \equiv T \Rightarrow P_3 \equiv T$

۵- گزاره‌ی $(P \wedge Q) \vee (\sim P \vee Q)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

- (۱) $\sim P \vee Q$ (۲) $\sim Q \vee P$ (۳) $P \wedge \sim Q$ (۴) $\sim P \wedge Q$

$(P \wedge Q) \vee (\sim P \vee Q) \equiv P \vee Q$

م جذب

۶- هواگاه برای هر گزاره‌ی دلخواه مانند P ، اگر P ارزش درست داشته باشد داریم $f(P) = 1$ و اگر ارزش P نادرست باشد داریم $f(P) = 0$

در این صورت کدام یک از گزاره‌ها نادرست است؟

$$F(P \vee Q) = F(P) + F(Q) - F(P)F(Q) \quad (1)$$

$$F(P \wedge Q) = F(P) \cdot F(Q) \quad (2)$$

$$F(P \wedge Q) = F(P) + F(Q) \quad (3) \checkmark$$

$$F(P) + F(\neg P) = 1 \quad (4)$$

گزینه (۳) نادرست است زیرا اگر P و Q درست باشند نگاه :

تصادف می‌کند $\rightarrow F(P \wedge Q) = 1$ ، $F(P) + F(Q) = 1 + 1 = 2$

گزینه (۱) درست است زیرا :

$f(P)$	$f(Q)$	$f(P \vee Q)$	$f(P) + f(Q) - f(P)f(Q)$
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱
۰	۰	۰	۰

که برابرند \rightarrow

گزینه (۲) درست است زیرا :

$f(P)$	$f(Q)$	$f(P \wedge Q)$	$f(P) \cdot f(Q)$
۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۰
۰	۰	۰	۰

که برابرند \rightarrow

گزینه (۴) درست است زیرا :

$f(P)$	$f(\neg P)$	$f(P) + f(\neg P)$
۱	۰	۱
۰	۱	۱

$$\rightarrow f(P) + f(\neg P) = 1$$

تولید شرطی دوزاره :

اگر دوزاره ی ساده ی P و Q را با لفظ « اگر P آنگاه Q » با هم ترکیب کنیم، گزاره ی مرکبی ساخته می شود که آنرا ترکیب شرطی دوزاره گویند. در صورت $P \Rightarrow Q$ نمایش می دهند، که در آن P را مقدم و Q را نتیجه می گویند.

سؤال: اگر مثلث متساوی الساقین باشد، آنگاه زوایای پای دو ساق با هم برابرند.

سؤال: اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آنگاه دو قطرش برابرند.

سؤال: اگر $x \neq 0$ آنگاه $x^2 > 0$ است.

صورت های مختلف بیان گزاره شرطی $P \Rightarrow Q$:

① اگر P آنگاه Q

② P نتیجه می دهد Q را

③ Q اگر P

④ P شرط کافی است برای Q

⑤ Q شرط لازم است برای P

مای درس

گروه آموزشی عرب

www.my-dars.ir

P	Q	$P \Rightarrow Q$
>	>	>
>	ن	ن
ن	>	>
ن	ن	>

جدول ارزش ترکیب شرطی :

سؤال: جدول ارزش گزاره ی مرکب $\neg P \Rightarrow (P \wedge Q)$ را رسم کنید.

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$\neg P \Rightarrow (P \wedge Q)$
>	>	ن	>	>
>	ن	ن	ن	>
ن	>	>	ن	ن
ن	ن	>	ن	ن

سؤال: کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) اگر عددی بر ۲ بخش پذیر باشد آنگاه بر ۴ بخش پذیر است.

ب) اگر مقدم درست باشد و افعی درست که تا آن نیز درست است پس در کل گزاره صحیح است.

پ) $2 < 3 \Rightarrow -2 < -3$ گزاره نادرست است.

ت) 42 عدد اول است $\Rightarrow 574962 = 3^{11}$ گزاره نادرست است.

نکته: اگر مقدم نادرست باشد آنگاه گزاره شرطی درست است. در این حالت نویسیم: به انتهای مقدم، گزاره درست است.

سؤال: ارزش گزاره‌ی « اگر 2 فرد است آنگاه $574962 = 3^{11}$ » چیست؟
به انتهای مقدم درست است.

قضیه: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (تبدیل شرطی به فصلی)

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

که هم ارزند

توجه: گزاره $p \Rightarrow q$ را در نظر بگیرید. عکس ترکیب شرطی $q \Rightarrow p$ است و عکس نقیض ترکیب شرطی $\sim p \Rightarrow \sim q$ خواهد بود.

که می‌توان اثبات کرد: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$ (برساخت حلقه)

P	q	$\sim P$	$\sim q$	$P \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim P$
>	>	ن	ن	>	>
>	ن	ن	>	ن	ن
ن	>	>	ن	>	>
ن	ن	>	>	>	>

که هم ارزشند

رابطه (دو طرفه) :

رابطه (دو طرفه) :

$$P \Rightarrow q \equiv \sim P \vee q \equiv q \vee \sim P \equiv \sim q \Rightarrow \sim P$$

مسئله: ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ ، عددی فرد باشد، آنگاه a عدد فرد است.
برهان خلف: بگویم a عدد فرد نباشد پس a زوج است.

$$a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k' \Rightarrow a^2 \text{ زوج است}$$

تمرین ۱
۱- ثابت کنید (برای جدول):

الف) $\sim(P \Rightarrow q) \equiv P \wedge \sim q$

ب) $\sim(\sim P \vee q) \equiv P \wedge \sim q$

ج) $(P \wedge q) \Rightarrow (P \vee q) \equiv T$

$$\text{ب) } \equiv \sim(P \wedge q) \vee (P \vee q)$$

$$\equiv (\sim P \vee \sim q) \vee (P \vee q)$$

$$\equiv (\sim P \vee P) \vee (\sim q \vee q)$$

$$\equiv T \vee T \equiv T$$

$$\text{ب) } P \Rightarrow (\sim P \Rightarrow Q) \equiv T$$

$$\text{هپ} \equiv P \Rightarrow (P \vee Q)$$

$$\equiv \sim P \vee (P \vee Q)$$

$$\equiv (\sim P \vee P) \vee Q$$

$$\equiv T \vee Q \equiv T$$

$$\text{ت) } (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \vee P) \equiv Q$$

$$\text{هپ} \equiv (\sim P \vee Q) \wedge (Q \vee P)$$

$$\equiv Q \vee (\sim P \wedge P)$$

$$\equiv Q \vee F \equiv Q$$

۲- ارزش گزاره‌ی $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ را تعیین کنید. این گزاره همیشه درست است. اگر به بعد جدول قابل اثبات می‌باشد.

ترکیب دو شرط دوزاره =

هرگاه P و Q دوزاره باشند، گزاره مرکب $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ را به صورت $P \Leftrightarrow Q$ می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرط P و Q نامیم که با لفظ « P اگر و تنها اگر Q خوانده می‌شود».

مثال: مثلث متساوی الساقین است اگر و تنها اگر زوایای پای دو ساق برابر باشند.

مثال: $9 > 6 \Leftrightarrow 2 \times 2 = 4$

صورت‌ها مختلف بیان گزاره‌ی دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$:

- ① P اگر و تنها اگر Q
- ② اگر P آنگاه Q و برعکس
- ③ P شرط لازم و کافی برای Q است.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
>	>	>
>	ن	ن
ن	>	ن
ن	ن	>

جدول ارزش ترکیب دو شرط:

گروه آموزشی عصر
www.amy.dans.ir

مثال: جدول ارزش $P \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee Q)]$ را تشکیل دهید.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \vee Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee Q)$	$[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \vee Q)] \Leftrightarrow P$
>	>	>	>	>	>
>	ن	ن	>	ن	>
ن	>	>	>	>	>
ن	ن	>	ن	ن	>

بنابراین گزاره همیشه درست است.

مسئله: ثابت کنید $P \Leftrightarrow Q \equiv \sim P \Leftrightarrow \sim Q$

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

$$\equiv (\sim Q \Rightarrow \sim P) \wedge (\sim P \Rightarrow \sim Q)$$

$$\equiv \sim P \Leftrightarrow \sim Q$$

نکته: نقیض گزاره‌ی دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ به صورت $\sim P \Leftrightarrow Q$ یا $P \Leftrightarrow \sim Q$ می‌باشد. به عبارت دیگر: $\sim(P \Leftrightarrow Q) \equiv \sim P \Leftrightarrow Q \equiv P \Leftrightarrow \sim Q$
حجت این نکته به کمک جدول قابل اثبات است.

مسئله: نقیض گزاره «شرط لازم و کافی برای آن به انسان پیروز شود آن است که تلاش کند» را بنویسید.

شرط لازم و کافی برای آن به انسان پیروز نشود آن است که تلاش نکند.

یا
شرط لازم و کافی برای آن به انسان پیروز نشود آن است که تلاش نکند.

مسئله: نتایج دهید:

$$P \Leftrightarrow T \equiv P \quad (\text{الف})$$

$$P \Leftrightarrow T \equiv (P \Rightarrow T) \wedge (T \Rightarrow P)$$

$$\equiv (\underbrace{\sim P \vee T}_T) \wedge (\underbrace{F \vee P}_P)$$

$$\equiv T \wedge P$$

$$\equiv P$$

روش اول (بدون جدول):

P	T	$P \Leftrightarrow T$
ح	ح	ح
ح	ن	ن
ن	ح	ن
ن	ن	ح

که هم ارزند و آ

روش دوم (بسیار جدول):

ب) $P \Leftrightarrow F \equiv \sim P$

$P \Leftrightarrow F \equiv \sim P \Leftrightarrow T \stackrel{\text{الف}}{\equiv} \sim P$

تمرین:

۱- نقیض هر یک از گزاره های زیر را بنویسید.

الف) اگر عددی منفی باشد آنگاه مربع آن مثبت است.
می دانیم $P \wedge \sim Q \equiv \sim (P \Rightarrow Q)$ بنابراین:

عدم منفی است و مربع آن مثبت نیست.

ب) شرط لازم و کافی برای آنکه عددی فرد باشد آن است که مجذور آن عدد فرد باشد.

شرط لازم و کافی برای آنکه عدد فرد باشد آن است که مجذور آن عدد فرد باشد.

۲- به کمک جدول ارزش گزاره ها ثابت کنید:

الف) $(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
>	>	>	>	>	>	>	>
>	>	ن	>	ن	ن	ن	ن
>	ن	>	>	>	>	>	>
>	ن	ن	>	ن	ن	>	ن
ن	>	>	>	>	>	>	>
ن	>	ن	>	ن	>	ن	ن
ن	ن	>	ن	>	>	>	>
ن	ن	ن	ن	>	>	>	>

که هم ارزی برقرار است

$$P \vee (q \Leftrightarrow r) \equiv (P \vee q) \Leftrightarrow (P \vee r) \quad \text{ب)}$$

P	q	r	$q \Leftrightarrow r$	$P \vee (q \Leftrightarrow r)$	$P \vee q$	$P \vee r$	$(P \vee q) \Leftrightarrow (P \vee r)$
>	>	>	>	>	>	>	>
>	>	<	<	>	>	>	>
>	<	>	<	>	>	>	>
>	<	<	>	>	>	>	>
<	>	>	>	<	<	<	>
<	>	<	<	<	<	<	>
<	<	>	<	<	<	<	>
<	<	<	>	>	>	>	>

هم ارزی برقرار است

۳- فرض کنید P_1 و P_2 و P_3 و ... و P_n گزاره‌های دکانه باشند ثابت کنید گزاره‌ی زیر یک گزاره‌ی نادرست است:

$$P_1 \wedge (P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_3) \wedge \dots \wedge (P_{n-1} \Rightarrow P_n) \wedge \sim P_n$$

برهان خلف: بیایم گزاره درست باشیم:

$$\begin{array}{l}
 P_1 \equiv T \\
 P_1 \Rightarrow P_2 \equiv T \rightarrow P_2 \equiv T \\
 \vdots \\
 P_{n-1} \Rightarrow P_n \equiv T \rightarrow P_n \equiv T \\
 \sim P_n \equiv T \rightarrow P_n \equiv F
 \end{array}$$

تناقض

۴- اگر ارزش گزاره‌ی $[r \wedge (P \vee q)] \Rightarrow q$ نادرست باشد ارزش هر یک از گزاره‌های P و q و r را تعیین کنید.

$$\begin{array}{l}
 r \wedge (P \vee q) \equiv T \rightarrow r \equiv T, \quad P \vee q \equiv T \\
 q \equiv F \rightarrow P \equiv T
 \end{array}$$

د- هرگاه ارزش گزاره ی $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow Q$ درست باشد ثابت کنید

$$P \wedge Q \equiv T$$

حالت اول: $\begin{cases} Q \equiv T \\ Q \Rightarrow P \equiv T \end{cases} \rightarrow P \equiv T \rightarrow P \wedge Q \equiv T$

حالت دوم: $\begin{cases} Q \equiv F \\ Q \Rightarrow P \equiv F \end{cases} \rightarrow$ غیرواقع است

آزمون تست :

۱- از درستی $P \wedge Q$ و $P \Rightarrow \sim Q$ ، درستی کدام گزینه نتیجه می شود؟

- ① Q ② $\sim Q$ ③ $\sim P$ ④ هیچ کدام

$P \wedge Q \equiv T \rightarrow P \equiv T, Q \equiv T$
 $P \Rightarrow \sim Q \equiv T \rightarrow \sim Q \equiv T \rightarrow Q \equiv F \rightarrow$ ②

۲- $\sim(P \Rightarrow \sim Q)$ معادل کدام است؟

- ① $P \wedge \sim Q$ ② $\sim P \wedge Q$ ③ $P \wedge Q$ ④ $\sim(P \wedge Q)$

$\sim(\sim P \vee \sim Q) \equiv P \wedge Q$ گزینه ۳

www.my-dars.ir

۳- تفسیر گزاره « اگر شبها هم قدر بودی ، شب قدری قدر بودی » کدام است؟

① اگر شبی قدر باشد ، آن شب قدر نیست .

② شبی هست که قدر است ولی بی قدر نیست .

③ شبی هست که قدر نیست و بی قدر هم نیست

④ هر شب قدر است ولی بی قدر نیست ✓

$\sim(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \sim Q$

۴- اگر P و Q دو گزاره باشند کدام گزاره یک گزاره می همیشه درست است؟

① $(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

② $(P \vee \sim P) \Rightarrow Q$

③ $P \Rightarrow (P \wedge Q)$

④ $\top \equiv F \Rightarrow Q \leftarrow (P \wedge \sim P) \Rightarrow Q$ ✓

۵- عکس نقیض گزاره $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ کدام است؟

① $(R \Rightarrow Q) \Rightarrow \sim P$

② $\sim(\sim Q \vee R) \Rightarrow \sim P$ ✓

③ $(\sim R \Rightarrow \sim Q) \Rightarrow \sim P$

④ $(\sim R \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \sim P$

$\sim(Q \Rightarrow R) \Rightarrow \sim P \equiv \sim(\sim Q \vee R) \Rightarrow \sim P$

سورها: برای بیان عبارت‌ها یا استفاده از نمادها ریاضی به جای
 «به ازای هر» یا «برای همه» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد \forall
 و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists
 استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نام دارند.

مسئله: گزاره‌های زیر را با نماد ریاضی بیان کرده و ارزش آنها را تعیین کنید.
 الف) مربع هر عدد حقیقی، نامتقر است.

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ درست

ب) مربع هر عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی خود آن عدد است.

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$ نادرست زیرا $0.5 > 0.25$ نیست

پ) مجذور هر عدد منفر، منفر است.

$\forall x \in \mathbb{R}^- : x^2 < 0$ نادرست

ت) نصف هر عدد صحیح از خود آن عدد کوچکتر است.

$\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{2}x < x$ نادرست زیرا $1 < 0.5$ نیست

ث) معکوس برخی از اعداد صحیح، صحیح است.

$\exists x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ درست (به عنوان نمونه $1 \in \mathbb{Z}$ و $\frac{1}{1} \in \mathbb{Z}$)

ج) بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.

$\exists x \in \mathbb{O} : x \in \mathbb{P}$ درست

$\mathbb{P} =$ مجموعه اعداد اول $\mathbb{O} =$ مجموعه اعداد فرد طبیعی $\mathbb{E} =$ مجموعه اعداد زوج طبیعی