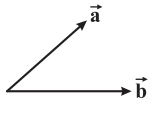


۱۰ دو بردار  $\vec{a} = (2, m-1, 3)$  و  $\vec{b} = (m-2, 0, 1)$  را در نظر بگیرید. اگر اندازه دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{a} - \vec{b}$  با هم برابر باشد. طول بردار  $(\vec{a} + \vec{b})$  را بیابید.

۱۱ اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  دو بردار مطابق شکل باشند و  $\vec{a}'$  تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  روی  $\vec{b}$  باشد، ثابت کنید:  $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$



۱۲ دو بردار  $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = \vec{k} - \vec{j} + \vec{i}$  مفروضند.

الف) زاویه بین بردار  $\vec{a} \times \vec{b}$  با محور x ها را بیابید.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع که توسط بردارهای  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $2\vec{b}$  بنا شده را بیابید.

۱۳ اگر حجم متوازی‌السطوح که توسط سه بردار  $\vec{a} = (m, 1, 2)$  و  $\vec{b} = (1, -1, 1)$  و  $\vec{c} = (0, 1, -2)$  برابر با ۱۰ باشد. طول ارتفاع وارد بر وجه شامل دو بردار  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  را بیابید. ( $m > 0$ )

۱۱ ماتریس  $A = [i - 2j]_{3 \times 3}$  و ماتریس  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$  در نظر بگیرید.

الف) حاصل  $A \times B$  را به دست آورید.

ب) دترمینان  $A + B$  را به دست آورید.

۱۲ اگر جواب دستگاه  $\begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 2x + by = 1 \end{cases}$  معادلات خطی به صورت  $(3, 2)$  باشند، وارون ماتریس ضرایب را به دست آورید.

۱۳ اگر  $A$  یک ماتریس اسکالر مرتبه ۳ باشد به طوری که آخرین درایه آن ۴ باشد، آنگاه حاصل دترمینان  $(2A^{-1})$  را به دست آورید.

۱۴ الف) عبارت درست و نادرست را مشخص کنید.

۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشند نیمسازهای ۲ خط متقاطع است.

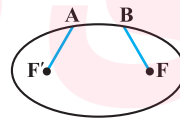
۲) اگر صفحه‌ای موازی محور سطح مخروطی آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل یک هذلولی است.

ب) دو نقطه  $A$  و  $B$  خارج خط  $d$  مفروضند. نقطه‌ای که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از خط  $d$  به فاصله ۲ سانتی‌متر است، در کدام حالت مسئله بی‌شمار جواب دارد. (با رسم یک شکل حالت را مشخص کنید).

۱۵ دایره‌ای به مرکز  $(2, 3)$  روی محور  $y$  ها وترى به طول ۴ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید و نقاط برخورد دایره با محور  $y$  ها را بیابید.

۱۶ کانون‌های یک بیضی  $(3, 0)$  و  $(-3, 0)$  و طول قطر بزرگ بیضی ۱۰ است. وضعیت نقطه  $(2, 3)$  نسبت به این بیضی چگونه است؟ (داخل - خارج - روی بیضی)

۱۷ دو نقطه  $A$  و  $B$  روی بیضی  $F$  و  $F'$  کانون‌های بیضی‌اند به طوری که  $A$  به کانون  $F'$  نزدیک‌تر و  $B$  به کانون  $F$  نزدیک‌تر است. اگر  $AF' = BF$  باشد و  $AF$  و  $BF'$  یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند  $M$  قطع کنند، نشان دهید مثلث  $FMF'$  متساوی‌الساقین است و  $M$  روی قطر کوچک بیضی است.



۱۸ سهمی به معادله  $y^2 - 8x + 4y = 12$  مفروض است. الف) مختصات کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

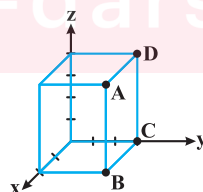
ب) نقاط برخورد سهمی با دایره  $x^2 + (y+2)^2 = 4$  را بیابید.

۱۹ الف) تصویر قائم نقطه  $A$  روی صفحه  $Z=2$  را بیابید.

ب) قرینه نقطه  $A$  نسبت به صفحه  $Z=0$  را بیابید.

پ) معادله بال (پاره خط)  $AB$  را بنویسید.

ت) معادله وجه  $ABCD$  را بنویسید.



الف | ۱

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 16 \\ 6 & -8 & 12 \\ 7 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{ب)}$$

$$|A + B| = (-16) - 6(1) = -22$$

$$a(3) + 3(2) = 2 \rightarrow a = -\frac{4}{3} \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 3 \\ 2 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$2(2) + b(2) = 1 \rightarrow b = -\frac{3}{4}$$

$$|A| = \frac{10}{3} - 6 = -\frac{8}{3}$$

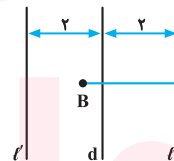
$$A^{-1} = \frac{1}{-\frac{8}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -3 \\ 2 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{8} & \frac{9}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 4^3$$

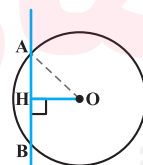
$$|2A^{-1}| = 2^3 \frac{1}{|A|} = 8 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{8}$$

الف (۱) درست (۲) درست

ب) عمودمنصف B و A بر یکی از دو خط موازی  $l$  و  $l'$  منطبق باشد، نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند عمودمنصف پاره خط AB است. نقاطی که از خط  $d$  به فاصله ۲ سانتی متر باشد دو خط موازی  $l$  و  $l'$  است.



$$AH = HB = \frac{1}{2} AB = 2 \quad \text{۱۵}$$



$$OH = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{1+0}} = 2$$

$$\Delta OHA : OH^2 + AH^2 = OA^2$$

$$\rightarrow OA^2 = 4 + 4 = 8$$

$$\rightarrow OA = 2\sqrt{2}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$$

$$\frac{y}{x} = \text{محور } y \rightarrow 2^2 + (y-3)^2 = 8 \rightarrow (y-3)^2 = 4$$

$$\rightarrow y-3 = \pm 2 \rightarrow \begin{cases} y=5 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow (2, 5), (2, 1)$$

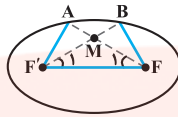
$$M(2, 2), 2a = 10$$

$$MF + MF' = \sqrt{1+9} + \sqrt{25+9} < 10$$

MF + MF' < 2a  $\rightarrow$  در داخل بیضی قرار دارد. | ۱۶

نقاط A و B روی بیضی قرار دارند بنا به تعریف بیضی داریم:

$$\left. \begin{aligned} AF + AF' &= 2a \\ BF + BF' &= 2a \end{aligned} \right\} \rightarrow AF + AF' = BF + BF' \rightarrow AF = BF'$$



دو مثلث  $\Delta AFF'$  و  $\Delta BFF'$  بنا به تساوی سه ضلع همنهشت هستند.

$$(AF' = BF, FF' = FF', AF = BF') \rightarrow \hat{F} = \hat{F}'$$

مثلث  $\Delta FMF'$  متساوی الساقین است.  $MF = MF'$

پس M روی عمودمنصف  $FF'$  یعنی قطر کوچک بیضی قرار دارد.

$$(y+2)^2 = \lambda(x+2) \quad \text{الف) } \Delta$$

رأس سهمی  $(-2, -2)$  و فاصله کانونی  $a = 2$  سهمی افقی رو به راست است.

مختصات کانون سهمی برابر با:  $F = (-2 + 2, -2) = (0, -2)$

و معادله خط هادی سهمی برابر است با:  $x = -2 - 2 = -4$

$$\begin{cases} (y+2)^2 = \lambda(x+2) \\ x^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$\rightarrow x^2 + \lambda x + 12 = 0$$

$$(x+6)(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = -6 \rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$x = -2 \rightarrow (y+2)^2 = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (-2, -2)$$

$$A = (2, 2, 4) \xrightarrow{\text{تصویر}} A'(2, 2, 2) \quad \text{الف) } \Delta$$

$$A = (2, 2, 4) \xrightarrow[\text{Z}]{\text{قرینه}} A''(2, 2, -4) \quad \text{ب)}$$

$$AB = \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases} \quad \text{پ)}$$

$$ABCD \text{ وجه } \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 2 \\ 0 \leq z \leq 4 \end{cases} \quad \text{ت)}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{۱۰}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, m-1, 2) \cdot (m-2, 0, 1) = 2m - 4 + 2 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\vec{a} = (2, -\frac{1}{2}, 2), \vec{b} = (-\frac{3}{2}, 0, 1)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3) \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 9} = \sqrt{\frac{66}{4}} = \frac{\sqrt{66}}{2}$$

۱۱ بردار  $\vec{a}'$  موازی بردار  $\vec{b}$  است.

$$\vec{a}' = K\vec{b} \quad (1)$$

بردار  $\vec{a} - \vec{a}'$  بر بردار  $\vec{b}$  عمود است.

$$(\vec{a} - \vec{a}') \perp \vec{b} \rightarrow (\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a}' = K\vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - K\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow K = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \quad (2)$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \quad \text{با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:}$$

$$\vec{a} = (-1, 0, -1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = (-1, 0, 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 135^\circ$$

$$S = |(\vec{a} + \vec{b}) \times 2\vec{b}| = |2\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{b} \times \vec{b}| = 2|\vec{a} \times \vec{b}| \quad \text{ب)}$$

$$= 2\sqrt{1+0+1} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{حجم متوازی السطوح} = |(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))| = |(m, 1, 2) \cdot (1, 2, 1)| \quad \text{۱۳}$$

$$= |m + 2 + 2| = 10$$

$$\begin{cases} m = 6 & \checkmark \\ m = -14 & * \end{cases}$$

$$\text{طول ارتفاع} = \frac{\text{حجم متوازی السطوح}}{\text{مساحت متوازی الاضلاع } b \text{ و } c} = \frac{10}{|b \times c|}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6}$$