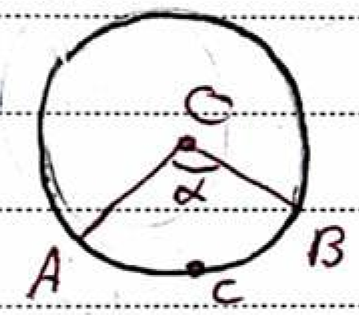
۱) دایره: مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که فاصله‌اش از نقطه‌ی ثابت واقع در آن صفحه مقدار ثابتی باشد، دایره است که به نقطه‌ی ثابت مرکز دایره و به مقدار ثابت شعاع دایره گفته می‌شود.

۲) وتر: پاره خطی که دو نقطه‌ی متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند وتر آن دایره گفته می‌شود.

۳) قطر: وتری که از مرکز دایره می‌گذرد قطر آن دایره نامیده می‌شود.

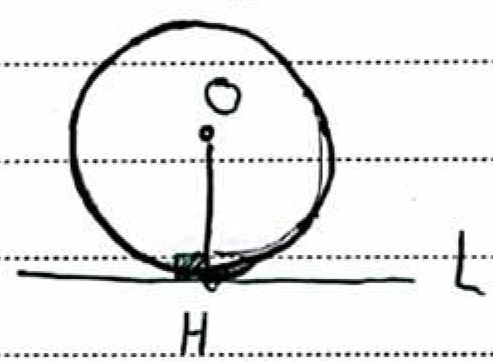
۴) زاویه مرکزی: زاویه‌ای که راس آن مرکز دایره باشد، زاویه مرکزی گفته می‌شود و با توجه به تعریف اندازه‌ی کمان نظیر هر زاویه مرکزی در دایره به حسب درجه همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبروی کمان است.

$\overset{\frown}{ACB} = \hat{O} = \alpha$



۵) خط قاطع: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند قاطع نسبت به دایره گفته می‌شود.

۶) نقطه‌ی H روی دایره C به مرکز O را در نظر می‌گیریم خط L که از نقطه‌ی H می‌گذرد بر شعاع OH عمود است خط مماس بر دایره در نقطه H نامیده می‌شود.

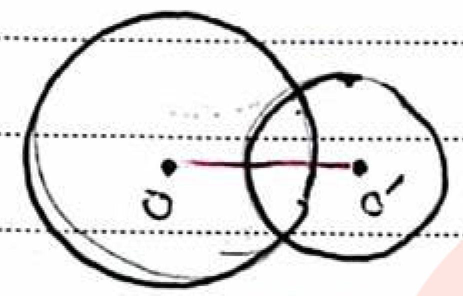


وضعیت دو دایره نسبت به هم ← خط المرکزی = $d = OO'$

r

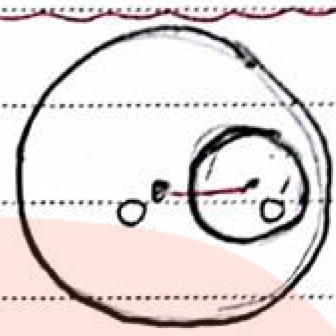
r'

۱- متقاطع



$r - r' < d < r + r'$

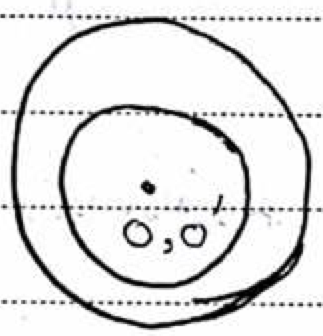
۲- درون هم



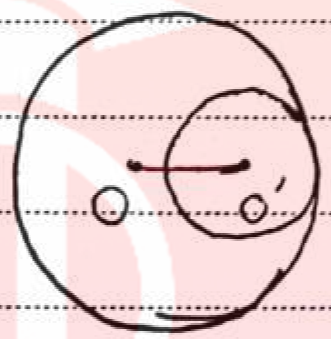
$d < r - r'$

۳- هم مرکز

$d = 0$



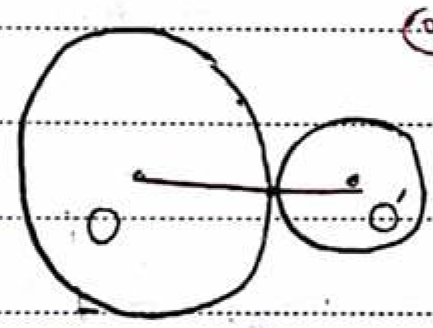
۴- مماس درون



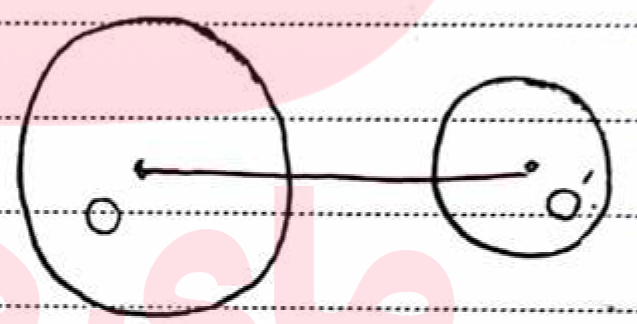
$d = r - r'$

۵- مماس بیرون

$d = r + r'$



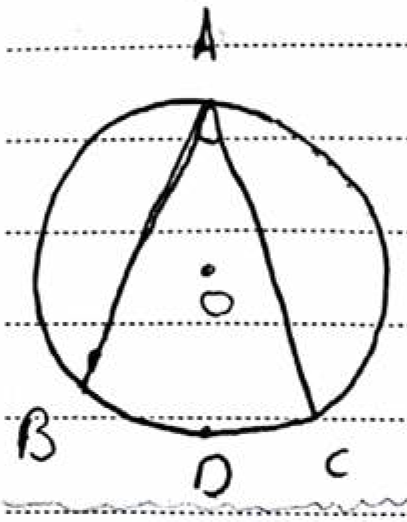
۶- بیرون از هم



$d > r + r'$

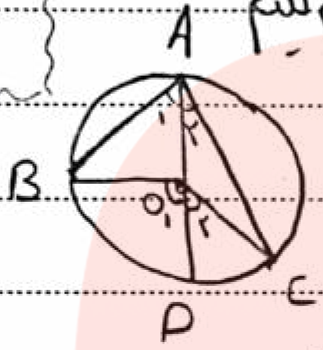
زاویه محاطی: زاویه‌ای که راس آن روی دایره و ضلع هایش دو وتر از دایره باشند، زاویه محاطی نامیده می‌شود.

قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبروی آن است؟



حکم: $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BDC}}{2}$

① برهان: ابتدا قطر AD را رسم می‌کنیم و از B به O و C به O وصل می‌کنیم



$$O_1 \xrightarrow[ABO]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 = A_1 + B \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ABO]{OA=OB \ \text{شعاع دایره}} \hat{A}_1 = \hat{B} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A}_1$$

$$O_1 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} O_1 = \overset{\frown}{BD}$$

$$\Rightarrow 2\hat{A}_1 = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \boxed{\hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}}$$

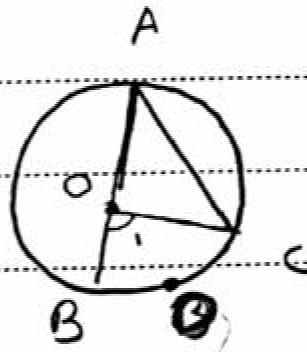
$$O_2 \xrightarrow[ACO]{\text{زاویه خارجی}} O_2 = A_2 + \hat{C} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ACO]{OA=OC} \hat{A}_2 = \hat{C} \Rightarrow \hat{O}_2 = 2\hat{A}_2$$

$$O_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} O_2 = \overset{\frown}{CD}$$

$$\Rightarrow 2A_2 = CD \Rightarrow A_2 = \frac{CD}{2}$$

$$\Rightarrow A = A_1 + A_2 = \frac{BD}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{BDC}{2}$$

② برهان: ابتدا از C به O وصل می‌کنیم

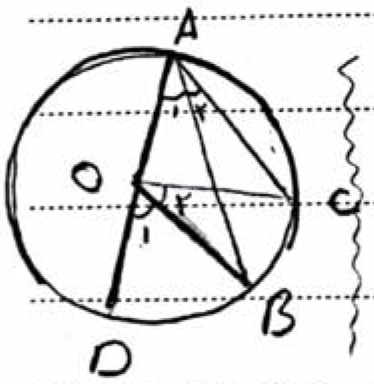


$$\hat{O}_1 \xrightarrow[\hat{ACO}]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{C} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ACO]{OA=OC \ \text{شعاع دایره}} \hat{A} = \hat{C} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A}$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 = \overset{\frown}{BDC}$$

$$\Rightarrow 2A = \overset{\frown}{BDC}, \quad A = \frac{\overset{\frown}{BDC}}{2}$$

③ برهان: ابتدا قطر AD را رسم می‌کنیم و سپس از B و C به O وصل می‌کنیم



$$O_1 \xrightarrow[ABD]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 = \hat{A}_1 + \hat{B} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین } ABD]{OA=OB \ \text{شعاع}} \hat{A}_1 = \hat{B} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A}_1$$

$$\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 = \overset{\frown}{BD}$$

$$\Rightarrow 2\hat{A}_1 = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{BD}{2}}$$

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 \xrightarrow[ACO]{\text{زاویه خارجی}} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{C} \xrightarrow[\text{متساوی الساقین}]{OA=OC} A_1 + A_2 = C \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$$

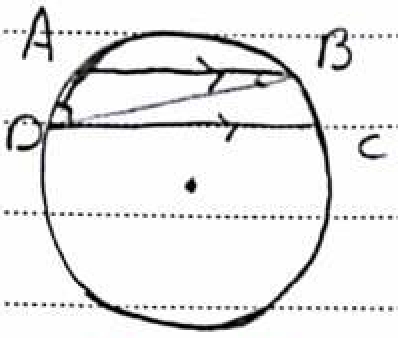
$$\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \overset{\frown}{CBD}$$

$$\Rightarrow 2(A_1 + A_2) = \overset{\frown}{CBD} \Rightarrow A_1 + A_2 = \frac{CBD}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{CBD}{2} - \hat{A}_1$$

$$A_2 = \frac{\overset{\frown}{CBD}}{2} - \hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{CBD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

Subject
Date

ثابت کنید در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.



فرض: $AB \parallel CD$

حکم: $\widehat{AD} = \widehat{BC}$

جواب: ابتدا از B به D وصل می‌کنیم

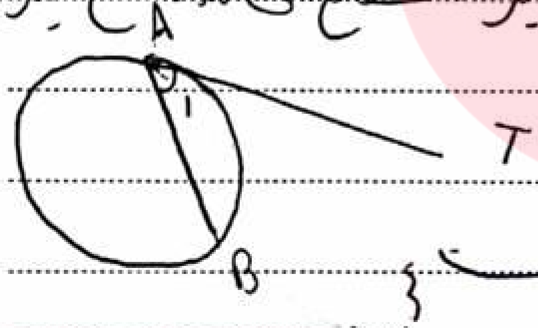
$\hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2}$ زاویه محاطی (۱)

$\hat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2}$ زاویه محاطی (۲)

$\left.\begin{matrix} AB \parallel CD \\ \text{مورب } BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$ (۳)

$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$

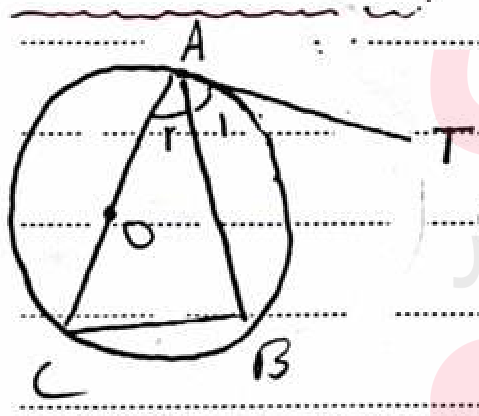
زاویه‌ی ظلّی: زاویه‌ای که راسش روی دایره است، یک ضلعش دایره را قطع می‌کند و ضلع دیگرش بر دایره مماس است؛ زاویه ظلّی نامیده می‌شود.



$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}$

قضیه: اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلّی برابر با نصف کمان روبروی آن است.

برهان: ابتدا قطر Ac را رسم می‌کنیم و در ادامه از B به C وصل می‌کنیم.



$\widehat{AC} = 180°$

$\hat{B}$ زاویه محاطی: $\frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$ $\xrightarrow{\triangle ABC} \hat{A}_2 + \hat{C} = 90°$ (۱)

شعاع $OA \Rightarrow OA \perp AT$ (خط مماس) $\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90°$ (۲)

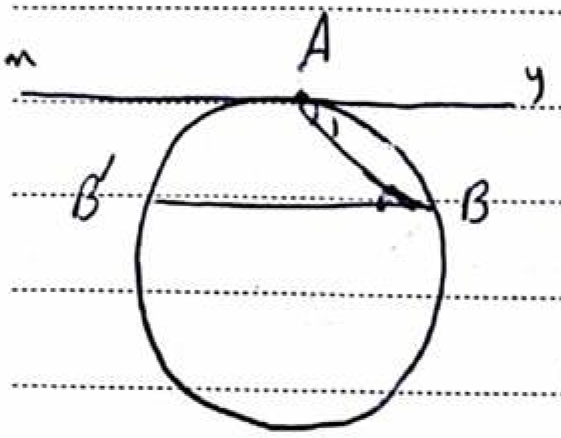
$\xrightarrow{(1),(2)} \hat{A}_1 = \underbrace{\hat{C}}_{\text{زاویه محاطی}} = \frac{\widehat{AB}}{2}$

Subject

Date

@Riazi_mahmoodi

مثال: خط xy در نقطه‌ی A بر دایره‌ی C مماس است. وتر BB' را موازی xy رسم کرده‌ایم. ثابت کنید $\widehat{AB}=\widehat{AB'}$



جواب: ابتدا A به B وصل می‌کنیم

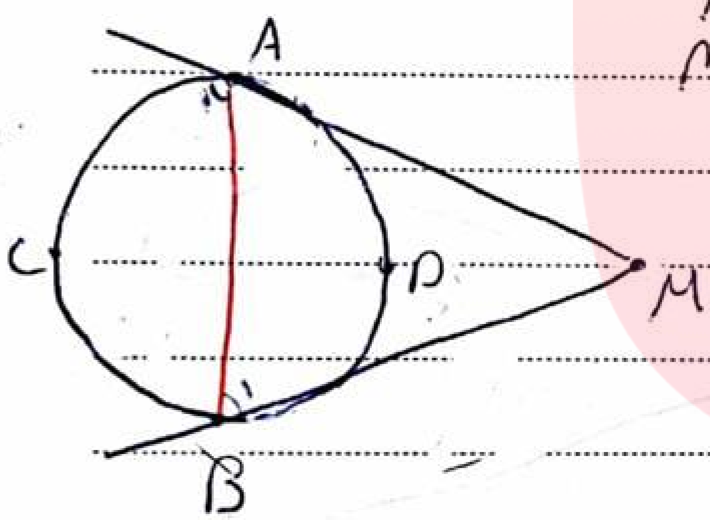
$$\left.\begin{array}{l} xy \parallel BB' \\ AB \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{B}' \quad (1)$$

زاویه ظلی $\hat{A}_1=\frac{\widehat{AB}}{2}$ (۲)

زاویه محاطی $\hat{B}'=\frac{\widehat{AB'}}{2}$ (۳)

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \frac{\widehat{AB}}{2}=\frac{\widehat{AB'}}{2} \Rightarrow \widehat{AB}=\widehat{AB'}$$

مثال: با توجه به شکل ثابت کنید $\hat{M}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{2}$



ابتدا A به B وصل می‌کنیم

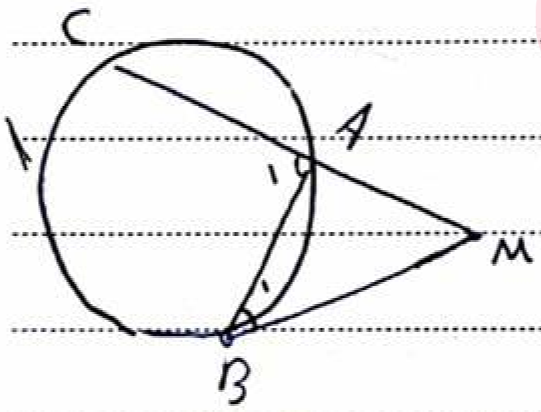
زاویه ظلی $\hat{A}_1=\frac{\widehat{ACB}}{2}$

زاویه ظلی $\hat{B}_1=\frac{\widehat{ADB}}{2}$

زاویه خارجی $\overset{\triangle}{ABM}$: $\hat{A}_1=\hat{M}+\hat{B}_1 \Rightarrow \hat{M}=\hat{A}_1-\hat{B} \xrightarrow[(2)]{(1)} \frac{\widehat{ACB}}{2}-\frac{\widehat{ADB}}{2}$

$$\Rightarrow \hat{M}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{2}$$

مثال: با توجه به شکل ثابت کنید $\hat{M}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{2}$



جواب: ابتدا A به B وصل می‌کنیم

زاویه محاطی $\hat{A}_1=\frac{\widehat{BC}}{2}$ (۱)

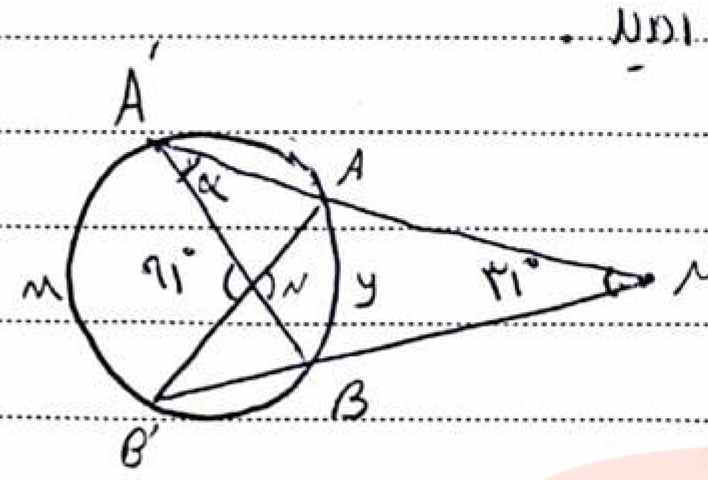
زاویه ظلی $\hat{B}_1=\frac{\widehat{AB}}{2}$ (۲)

زاویه خارجی $\overset{\triangle}{ABM}$: $\hat{A}_1=\hat{B}_1+\hat{M} \Rightarrow \hat{M}=\hat{A}_1-\hat{B} \xrightarrow[(2)]{(1)} \frac{\widehat{BC}}{2}-\frac{\widehat{AB}}{2}$

$$\Rightarrow \hat{M}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AB}}{2}$$

Subject
Date

۱/ در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه α را بدست آورید.



در قسمت قبل اثبات کردیم

$$\hat{M} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 31^\circ = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 62^\circ$$

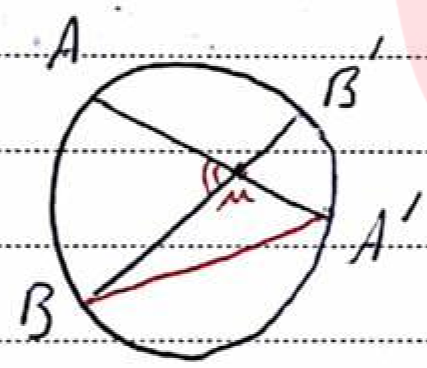
$$\hat{N} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 91^\circ = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 182^\circ$$

$$\begin{cases} x-y = 62 \\ x+y = 182 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x = 244 \\ x = 122^\circ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y = 182 \\ 122+y = 182 \\ y = 60^\circ \end{matrix}$$

$$\alpha = \hat{A'} = \frac{y}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

زاویه محاطی

۲/ با توجه به شکل ثابت کنید $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2}$



$\hat{M}$ زاویه خارجی $MA'B$ $= \hat{A'} + \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{2}$

برهان: ابتدا از A' به B وصل می‌کنیم.

۳/ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟

$$\hat{B} = \frac{y+z+w-x}{2} \Rightarrow 80 = \frac{y+z+w-x}{2} \Rightarrow y+z+w-x = 160$$

$$\Rightarrow y+w = 160 - z + x \quad (1)$$

$$\hat{C} = \frac{x+y+w-z}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x+y+w-z}{2} \Rightarrow x+y+w-z = 140^\circ$$

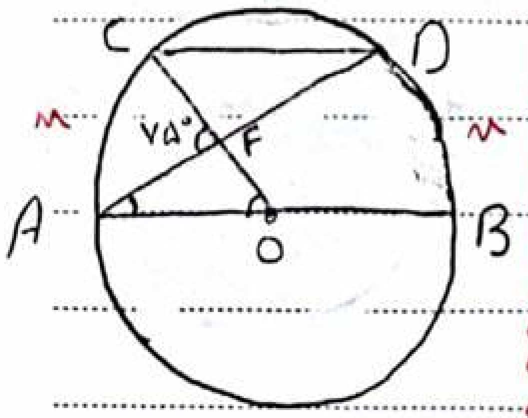
$$\Rightarrow y+w = 140 - x + z \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} 160 - z + x = 140 - x + z \Rightarrow 2x - 2z = -20 \Rightarrow x - z = -10^\circ \quad (3)$$

$$y+w = 160 + x - z \xRightarrow{(3)} y+w = 160 + (-10) \Rightarrow y+w = 150 \quad (4)$$

$$\hat{A} = \frac{y+w}{2} \overset{(4)}{=} \frac{150}{2} = 75^\circ$$

در دایره رسم شده ی شکل مقابل $CD \parallel AB$ است، اندازه ی کمان CD را بدست آورید.



طبق قضیه $CD \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} = x$

قطر دایره $AB \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 180^\circ \Rightarrow 2x + y = 180$

$\overset{(3)}{\Longrightarrow} 100 + y = 180 \Rightarrow y = 80 \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 80^\circ$

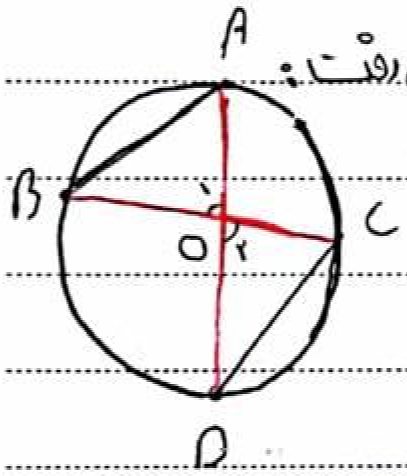
$\overset{\triangle}{AOF}$ زاویه خارجی $\hat{F} = 75^\circ = \hat{O} + \hat{A} \overset{(1)(2)}{\Longrightarrow} 75^\circ = x + \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} = 75^\circ$

زاویه مرکزی $\hat{O}$: $\overset{\frown}{AC} = x$ (۱) $\Rightarrow x = 75 \times \frac{2}{3}$

زاویه محاطی $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{x}{2}$ (۲) $\Rightarrow x = 50^\circ$ (۳)

ثابت کنید کمان های دایره به وترهای مساوی برابرند و برعکس.

برهان رفت:



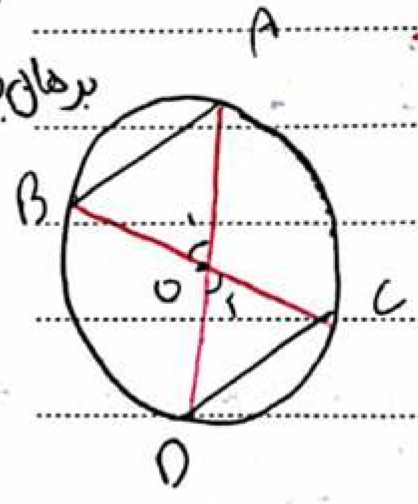
ابتدا O را به A و B و C و D وصل می کنیم:

فرض: $AB = CD$

حکم: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

$$\begin{cases} OA = OC & \text{شعاع} \\ OB = OD & \text{شعاع} \\ AB = CD & \text{فرض} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD} \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

برهان برگشت:



ابتدا O را به A و B و C و D وصل می کنیم:

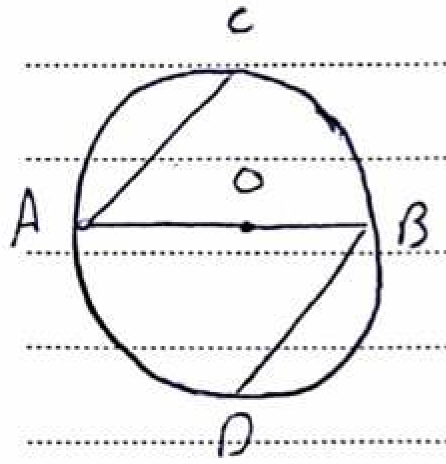
فرض: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

حکم: $AB = CD$

$$\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ (\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}) & \text{زاویه مرکزی} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD} \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} AB = CD$$

Subject
Date

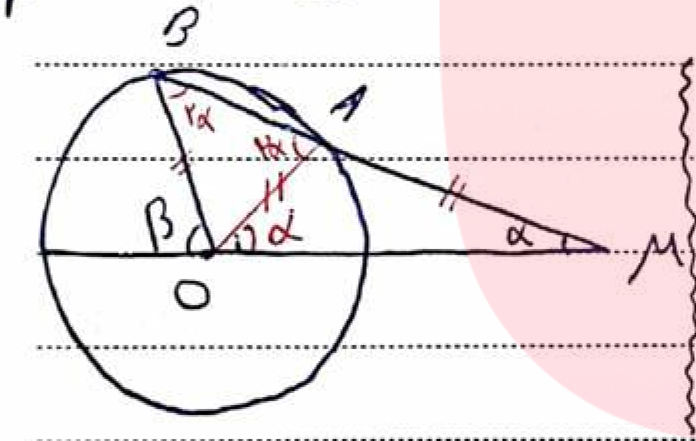
در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند. ثابت کنید $AC=BD$



وتر $AC \parallel BD \Longrightarrow \widehat{AD}=\widehat{BC}$ (1)

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{AC}+\widehat{BC}=180^\circ\\ \widehat{BD}+\widehat{AD}=180^\circ\end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{AC}+\widehat{BC}=\widehat{BD}+\widehat{AD} \xrightarrow{(1)} \widehat{AC}=\widehat{BD} \xrightarrow[\text{قضیه}]{\text{طبق}} AC=BD$$

دایره‌ی $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه‌ی M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کرده است و $MA=R$. نشان دهید: $\beta=3\alpha$



$AM=OA=R \Longrightarrow O\hat{M}A \Longrightarrow \hat{M}=\hat{O}_1=\alpha$ (1)
(متساوی الساقین)

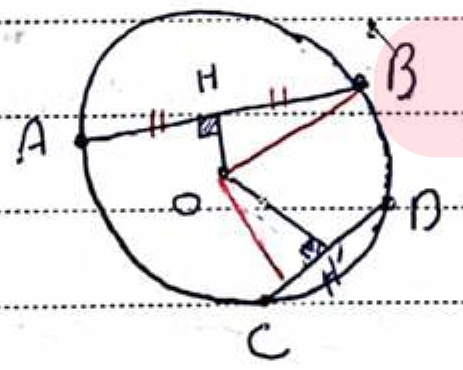
زاویه خارجی $O\hat{M}A$: $\hat{A}_1=\hat{M}+\hat{O}_1 \xrightarrow{(1)} \hat{A}_1=2\alpha$

$OA=OB=R \Longrightarrow O\hat{A}B \Longrightarrow \hat{A}_1=\hat{B}=2\alpha$ (2)

$O\hat{M}B$ زاویه خارجی: $\beta=B+M \xrightarrow{(1),(2)} \beta=2\alpha+\alpha \Longrightarrow \beta=3\alpha$

در دایره $C(O,R)$ نشان دهید $AB>CD$ اگر و تنها اگر $OH<OH'$

فرض: $AB>CD$ ، برهان رفت



حکم: $OH<OH' \xrightarrow{\div 2} BH>CH'$

(ابتدا O را به B و C وصل می‌کنیم.)

$$\left.\begin{array}{l}O\hat{B}H \text{ قائم الزاویه} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OB^2=OH^2+BH^2\\ O\hat{C}H' \text{ قائم الزاویه} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OC^2=OH'^2+CH'^2\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{شعاع}]{OB=OC} OH^2+BH^2=OH'^2+CH'^2$$

$$\xrightarrow{BH>CH'} OH^2<OH'^2 \Longrightarrow OH<OH'$$

Subject

Date

$$\overset{\triangle}{OBH} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OB^2 = OH^2 + BH^2$$
قائم الزاویه

$$\overset{\triangle}{OCH'} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OC^2 = OH'^2 + CH'^2$$
قائم الزاویه

$$\left.\begin{array}{l} OB^2 = OH^2 + BH^2 \\ OC^2 = OH'^2 + CH'^2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{شعاع}]{OB=OC} OH^2 + BH^2 = OH'^2 + CH'^2$$

$$\xrightarrow{OH<OH'} BH^2 > CH'^2$$

$$\Rightarrow BH > CH'$$

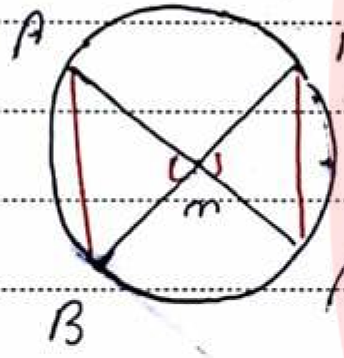
$$\xrightarrow[\text{طبق قضیه}]{\times 2} AB > CD$$

درس دوم

@Riazi_mahmoodi

(رابطه‌ی طولی در دایره)

هرگاه دو وتر در داخل دایره همدیگر را قطع کنند آنگاه داریم: $mA \cdot mA' = mB \cdot mB'$



برهان: ابتدا A به B' و از B به A' وصل می‌کنیم

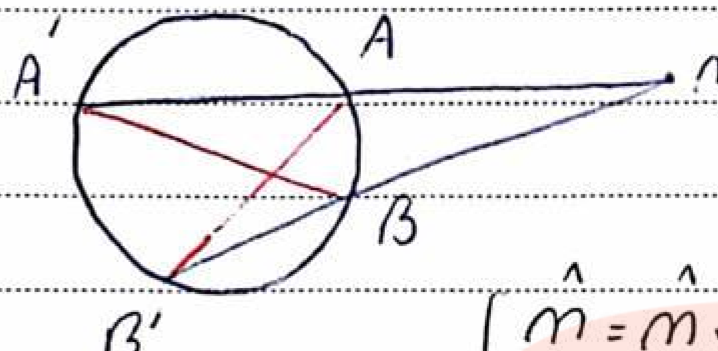
$$\begin{cases} \hat{m}_1 = \hat{m}_2 & \text{متقابل به راس} \\ \hat{A} = \hat{B'} = \dfrac{\overset{\frown}{A'B}}{2} & \text{محاطی} \end{cases} \xRightarrow{\text{زز}} m\hat{A}B' \sim mB'A'$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناسب}} \frac{mA}{mB'} = \frac{mB}{mA'}$$

$$\Rightarrow mA \cdot mA' = mB \cdot mB'$$

Subject
Date

اگر دو وتر دایره در بیرون از دایره همدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع کنند آنگاه داریم: $MA.MA' = MB.MB'$

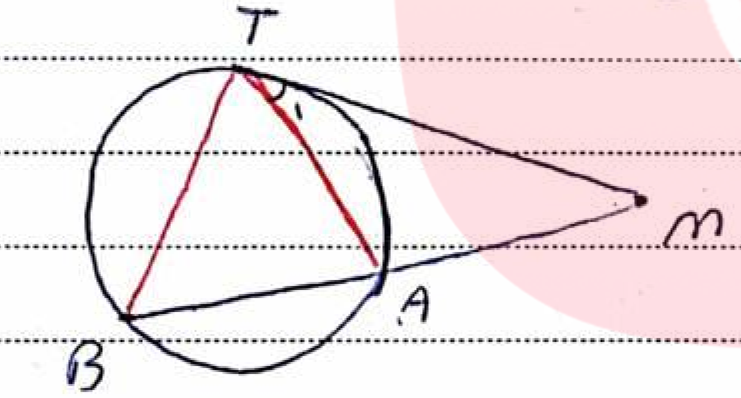


برهان: ابتدا A' به B و B' به A را وصل می‌کنیم

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{M} & \text{مشترک} \\ \hat{A'} = \hat{B'} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{cases} \xRightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{MBA'} \sim \overset{\triangle}{MAB'} \Longrightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MA'}{MB'}$$

$$\Longrightarrow MA.MA' = MB.MB'$$

اگر خطی مماس و وتر دایره در نقطه‌ی M همدیگر را قطع کنند آنگاه: $MT^2 = MA.MB$



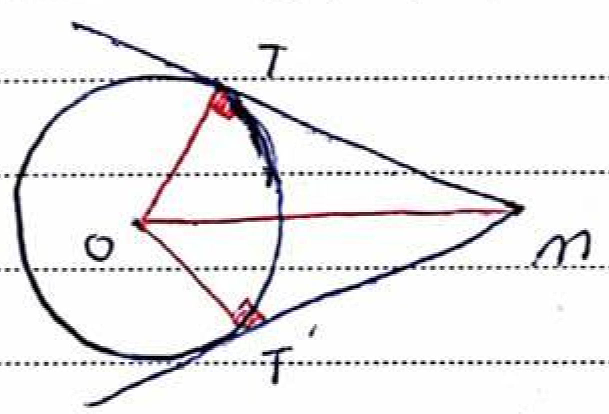
برهان: ابتدا T به A و B وصل می‌کنیم

$$\begin{cases} \hat{M} = \hat{M} & \text{مشترک} \\ \hat{T_1} = \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{2} \end{cases} \xRightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{MAT} \sim \overset{\triangle}{MTB} \xRightarrow{\text{اجزای متناظر}} \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

$$\Longrightarrow MT^2 = MA.MB$$

نکته ← از هر نقطه‌ی خارج دایره دو مماس بر دایره می‌توان رسم کرد

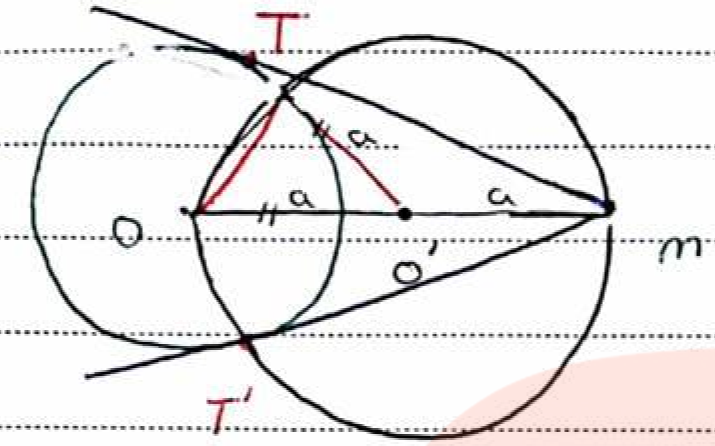
اثبات: دو مماس بر دایره از یک نقطه برابر است: $MT = MT'$



ابتدا O به T و T' و M وصل می‌کنیم چون MT و MT' مماس بر دایره‌اند پس بر شعاع عمودند

$$\begin{cases} OT = OT' & \text{شعاع} \\ OM = OM & \text{مشترک} \end{cases} \xRightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{OTM} \cong \overset{\triangle}{OT'M} \Longrightarrow MT = MT'$$

مراحل رسم مماس بر دایره از نقطه‌ی خارج دایره:



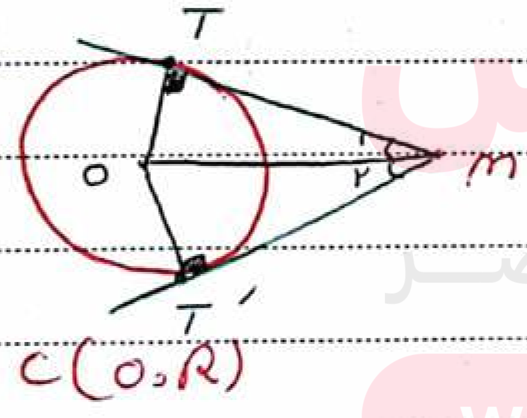
مراحل زیر را انجام می دهیم
① از O به m وصل می کنیم
② وسط Om را O' می نامیم
③ دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $OO' = O'm$ رسم می کنیم
④ محل برخورد دایره با دایره اصلی را T و T' می نامیم
⑤ از m به T و T' وصل می کنیم
⑥ mT و mT' همان خط‌های مماس بر دایره هستند

علت: $O'T = OO' = O'm = a$ شعاع دایره

$$\left.\begin{array}{l} O'T = a \\ Om = 2a \end{array}\right\} \Longrightarrow O'T = \frac{1}{2}Om$$

مثلث که اندازه میانه با ضلع روبرو برابر باشد یعنی آن مثلث قائم الزاویه است پس: $OT \perp mT$

هرگاه از نقطه‌ی m خارج دایره $C(O, r)$ مماس بر دایره رسم کنیم. T و T' نقاط تماس باشند ثابت کنید خط Om نیمساز زاویه TmT' است.



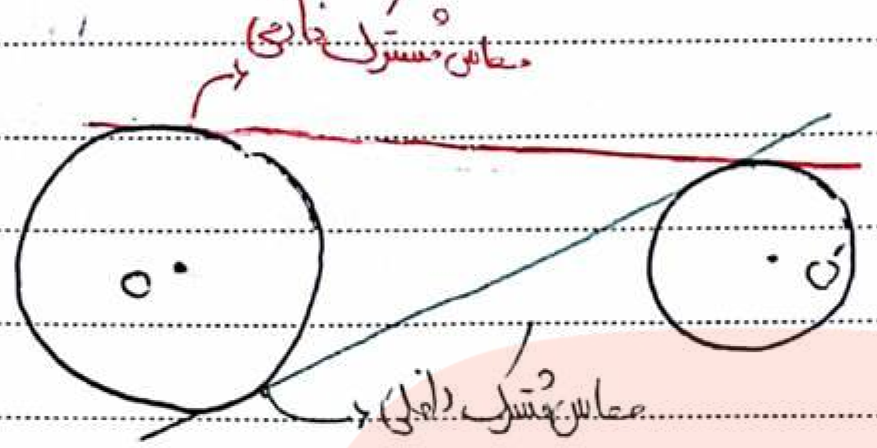
حکم: $\hat{m}_1 = \hat{m}_2$

برهان: ابتدا از O به T و T' وصل می کنیم

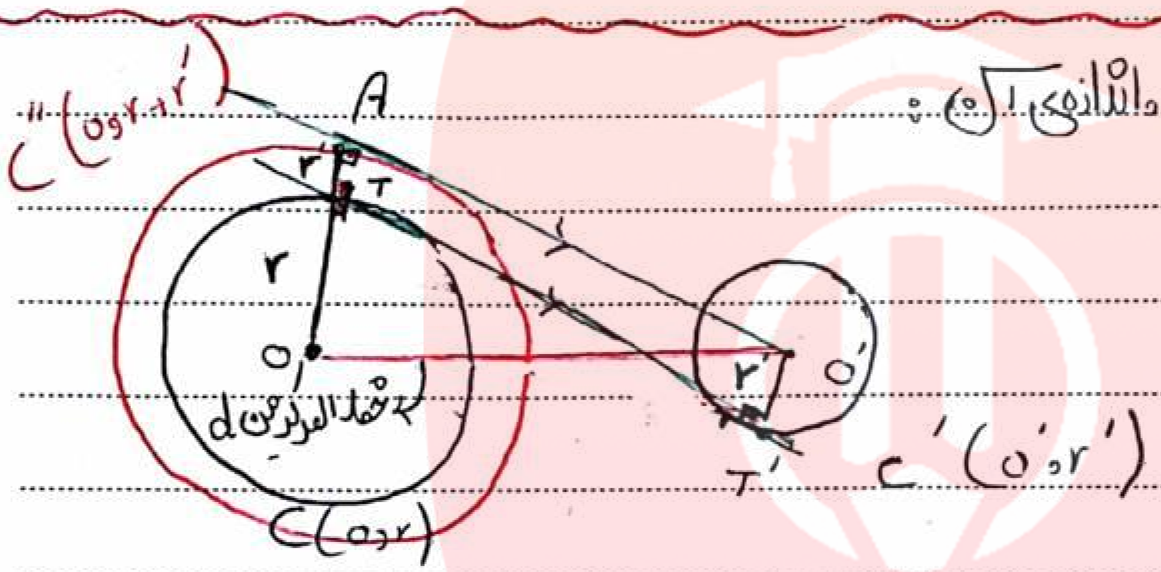
$$\left\{\begin{array}{l} OT = OT' \text{ شعاع} \\ Om = Om \text{ مشترک} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{OTm} \cong \overset{\triangle}{OT'm} \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزاء}} \hat{m}_1 = \hat{m}_2$$

Subject
Date

مماس مشترک: هر خط یا پاره خطی را که بر هر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک ۲ دایره می‌نامند



مراحل رسم مماس مشترک داخلی و اندازه‌ی آن:



۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $r+r'$ رسم می‌کنیم

۲) از نقطه‌ی O' مماسی بر دایره‌ی C'' رسم می‌کنیم و از O به A (محل تماس خط مماس) وصل می‌کنیم

۳) شعاع OA دایره‌ی C را در T قطع می‌کند

۴) از نقطه‌ی T خط موازی O'A رسم می‌کنیم که چهارضلعی $ATT'O'$ یک مستطیل می‌شود

۵) خط TT' همان مماس مشترک داخلی است

$$\overset{\triangle}{OO'A} \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\text{قائم‌الزاویه } \hat{A}=90} O'A^2+OA^2=OO'^2 \xrightarrow[\text{طول مستطیل}]{O'A=TT'} TT'^2+(r+r')^2=d^2$$

$$\Longrightarrow TT'^2=d^2-(r+r')^2$$

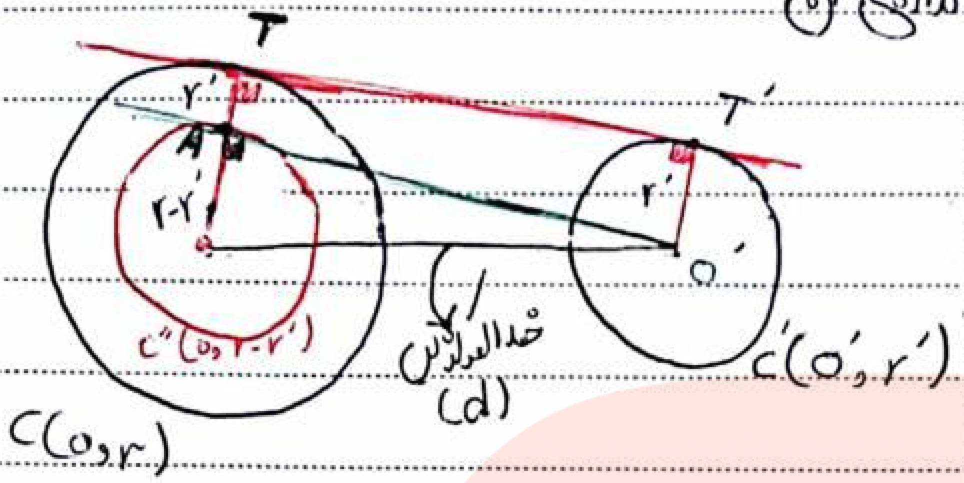
$$\Longrightarrow TT'=\sqrt{d^2-(r+r')^2}$$

Subject

Date

@Riazi_mahmoodi

مراحل رسم مماس مشترک خارجی دو دایره‌ای که



(۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $r-r'$ رسم می‌کنیم

(۲) از نقطه‌ی O' مماس بر دایره‌ی C'' رسم می‌کنیم

(۳) از O به نقطه‌ی تماس با دایره‌ی C'' (A) وصل و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی C را در نقطه‌ی T قطع کند

(۴) از نقطه‌ی T موازی خط $O'A$ رسم می‌کنیم که چهارضلعی $ATT'O'$ یک مستطیل است

(۵) خط TT' همان خط مماس مشترک خارجی دو دایره است

$$OAO' \xrightarrow[\text{فیثاغورس}]{\text{قائم الزاویه } \hat{A}=90^\circ} O'A^2 + OA^2 = OO'^2$$

$$\xrightarrow[\text{طول مستطیل}]{O'A = TT'} TT'^2 + (r-r')^2 = d^2$$

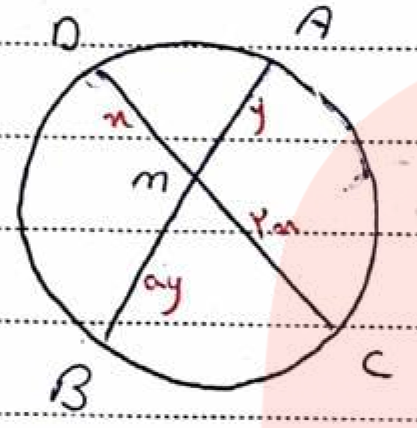
$$\Longrightarrow TT'^2 = d^2 - (r-r')^2$$

$$\Longrightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (r-r')^2}$$

Subject
Date

تمرین ص ۲۳

در دایره‌ی $C(O, R)$ وتر AB، وتر CD به طول $9cm$ را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11cm$ است، آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند.



$CD = x + 2x = 3x = 9 \Longrightarrow x = 3cm$

طبق قضیه: $mA \times mB = mD \times mC$

$\Longrightarrow mA \times mB = 3 \times 6$

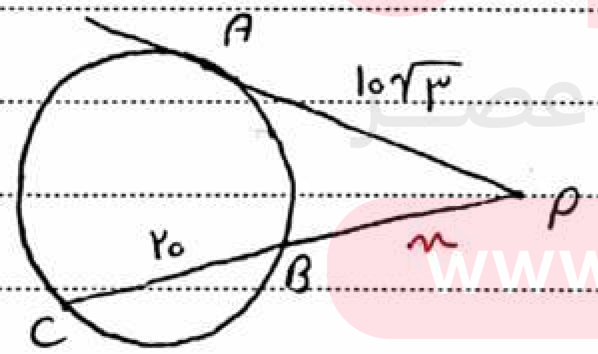
$\Longrightarrow mA \times mB = 18 \Longrightarrow \overset{\alpha}{y} \times \overset{\beta}{ay} = 18 \Longrightarrow \alpha \cdot \beta = 18 = P$

$AB = \underbrace{y}_{\alpha} + \underbrace{ay}_{\beta} = 11 \Longrightarrow \alpha + \beta = 11 = S$

$x^2 - Sx + P = 0 \Longrightarrow x^2 - 11x + 18 \Longrightarrow (x-2)(x-9) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 = y \\ x = 9 = ay \end{cases}$

$\dfrac{mB}{mA} = \dfrac{ay}{y} = \dfrac{9}{2}$

از نقطه‌ی P خارج دایره‌ای مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم. همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه‌ی B و C قطع کرده است. $BC = 20$ طول‌های PB و PC را به دست آورید.



طبق قضیه: $PA^2 = PB \times PC$

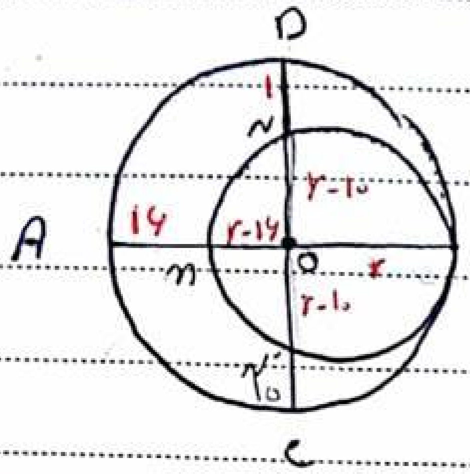
$\Longrightarrow (10\sqrt{3})^2 = x \times (20 + x)$

$\Longrightarrow 300 = 20x + x^2$

$\Longrightarrow x^2 + 20x - 300 \Longrightarrow (x+30)(x-10)$

$\Longrightarrow \begin{cases} x = -30 \; \times \\ x = 10 \; \checkmark \Longrightarrow \begin{cases} PB = 10 \\ PC = 30 \end{cases} \end{cases}$

در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمودند. اگر $Am=16$ و $ND=10$ شعاع های دو دایره را بیابید.



① دایره کوچک: $ON \times ON' = Om \times OB$

$\Rightarrow (r-10)(r-10) = (r-16)(r)$

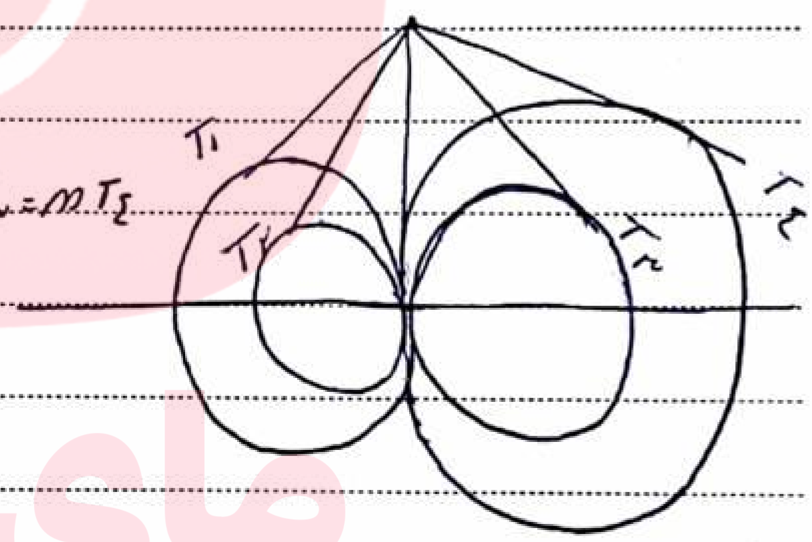
$\Rightarrow r^2+100-20r = r^2-16r$

$\Rightarrow 100 = 4r \Rightarrow r = 25$ شعاع دایره بزرگ

قطر دایره کوچک $Bm = r+r-16 = 2r-16 = 50-16 = 34$

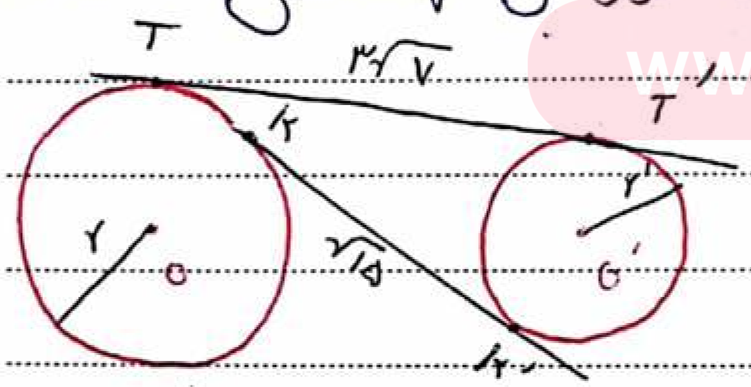
شعاع دایره کوچک $= r' = \frac{34}{2} = 17$

مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T بر هم مماس اند و از نقطه m روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم. ثابت کنید: $mT_1 = mT_2 = mT_3 = mT_4$



طبق قضیه
$$\begin{cases} mT = mT_1 \\ mT = mT_2 \\ mT = mT_3 \\ mT = mT_4 \end{cases} \Rightarrow mT_1 = mT_2 = mT_3 = mT_4$$

طول شعاع های دو دایره متخارج را بیابید که طول مماس مشترک خارجی آنها $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است



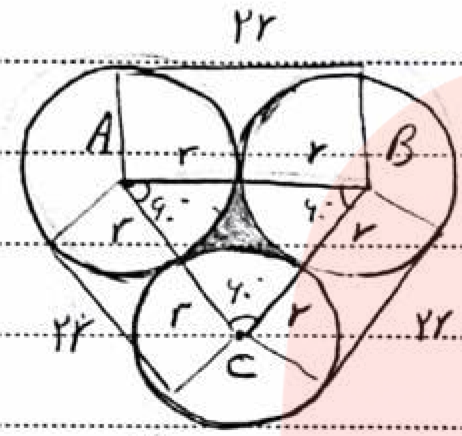
$r > r'$

$$TT' = \sqrt{d^2-(r-r')^2} \Rightarrow 3\sqrt{7} = \sqrt{8^2-(r-r')^2} \Rightarrow 63 = 64-(r-r')^2 \Rightarrow (r-r')^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} r-r' = 1 \ \checkmark \\ r-r' = -1 \ \times \end{cases} \quad ①$$

$$KK' = \sqrt{d^2-(r+r')^2} \Rightarrow \sqrt{15} = \sqrt{8^2-(r+r')^2} \Rightarrow 15 = 64-(r+r')^2 \Rightarrow (r+r')^2 = 49 \Rightarrow \begin{cases} r+r' = 7 \ \checkmark \\ r+r' = -7 \ \times \end{cases} \quad ②$$

$$\xrightarrow{①,②} \begin{cases} r-r' = 1 \\ r+r' = 7 \end{cases} \Rightarrow 2r = 8 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow r-r' = 1 \Rightarrow 4-r' = 1 \Rightarrow r' = 3$$

سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو بر هم مماس اند مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخی بسته شده است. نشان دهید طول این نخ برابر $6r+2\pi r$ است
همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$ محدود است



سه قطاع به زاویه $120°$ یک دایره کامل تشکیل می دهند

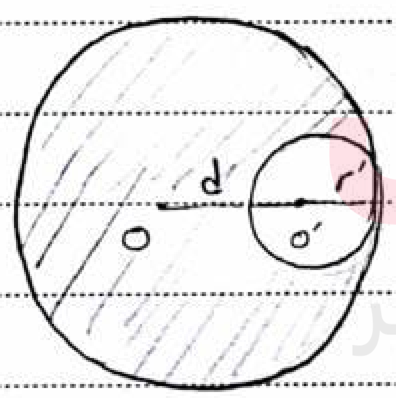
مساحت سه قطاع $\Rightarrow \frac{1}{2} S_{\text{دایره}} = \frac{1}{2}\pi r^2$

$\text{طول نخ} = 2r + 2r + 2r + \text{محیط دایره} = 6r + 2\pi r$

$\hat{ABC} \Rightarrow$ متساوی الاضلاع $\Rightarrow S_{\text{مثلث}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}4r^2 = \sqrt{3}r^2$

$S_{\text{قسمت هاشور خورده}} = S_{\text{مثلث}} - S_{\text{نیم دایره}} = \sqrt{3}r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$

طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی $2cm$ و مساحت ناحیه محدود بین آنها $16\pi\ cm^2$ است طول شعاع های دو دایره را بدست آورید



$d = OO' = 2$
$S_{\text{هاشور خورده}} = 16\pi$

$r = d + r' = 2 + r'$
$S_{\text{دایره بزرگ}} = \pi r^2 = \pi(2+r')^2$
$= \pi(4 + r'^2 + 4r')$
$= 4\pi + \pi r'^2 + 4\pi r'$

$S_{\text{دایره کوچک}} = \pi r'^2$

$S_{\text{هاشور خورده}} = S_{\text{دایره بزرگ}} - S_{\text{دایره کوچک}}$

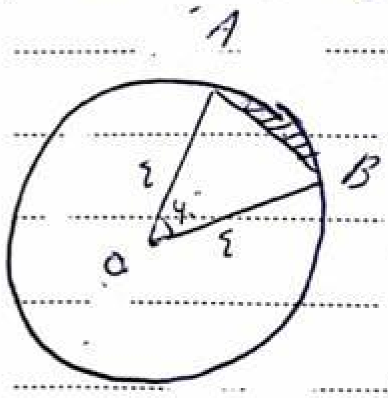
$= 4\pi + \pi r'^2 + 4\pi r' - \pi r'^2 = 4\pi + 4\pi r' = 4\pi(1+r') = 16\pi$
$\Rightarrow 1 + r' = 4$
$\Rightarrow r' = 3$

$r = 2 + r' = 2 + 3 = 5$

Subject

Date

مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام ببرید



$S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$

$6S = 6 \times \frac{1}{2} \times r^2 \times \sin 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} \times (4)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$

مثلث متساوی الاضلاع

$S_{\text{هاشورخورده}} = \frac{S_{\text{دایره}} - 6S}{6} = \frac{16\pi - 24\sqrt{3}}{6} = \frac{2(8\pi - 12\sqrt{3})}{6}$

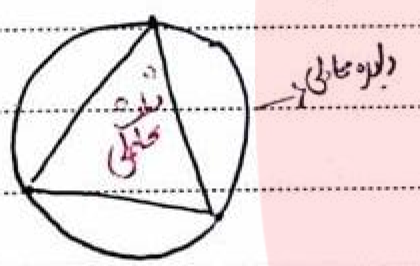
$= \frac{8\pi - 12\sqrt{3}}{3}$

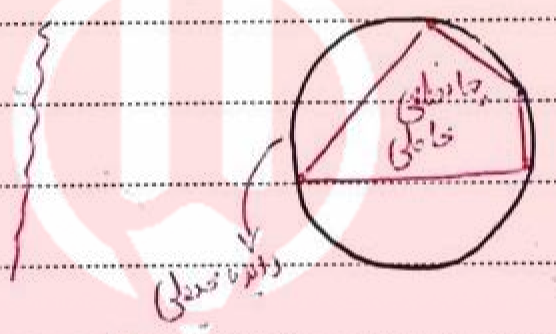
@ Riazi_mahmoodi

درس سوم

چندضلعی های محاطی و محیطی

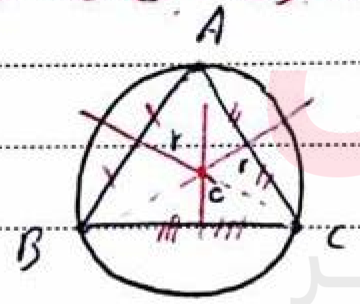
چندضلعی محاطی: چندضلعی را محاطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه‌ی راس‌های آن بگذرد. در این صورت دایره را، دایره‌ی محیطی آن چندضلعی می‌نامیم



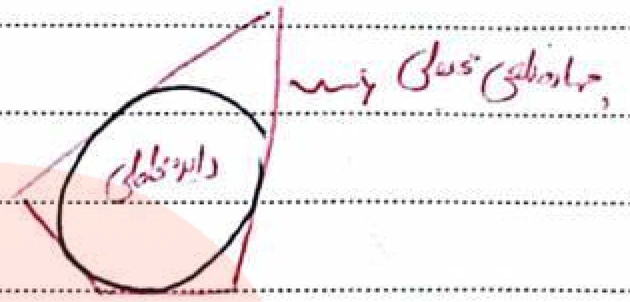


نکته: یک چندضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف های همه‌ی ضلع‌های آن در یک نقطه همرس باشند

نکته: هر مثلث یک مثلث محاطی است که مرکز دایره‌ی محیطی آن محل همرسی عمودمنصف های اضلاع مثلث است

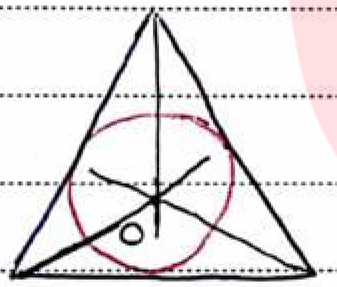


چند ضلعی محیطی: چند ضلعی را محیطی می گوییم اگر و فقط اگر دایره ای باشد که بر همه ی ضلع های آن مماس باشد. در این صورت دایره را، دایره محاطی این چند ضلعی می نامیم.

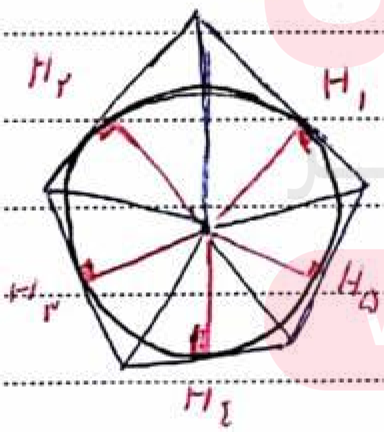


نکته: یک چند ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همه ی نیمسازهای زاویه های آن در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره ی محاطی چند ضلعی است.

نکته: هر مثلث یک مثلث محیطی است که مرکز دایره محاطی آن محل همرسی نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث است.



اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2p$ شعاع دایره ی محاطی برابر r باشد نشان دهید $S = rp$



برای ۵ ضلعی ثابت می کنیم و به همین طریق برای n ضلعی ثابت می شود:

$$OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4 = OH_5 = r$$

$$S_1 = \frac{1}{2} OH_1 \times AE$$

$$S_2 = \frac{1}{2} OH_2 \times AB$$

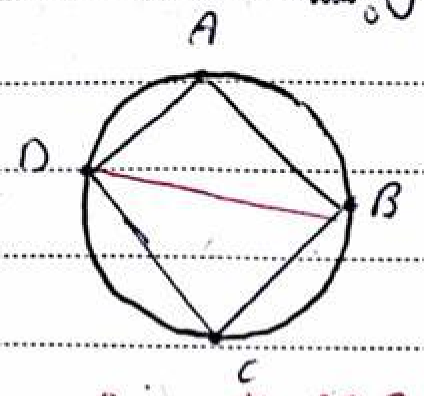
$$S_3 = \frac{1}{2} OH_3 \times BC$$

$$S_4 = \frac{1}{2} OH_4 \times CD$$

$$S_5 = \frac{1}{2} OH_5 \times DE$$

$$S_{\text{۵ ضلعی}} = \frac{1}{2} \overset{r}{\cancel{OH_1}} \overset{2p}{\cancel{(AE + AB + BC + CD + DE)}} = rp$$

یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند



برهان رفت:

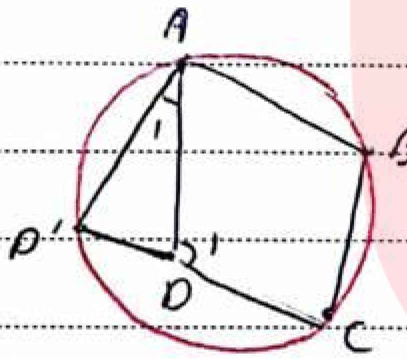
ابتدا از B به D وصل می‌کنیم و $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$ محاطی و $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$ محاطی

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2} = \frac{BCD + BAD}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود که $\hat{B} + \hat{D} = 180$

فرض: چهارضلعی ABCD محاطی است

حکم: $\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = 180 \\ \hat{B} + \hat{D} = 180 \end{cases}$



برهان برگشت:

اگر ABCD محاطی باشد که فرض ثابت است

و اگر محاطی نباشد و از سه راس A و B و C حتماً یک دایره می‌گذرد (هر مثلث یک دایره محیطی دارد) حال ضلع CD را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D' قطع کند پس $ABCD'$ محاطی است

فرض: $\begin{cases} A + C = 180 \\ B + D_1 = 180 \end{cases}$

حکم: چهارضلعی ABCD محاطی است

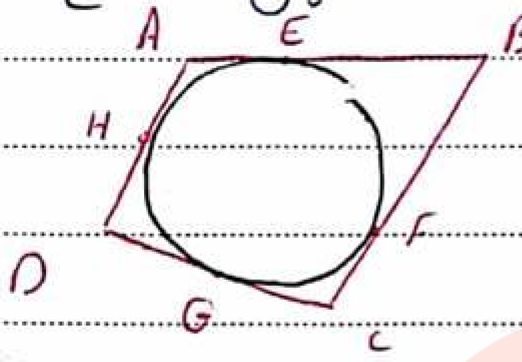
$\begin{cases} \hat{B} + \hat{D'} = 180 \\ \hat{B} + \hat{D}_1 = 180 \end{cases} \Longrightarrow \hat{D}_1 = \hat{D'}$ (۱)

(۲) $\hat{D}_1 > \hat{D'} \Longleftarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_1 + \hat{D'}$ زاویه خارجی $A\hat{D}D'$

از ۱ و ۲ به تناقض رسیدیم در نتیجه فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی ABCD محاطی است

Subject
Date

یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند

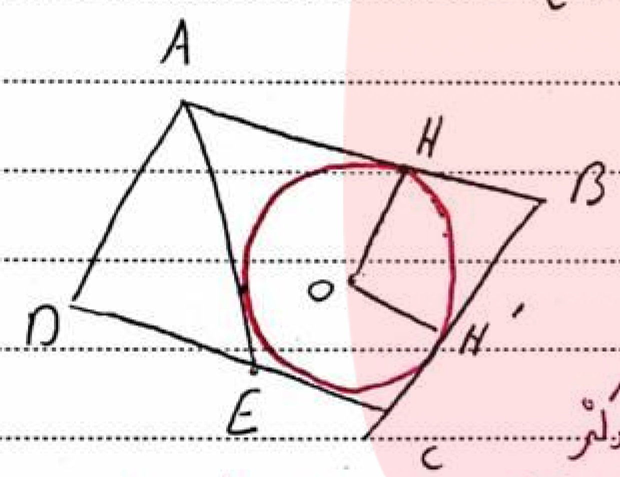


فرض: $ABCD$ محیطی است

حکم: $AB+CD=AD+BC$

طبق قضیه
$$\begin{cases} AE=AH & (1) \\ BE=BF & (2) \\ CG=CF & (3) \\ DG=DH & (4) \end{cases}$$

$$AB+CD = AE+BE+CG+DG = AH+BF+CF+DH = AD+BC$$



برهان برعکس: فرض: $AB+CD=AD+BC$

حکم: چهارضلعی $ABCD$ محیطی است

نیمسازهای زاویه‌های B و C را رسم می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز همرسی این نیمسازها رسم می‌کنیم که حتماً بر سه ضلع AB و BC و CE مماس است

فرض خلف: می‌کنیم که AD به دایره مماس نباشد پس از A خطی مماس بر دایره رسم می‌کنیم و AE می‌نامیم چون چهارضلعی $ABCD$ محیطی است پس داریم:

$AB+CE=AE+BE$

فرض: $AB+CD=AD+BC$

$\Rightarrow CE-CD=AE-AD$

$\Rightarrow AD=AE-CE+CD$

$\Rightarrow AD=AE+DE$

از طرفی می‌دانیم (نامساوی مثلث) $AD<AE+DE$ پس به تناقض رسیدیم و فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی $ABCD$ محیطی است

چندضلعی منتظم:

یک چندضلعی محدب را منتظم می‌نامند هرگاه ضلع‌های آن هم اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز هم اندازه باشند.

(تمارین صفحه ۲۹ _ ۳۰ _ ۳۱)

تمرین

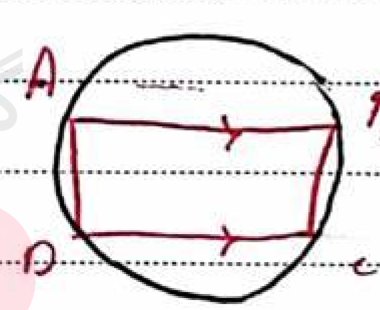
ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

برهان رفت:

ذوزنقه محاطی است: فرض

متساوی الساقین: حکم

$$\begin{cases} AD = BC & AB \parallel CD \\ \hat{A} = \hat{B} & \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \\ \hat{C} = \hat{D} & \xrightarrow{\text{طبق قضیه}} AD = CB \end{cases}$$



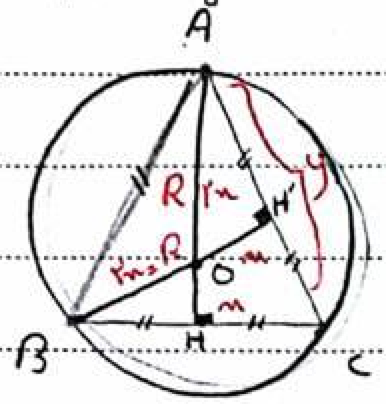
برهان برگشت:

ذوزنقه متساوی الساقین: فرض $\Longrightarrow \begin{cases} AD = BC \\ \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{D} \end{cases}$

ذوزنقه محاطی است: حکم

$$\left.\begin{array}{l} A + D = 180 \xrightarrow{C = D} A + C = 180 \\ A + D = 180 \xrightarrow{A = B} B + D = 180 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$ ذوزنقه محاطی است

۲- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را بدست آورید که دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.



می‌دانیم در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع، میانه، نیمساز و عمود منصف یکسان هستند همچنین می‌دانیم که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند.

$$2x = R \Longrightarrow x = \frac{R}{2}$$

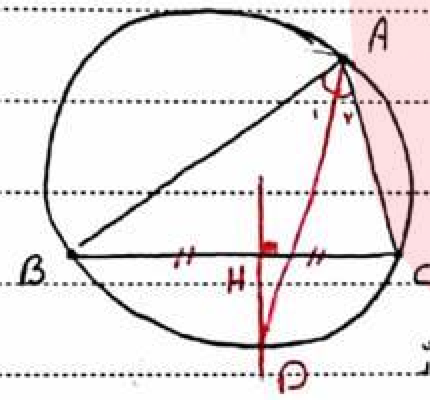
ارتفاع مثلث $AH = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$

$$y^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}R\right)^2 \Longrightarrow y^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{9R^2}{4}$$

$$\Longrightarrow y^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{9R^2}{4} \Longrightarrow \frac{3y^2}{4} = \frac{9R^2}{4} \Longrightarrow y^2 = 3R^2 \Longrightarrow y = \sqrt{3}R$$

S مثلث $= \frac{1}{2}AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}R \times \sqrt{3}R = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

۳- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.



نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم که محل برخورد نیمساز و دایره محیطی را D می‌نامیم و نشان می‌دهیم که عمود منصف ضلع BC نیز از نقطه D می‌گذرد.

نیمساز $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \xrightarrow[\text{محاطی}]{\text{زاویه}} \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Longrightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD} \xrightarrow[\text{قضیه}]{\text{طبق}} BD = CD$

چون فاصله D تا دوسر پاره خط BC به یک اندازه است پس D روی عمود منصف پاره خط BC قرار دارد.

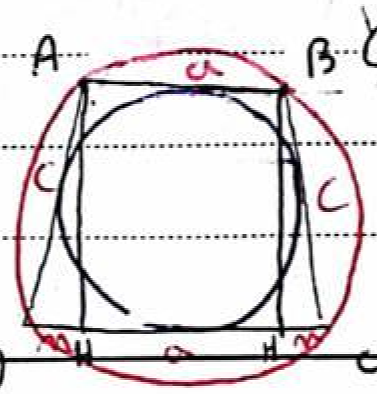
۴- یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

$AB = a$
$CD = b$
$AD = BC = c$

طبق قضیه $AB + CD = AD + BC \Longrightarrow a + b = 2c \Longrightarrow a + b = 2c$

$$\Longrightarrow \frac{a+b}{2} = c$$

$$b = a + 2x \Longrightarrow x = \frac{b-a}{2}$$



فیثاغورس $A\hat{D}H$: $AH^2 + DH^2 = AD^2 \Longrightarrow AH^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\Longrightarrow AH^2 + \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{4} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4}$$

$$\Longrightarrow AH^2 = \frac{4ab}{4} \Longrightarrow AH = \sqrt{ab}$$

$S = \dfrac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2} = \dfrac{(a+b)AH}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{(a+b)}{2} \times \sqrt{ab}$$

ه- اگر r_a، r_b، r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد نشان دهید $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$

و. به همین ترتیب اگر h_a، h_b، h_c اندازه سه ارتفاع باشد نشان دهید $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$

شکل صفحه ۲۶ کتاب

الف)

$S=S_{A\hat{B}C}$ مساحت مثلث

$p=\frac{1}{2}p_{A\hat{B}C}$ نصف محیط مثلث

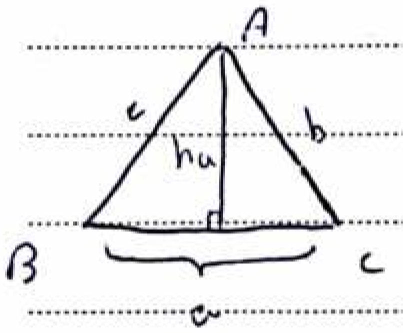
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{3p-(a+b+c)}{S}$$

$$=\frac{3p-2p}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r} \quad (1)$$

$$S=rp \Longrightarrow r=\frac{S}{p} \Longrightarrow \frac{1}{r}=\frac{p}{S} \Longrightarrow S=r_a(p-a)$$

$$r_a=\frac{S}{p-a} \Longrightarrow \frac{1}{r_a}=\frac{p-a}{S}$$

ب)



$$S=\frac{1}{2}h_a\cdot a \Longrightarrow h_a=\frac{2S}{a} \Longrightarrow \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}$$

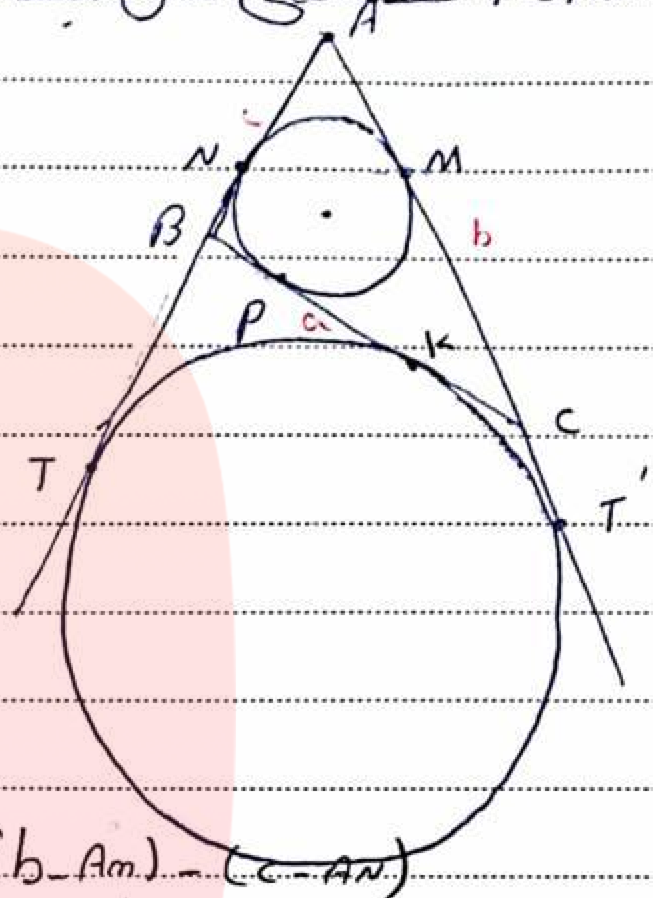
$$h_b=\frac{2S}{b}=\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}$$

$$h_c=\frac{2S}{c} \Longrightarrow \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2p}{2S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}$$

Subject
Date

۶- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N، P باشند و T، T' نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع باشند نشان دهید



$AM = AN = p - a$

$BN = BP = p - b \; , \; CM = CP = p - c$

$AT = AT' = p$

$AM = AN = p - a$

$2p = a + b + c$

$\Rightarrow 2p = AM + CM + BP + CP + AN + BN$

$\Rightarrow 2p = 2AM + 2CM + 2BN$

$\Rightarrow 2p = 2(AM + CM + BN)$

$\Rightarrow p = (AM + CM + BN)$

$\Rightarrow AM = p - CM - BN \Rightarrow AM = p - (b - AM) - (c - AN)$

$\Rightarrow \cancel{AM} = p - b + \cancel{AM} - c + AM$

$\Rightarrow AM = b + c - p$

$\Rightarrow AM = 2p - a - p \Rightarrow AM = p - a$

$BN = BP = p - a$

$BN + BP = c - AN + a - CP \xrightarrow{BN = BP} 2BN = c + a - (AN + CP)$

$\xrightarrow[CP = CM]{AN = AM} 2BN = c + a - (AM + CM)$

$\Rightarrow 2BN = c + a - b + b - b$

$\Rightarrow 2BN = 2p - 2b$

$\Rightarrow 2BN = 2(p - b) \Rightarrow BN = p - b$

$AT = AT' = p$

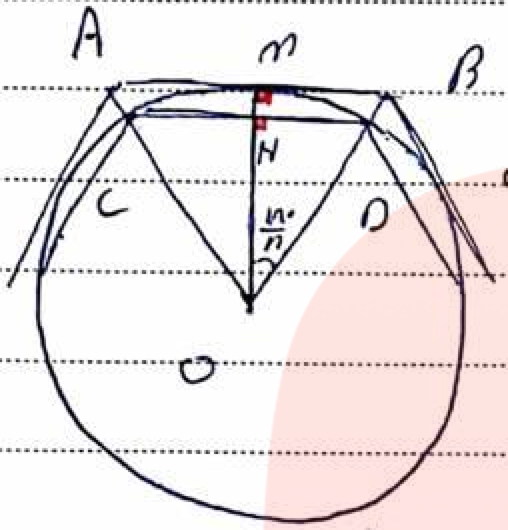
$AT + AT' = c + BT + b + CT' \xrightarrow{AT = AT'} 2AT = b + c + (BT + CT')$

$\Rightarrow 2AT = b + c + (BK + CK)$

$\Rightarrow 2AT = b + c + a$

$\Rightarrow 2AT = 2p \Rightarrow AT = p$

۷. یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در یک شکل رسم کنید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلع های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند آنگاه $CD = 2r\sin\frac{180}{n}$, $AB = 2r\tan\frac{180}{n}$



شعاع $OD = r$, شعاع $Om = r$

$O\hat{m}B: \hat{m} = 90^\circ \Rightarrow \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{Bm}{Om}$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{AB}{2}}{r} \Rightarrow AB = 2r\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

$O\hat{H}D: \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{DH}{OH}$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{CD}{2}}{r}$

$\Rightarrow CD = 2r\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

۸. شش ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی مطابق شکل مثلث MNP را ساخته ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی دو سوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH و TH' و TH'' را به ترتیب بر BC و ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ... می دانید مجموع طول های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت های مثلث های TBC، TDE، TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

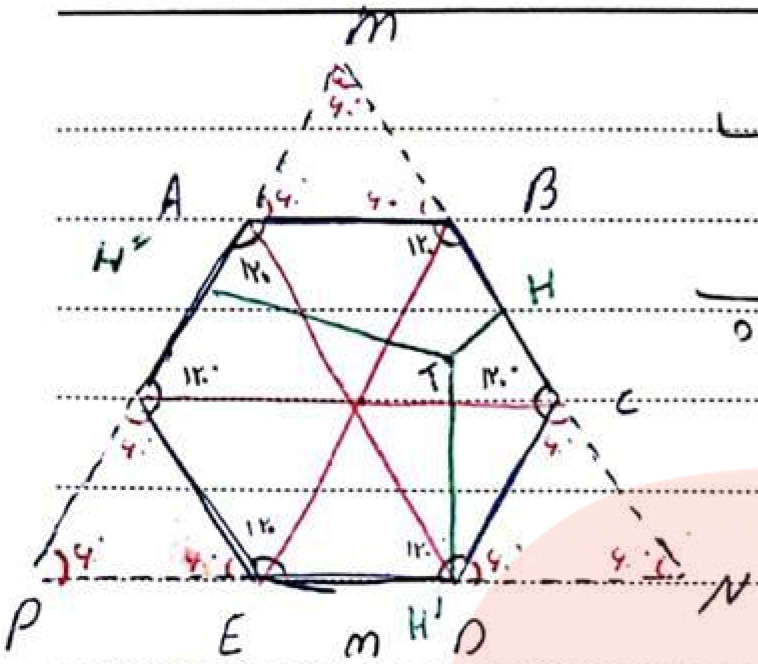
$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$

الف) مجموع زوایای داخلی ۶ ضلعی $= 4 \times 180 = 720$

هر زاویه ۶ ضلعی منتظم $= \frac{720}{6} = 120^\circ$

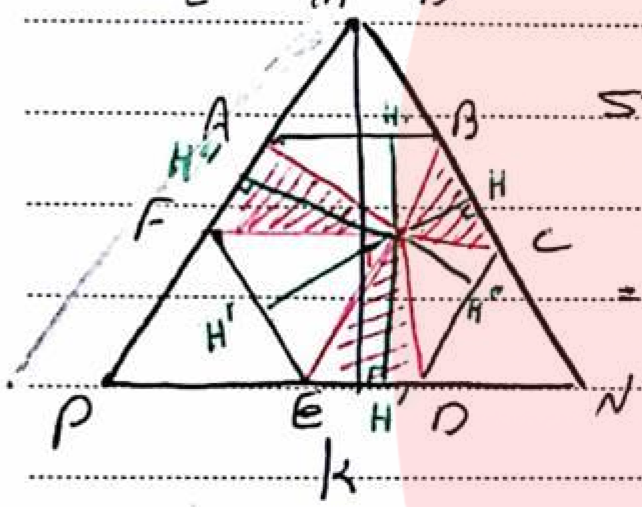
Subject

Date



الف) $\dfrac{S_{\text{۶ضلعی}}}{S_{\text{مثلث}}} = \dfrac{6S_{\text{مثلث کوچک}}}{9S_{\text{مثلث}}} = \dfrac{۲}{۳}$

ب) $TH + TH' + TH'' = mk$



ت) $S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$

$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF}$

$= \frac{1}{2}TH \times BC + \frac{1}{2}TH' \times \underset{BC}{DE} + \frac{1}{2}TH'' \overset{BC}{AF}$

$= \frac{1}{2}BC(TH + TH' + TH'') = \frac{1}{2}BC \times mk$

$\dfrac{S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF}}{S_{mNP}} = \dfrac{\frac{1}{2}BC \times mk}{\frac{1}{2}PN \times mk} = \dfrac{BC}{PN} = \dfrac{\cancel{BC}}{3\cancel{BC}} = \dfrac{1}{3}$

$\boxed{PN = PE + ED + DN \Rightarrow PN = BC + BC + BC \Rightarrow PN = 3BC}$

۹) دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم چهارضلعی $ABCD$ مربع است چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند نشان دهید هشت ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.

شکل صفحه ۳۱

Nevis

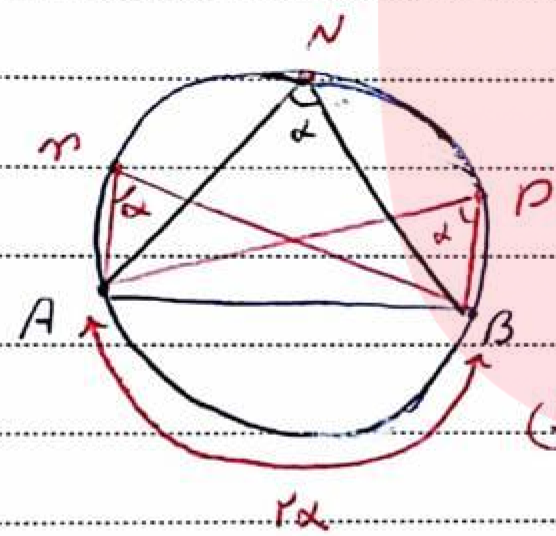
Subject
Date

$OM = OD = 3$
$OA = OC = 3$ $\Big\} \Rightarrow$ قطرها با هم برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند $\Longrightarrow ABCD$ مستطیل است

همچنین قطرها علاوه بر نصف کردن عمود هم هستند پس $ABCD$ لوزی هم هستند داریم
یعنی $ABCD$ مربع است

طبق قضیه $\Rightarrow \widehat{BM} = \widehat{AM} = \widehat{AN} = \widehat{DN} = \widehat{PD} = \widehat{PC} = \widehat{CQ} = \widehat{BQ}$

طبق قضیه $\Rightarrow BM = AM = AN = DN = PD = PC = CQ = PC = 6$ هشت ضلعی



زاویه‌ی دیدگان شامل (محاطی)
کمان درخور

$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \dots = \frac{\widehat{AB}}{2} = \alpha$

@Riazi_mahmoodi