حسابان ۲ (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

محمد گودرزی

۱| کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر دامنهٔ تابع $2f(-x+1)$ برابر $[-2,1)$ باشد، دامنهٔ تابع $f(2x-1)+1$ برابر $(\frac{1}{2},2]$ برابر است.

ب) تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{[x]}$ روی بازهٔ $[1,3]$ یکنوا نیست.

ج) دورهٔ تناوب تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{5})$ برابر ۸ است.

د) اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نباشد، پیوسته هم نیست.

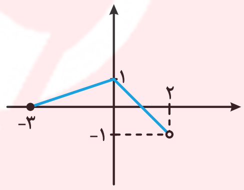
۲| جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب پر کنید.

الف) مجموعهٔ نقاط بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ برابر است با ....

ب) بیش‌ترین مقدار تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\cos^2 2x-\sin^2 2x$ برابر است با ....

۳| معادلهٔ مثلثاتی $3+\tan^4 2x=\frac{2}{\cos^2 2x}$ را حل کنید.

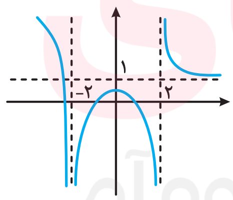
۴| نمودار تابع $f(2x-1)+1$ مانند شکل زیر است. نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x)=-2f(x+1)$ را رسم کنید.



۵| چندجمله‌ای $-4x^2+2ax+b$ بر $x-1$ و $x-a$ بخش‌پذیر است. اگر $ab<0$، مقدار $a+b$ چقدر است؟

۶| تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2 & 1<x\le 3\\ 2 & -2\le x\le 1\end{cases}$ روی بازهٔ $[a,b]$ غیریکنوا است. بیش‌ترین مقدار $b-a$ چقدر است؟

۷| نمودار تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)$ مانند شکل زیر است. حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.



الف) $\lim_{x\to+\infty} f(x+1)=$

ب) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=$

ج) $\lim_{x\to-\infty} -f(x)=$

د) $\lim_{x\to-2} f(x)=$

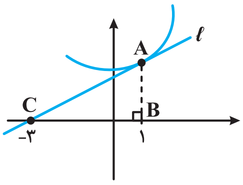
۸| حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-[x^2]}{(1-x)^3}=$

ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^3+(2-x)^3}{x^2+(x+1)^2}=$

۹| مجانب‌های تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^3-2x^2+4x-3}{2x^3-2x^2-x+1}$ را به‌دست آورید.

۱۰| مانند شکل، خط ℓ بر نمودار تابع f در نقطهٔ A مماس است به‌طوری که $x_A=1$ و مساحت مثلث ABC برابر ۲ می‌باشد. مقدار $f'(1)$ را به‌دست آورید.



۱۱| مشتق‌پذیری تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+1 & x\ge 1\\ -x^2+(4-2a)x-1 & x<1\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=1$ بررسی کنید.

۱۲| مشتق توابع داده شده را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x+1}{x^2+x+1}}$

ب) $g(x)=x^2\sin^3(2x+1)$

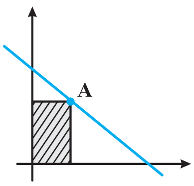
۱۳| اگر $f(x)=\sin 4x$ حاصل عبارت $f'(x)f''(x)$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{48}$ چقدر است؟

۱۴| تابع f در $x=1$ پیوسته و $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$ ، یک ضابطهٔ دلخواه برای تابع f بنویسید.

۱۵| معادلهٔ حرکت متحرکی برحسب زمان (t) به‌صورت $f(t)=\frac{2}{3}t^3-t^2+1$ است. در چه لحظه‌ای این متحرک متوقف می‌شود؟ $(t>0)$

۱۶| اکسترمم‌های مطلق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$ را در بازهٔ $[0,3]$ به‌دست آورید.

۱۷| نقطهٔ A در ناحیهٔ اول دستگاه محورهای مختصات روی خط $2x+y=12$ قرار دارد. از این نقطه بر هر دو محور عمود رسم می‌کنیم تا یک مستطیل ایجاد شود. مختصات نقطهٔ A را طوری به‌دست آورید که مساحت مستطیل بیش‌ترین مقدار ممکن شود.



۱۸| تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3x^2+2x+2c$ مفروض است:

الف) تعیین کنید تابع f روی چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

ب) اگر $x=c$ نقطهٔ عطف تابع f باشد مقدار $f(c)$ را به‌دست آورید.

۱۹| تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)$ دارای هر سه ویژگی زیر است:

الف) $f(-2)=f(0)=f(2)=1$

ب) روی بازهٔ $(-\infty,0)$ همواره $f''(x)>0$

ج) روی بازهٔ $(0,+\infty)$ همواره $f''(x)<0$

نموداری برای تابع f رسم کنید.

حسابان ۲ (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی)

۱
الف) درست
ب) نادرست
ج) درست
د) نادرست

۲
الف) $\{-۱,۱\}$
ب) یک

۳
$۳+\tan^۴ ۲x = ۲(۱+\tan^۲ ۲x)$

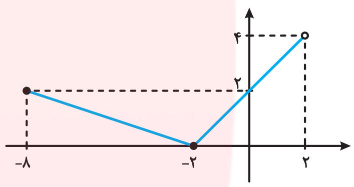
$\Rightarrow \tan^۴ ۲x - ۲\tan^۲ ۲x + ۱ = ۰$

$\Rightarrow (\tan^۲ ۲x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \tan^۲ ۲x = ۱$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan ۲x = ۱ = \tan(\frac{\pi}{۴}) \\ \tan ۲x = -۱ = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸} \\ ۲x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۴



۵
$P(x) = -۴x^۲ + ۲ax + b$

$P(a) = ۰ \Rightarrow -۴a^۲ + ۲a^۲ + b = ۰ \Rightarrow b = ۲a^۲$

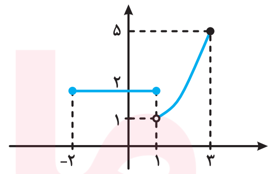
$P(۱) = ۰ \Rightarrow -۴ + ۲a + ۲a^۲ = ۰$

$\Rightarrow (a-۱)(a+۲) = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \Rightarrow b = ۲ \quad \Rightarrow a+b = ۳ \\ a = -۲ \Rightarrow b = ۸ \quad \text{غیرقابل‌قبول} \end{cases}$$

۶ با رسم نمودار واضح است که f روی دامنهٔ خود یعنی $[-۲,۳]$ غیریکنواست. پس:

$\max(b-a) = ۳-(-۲) = ۵$



۷
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+۱) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = -\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to -\infty} -f(x) = -\infty$

د) $\lim\limits_{x\to -۲} f(x) = -\infty$

۸
الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{x^۲ - [x^۲]}{(۱-x)^۳} = \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{x^۲-۱}{(۱-x)^۳}$

$= \lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۱)}{(۱-x)(۱-x)^۲} = \frac{-۲}{۰^+} = -\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(x-۱)^۳ + (۲-x)^۳}{x^۲ + (x+۱)^۲}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ + ۸ - ۱۲x + ۶x^۲ - x^۳}{x^۲ + x^۲ + ۲x + ۱}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{۳x^۲ - ۹x + ۷}{۲x^۲ + ۲x + ۱} = \frac{۳}{۲}$

۹
$f(x) = \frac{(x-۱)(x^۲-x+۳)}{(x-۱)(۲x^۲+۱)} = \frac{x^۲-x+۳}{۲x^۲-۱}$

, $D_f = \mathbb{R} - \{۱, \pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}\}$

مجانب‌های قائم $\begin{cases} x = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \\ x = -\frac{۱}{\sqrt{۲}} \end{cases} \Leftarrow ۲x^۲ - ۱ = ۰$ و مجانب افقی

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}$

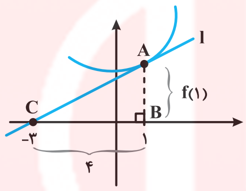
* توجه داشته باشید که خط $x = ۱$ مجانب قائم نیست زیرا

$\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۳$

۱۰
$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times f(۱) = ۲ \Rightarrow f(۱) = ۱$

$\Rightarrow A(۱,۱)\,,\, C(-۳,۰)$

$\Rightarrow f'(۱) = \frac{۱-۰}{۱-(-۳)} = \frac{۱}{۴}$



۱۱
$\lim\limits_{x\to ۱^-} -x^۲ + (۴-۲a)x - ۱ = \lim\limits_{x\to ۱^+} x^۲ - ۲ax + ۱$

$= ۲ - ۲a = ۲ - ۲a \equiv T$

$f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۲a & x \ge ۱ \\ -۲x + ۴ - ۲a & x < ۱ \end{cases}$

$\Rightarrow f'_-(۱) = f'_+(۱) \Rightarrow ۲ - ۲a = ۲ - ۲a \equiv T$

پس f در $x = ۱$ همواره مشتق‌پذیر است.

۱۲
الف) $f(x) = \sqrt{\frac{x^۲ - ۳x + ۱}{x^۲ + x + ۱}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{(۲x-۳)(x^۲+x+۱) - (۲x+۱)(x^۲-۳x+۱)}{(x^۲-۳x+۱)^۲}}{۲\sqrt{\frac{x^۲-۳x+۱}{x^۲+x+۱}}}$$

ب) $g(x) = x^۲ \sin^۳(۲x+۱)$

$g'(x) = ۲x\sin^۳(۲x+۱) + x^۲ \times ۳\sin^۲(۲x+۱)$

$\times ۲\cos(۲x+۱)$

۱۳
$\begin{cases} f'(x) = ۴\cos ۴x \\ f''(x) = -۱۶\sin ۴x \end{cases} \Rightarrow f'(x)f''(x) = -۶۴\sin ۴x \cos ۴x$

$= -۳۲\sin ۸x$

$\Rightarrow -۳۲\sin(۸ \times \frac{\pi}{۴۸}) = -۳۲ \times \frac{۱}{۲} = -۱۶$

۱۴
$f(x) = \sqrt[۳]{x-۱}$

۱۵
$f'(t) = ۲t^۲ - ۲t = ۰ \Rightarrow ۲t(t-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ & ✗ \\ t = ۱ & ✓ \end{cases}$

۱۶
$f(۰) = ۱$

$f(۳) = \frac{۸۱}{۴} - \frac{۵۴}{۳} + ۱ = \frac{۲۴۳ - ۲۱۶ + ۱۲}{۱۲} = \frac{۳۹}{۱۲} = \frac{۱۳}{۴}$

$f'(x) = x^۳ - ۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$

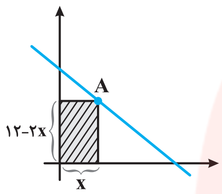
$f(۲) = ۴ - \frac{۱۶}{۳} + ۱ = \frac{۱۲ - ۱۶ + ۳}{۳} = -\frac{۱}{۳}$

$\Rightarrow \begin{cases} \min(f) = -\frac{۱}{۳} \\ \max(f) = \frac{۳۹}{۱۲} \end{cases}$

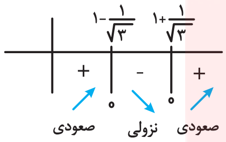
۱۷
$y = ۱۲ - ۲x$

$s(x) = x(۱۲ - ۲x) = ۱۲x - ۲x^۲$

$s'(x) = ۱۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow y = ۱۲ - ۶ = ۶ \Rightarrow A(۳,۶)$



۱۸
$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x + ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{۳}} \\ x = ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۳}} \end{cases}$



$f''(x) = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱ = c \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow f(c) = ۲$

۱۹