هندسه

نام کسانی که هندسه را پی‌ریزی کرده‌اند در نیمه تاریکی سپیده دم تاریخ، محو و مبهم مانده است. بی شبهه لازم بود سال‌های بسیار متمادی از عمر آدمی بگذرد تا درک مفهوم‌های هندسی ممکن شود. می‌گویند که هندسه در مصر زاده شده است. جایی که در هر بهاران رود نیل حد و مرز مزارع کشاورزان را به علت طغیان از بین می‌برد و کشاورزان مجبور بودند دوباره حد و مرزهای کشتزارهای خود را معلوم سازند. آنچه مسلم است وجود هرم‌های مصر وقوف بر ریاضیات، بویژه هندسه را روشن می‌سازد. در مصر هندسه جنبه‌ی عملی داشت و کاربرد آن نیز مورد توجه بود. بابلیان نیز به اصول هندسه وقوف داشتند. باغ‌های معلق که یکی از عجایب هفت‌گانه جهان است ساخته‌ی بابلیان است تا پادشاهانشان به هنگام زیست از آنها برخوردار شوند. در حدود هفتصد سال پیش از میلاد مسیح درهای تاریخ به روی مصریان و بابلیان بسته می‌شود و قومی دیگر مشعل علم را به دست می‌گیرند و آن قوم یونانیان بودند.
بر خلاف دو قوم پیش، نزد یونانیان بسیاری از کسانی را که در پیشرفت علم، از جمله هندسه، کوشیدند شناخته شده‌اند و نامشان زنده و جاوید است. تالس، اقلیدس، فیثاغورس از جمله کسانی هستند که در پیشرفت علم هندسه سهم به سزایی داشتند. آکادمی افلاطون از بزرگترین مراکز آموزش ریاضی آن زمان بود طوری که بر سر در ورودی دانشگاه نوشته شده بود: «هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود.»

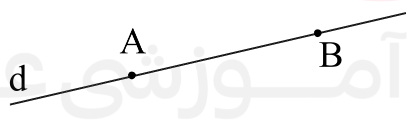
هندسه ۱

خط و نقطه:
خط و نقطه از مفاهیم اولیه و پایه ای علم هندسه محسوب می‌شوند.

تعریف نقطه: نقطه را بصورت یک مفهوم اولیه می‌پذیریم. واقعیت آن است که نقطه تعریف ندارد، زیرا یک مفهوم ذهنی است یعنی همه‌ی ما می‌دانیم نقطه چیست ولی آن را تعریف نمی‌کنیم.
در هندسه نقطه را با یک حرف بزرگ مشخص می‌کنیم مانند نقطه‌ی A یا نقطه‌ی M.

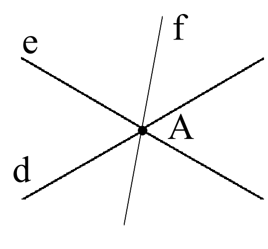
قرارداد: در هندسه هرگاه بگوئیم یا بنویسیم خط، منظور ما همان خط راست خواهد بود.
در هندسه خط را با حروف کوچک انگلیسی نمایش می‌دهند مانند d ، e ، f ، و غیره.
نکته: دو نقطه A و B در صفحه مفروض است و خط d از این دو نقطه عبور کرده است. همان طور که ملاحظه می‌شود هر خط دیگری بخواهیم رسم کنیم که از این دو نقطه عبور کند بر همین خط منطبق خواهد شد. لذا خواهیم داشت:

از هر دو نقطه مشخص واقع بر یک صفحه فقط یک خط عبور می کند.



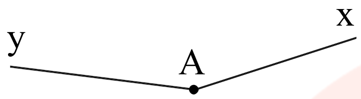
نکته: نقطه‌ی A در صفحه مفروض است و خط d از این نقطه عبور کرده است. همان طور که ملاحظه می‌کنید از این نقطه خطوط بی‌شماری می‌توان رسم کرد که هم از نقطه‌ی A بگذرد و هم بر خط d منطبق نباشد لذا خواهیم داشت:

از هر نقطه واقع در یک صفحه تعداد بیشماری خط می گذرد.



نیم‌خط:

هرگاه یک خط از یک طرف به یک نقطه محدود باشد و از طرف دیگر محدود نباشد، نیم‌خط نامیده می‌شود.



برای نمایش یک نیم‌خط طرفی که به یک نقطه محدود شده است را با یک حرف بزرگ انگلیسی مانند A و B و سمتی که نامحدود است را با یکی از حروف کوچک آخر انگلیسی مانند x و y و z نمایش می‌دهیم.

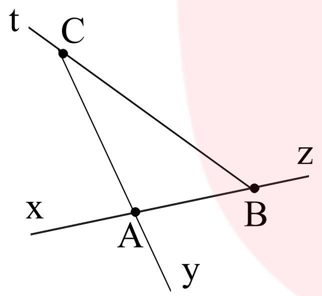
در شکل بالا Ax و Ay دو نیم‌خط هستند که در نقطه‌ی A مشترک هستند.

پاره‌خط:

هرگاه یک خط از دو طرف به دو نقطه محدود باشد، پاره‌خط نامیده می‌شود مانند پاره‌خط AB .

بدیهی است چون هر دو طرف پاره‌خط به دو نقطه ختم می‌شود آن را با حروف بزرگ انگلیسی مانند A و B و C نمایش می‌دهیم.

مثال: در شکل زیر چند نیم‌خط و چند پاره‌خط وجود دارد؟



پاسخ: در شکل روبرو ۳ پاره‌خط وجود دارد:

AB , BC , AC

و همچنین ۸ نیم‌خط وجود دارد:

Az , Bz , Ax , Bx

Ct , Bt ,

Ay , Cy

تساوی دو پاره‌خط:

دو پاره‌خط زمانی با هم مساوی هستند که بتوان آن دو را بر هم منطبق کرد طوری‌که ابتدا و انتهای هر کدام بر دیگری قرار گیرد و منطبق شود.

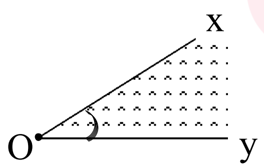
مثال: اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد، کدام رابطه صحیح **نمی‌باشد**؟

۱) $AM + MB = AB$ ۲) $AB = ۲AM$ ۳) $AM = \frac{۱}{۲}AB$ ۴) $AB = \frac{۱}{۲}AM$

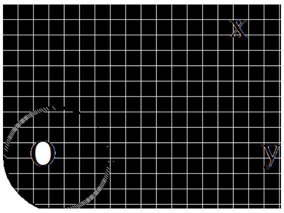
پاسخ: گزینه ۴ صحیح نمی‌باشد.

زاویه:

دو نیم‌خط Ox و Oy را که در رأس O مشترک باشند در نظر می‌گیریم. مجموعه نقاطی که بین این دو نیم‌خط قرار می‌گیرند زاویه‌ی $\widehat{xOy}$ را تشکیل می‌دهند.



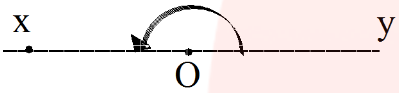
زاویه‌ی $\widehat{xoy}$ را زاویه‌ی $\hat{O}$ نیز می‌نامند. البته باید توجه داشت زاویه‌ی $\widehat{xoy}$ می‌تواند زاویه‌ی بزرگ‌تر نیز باشد. یعنی:



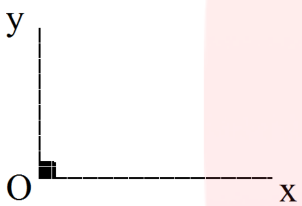
* دو نیم‌خط Ox و Oy دو ضلع زاویه و نقطه‌ی O رأس زاویه می‌باشد.

انواع زاویه:

زاویه‌ی نیم‌صفحه: اگر دو ضلع زاویه در امتداد هم باشند آن زاویه، زاویه‌ی نیم‌صفحه نامیده می‌شود.

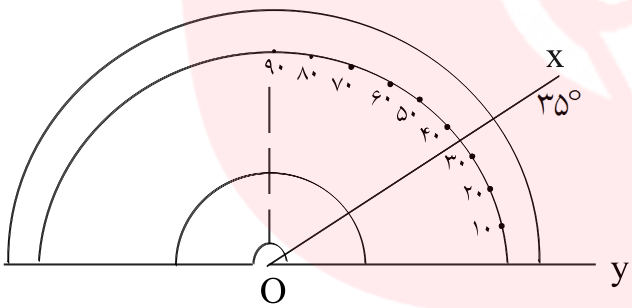


زاویه‌ی قائمه: هرگاه دو ضلع زاویه بر هم عمود باشند، این زاویه زاویه‌ی قائمه نامیده می‌شوند.



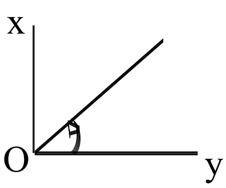
اندازه‌ی زاویه و واحد آن:

اگر یک زاویه قائمه را به ۹۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر یک از آن قسمت‌ها را یک درجه می‌نامیم.
بنابراین هر زاویه‌ی قائمه ۹۰ درجه می‌باشد. علامت درجه، $^\circ$ می‌باشد که بالای اعداد و در سمت راست آن‌ها نوشته می‌شود.
برای اندازه‌گیری زاویه از نقاله استفاده می‌کنیم.
(بدیهی است زاویه‌ی نیم‌صفحه دو برابر زاویه‌ی قائمه و برابر ۱۸۰° است.)



$\boxed{\widehat{xoy} = ۳۵^\circ}$

زاویه‌ی حاده (تند) :

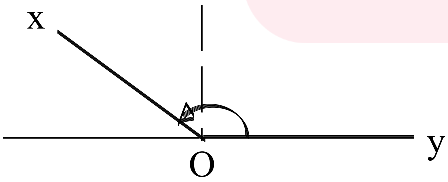


$\widehat{xOy} < ۹۰^\circ$

زاویه‌ی حاده زاویه‌ای است که از زاویه‌ی قائمه کوچکتر است.

زاویه‌ی منفرجه (باز) :

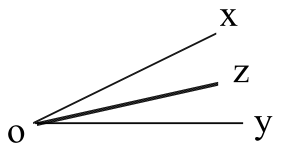
زاویه‌ی منفرجه زاویه‌ای است که از زاویه‌ی قائمه بزرگتر و از زاویه‌ی نیم‌صفحه کوچکتر است.



$۹۰^\circ < \widehat{xOy} < ۱۸۰^\circ$

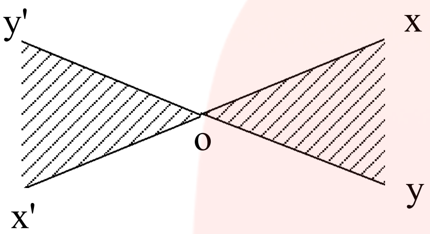
نیمساز زاویه:

نیمساز هر زاویه نیم‌خطی است که از رأس زاویه می‌گذرد و آنرا به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.



oz نیمساز زاویه‌ی $\widehat{xoy}$ است پس: $\widehat{xoz} = \widehat{zoy}$

نکته: هر زاویه فقط یک نیمساز دارد.

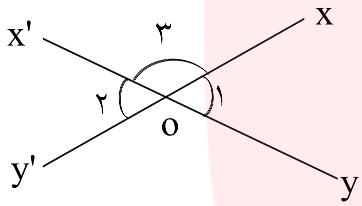


زاویه‌ی مقابل به رأس:

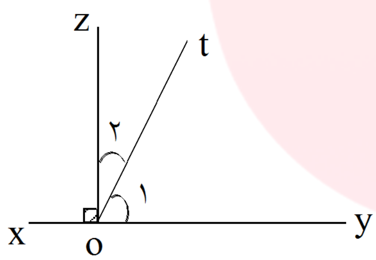
دو زاویه که در رأس مشترک باشند، و اضلاع آن‌ها دو به دو بر امتداد یکدیگر و در جهات مختلف باشند، آن دو زاویه را متقابل به رأس می‌گوییم. دو زاویه‌ی $\widehat{xoy}$ و $\widehat{x'oy'}$ متقابل به رأسند.

$\widehat{xoy} = \widehat{x'oy'}$

نکته: دو زاویه‌ی متقابل به رأس متساوی‌اند.



$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{O_۱} = ۱۸۰^\circ - \widehat{O_۳} \\ \widehat{O_۲} = ۱۸۰^\circ - \widehat{O_۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{O_۱} = \widehat{O_۲}$$



دو زاویه‌ی متمم:

دو زاویه را در صورتی متمم یکدیگر می‌گوییم که مجموع اندازه‌های آن‌ها، ۹۰° باشد، مانند دو زاویه‌ی ۳۵° و ۵۵° و یا زاویه‌ی ۴۴° و ۴۶°.

$\widehat{O_۱} + \widehat{O_۲} = ۹۰^\circ$

نکته: اگر متمم دو زاویه یکی باشد، خود آن دو زاویه نیز با هم برابرند.

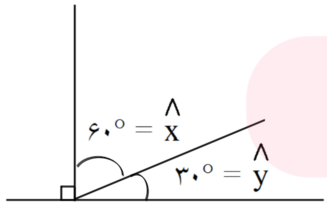
$$\left\{\begin{array}{l} \widehat{O_۱} + \hat{x} = ۹۰^\circ \\ \widehat{O_۲} + \hat{x} = ۹۰^\circ \end{array}\right. \Rightarrow \widehat{O_۱} = \widehat{O_۲}$$

مثال: اندازه یک زاویه‌ی متمم دو برابر دیگری است. اندازه هر کدام را به دست آورید.

پاسخ:

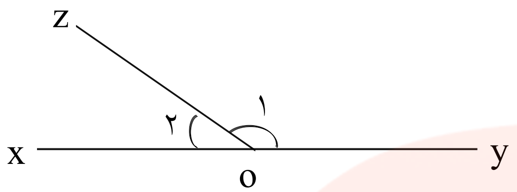
$$\begin{array}{l} \hat{x} + \hat{y} = ۹۰^\circ \\ \hat{x} = \widehat{۲y} \end{array} \Rightarrow \widehat{۲y} + \hat{y} = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{۳y} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{y} = ۳۰^\circ$$

$$\hat{x} = \widehat{۲y} \Rightarrow \hat{x} = ۶۰^\circ$$



زاویه‌های مکمل:

دو زاویه را در صورتی مکمل یکدیگر می‌گوییم که مجموع اندازه‌های آنها ۱۸۰° باشد. مانند زاویه‌های ۵۰° و ۱۳۰° و یا زاویه‌های ۱۴۵° و ۳۵° درجه.



$$\boxed{\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = 180^\circ}$$

مثال: زاویه‌ی $\widehat{A} = 30^\circ$ است، مکمل زاویه‌ی $\widehat{A}$ را به دست آورید.

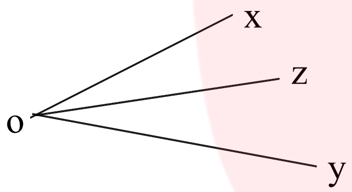
پاسخ: $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ =$ مکمل زاویه A

مثال: دو زاویه مکمل یکدیگرند و اندازه یکی ۳ برابر دیگری است. اندازه هر زاویه را به دست آورید.

پاسخ:
$$\begin{cases}\hat{x} + \hat{y} = 180^\circ \\ \hat{x} = \widehat{3y}\end{cases} \Rightarrow \widehat{3y} + \hat{y} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{4y} = 180^\circ \Rightarrow \hat{y} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

$$\hat{y} = 45^\circ \Rightarrow x = \widehat{3y} = 3 \times 45^\circ = 135^\circ \qquad \boxed{\begin{array}{l}\hat{y} = 45^\circ \\ \hat{x} = 135^\circ\end{array}}$$

دو زاویه‌ی مجاور:



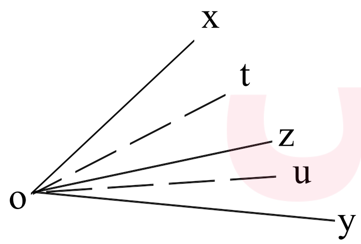
دو زاویه‌ای را مجاور می‌گویند در صورتی که رأس آنها مشترک باشد و یک ضلع آنها مشترک باشد و بین دو ضلع دیگر قرار داشته باشد.

زوایای $\widehat{xoz}$ و $\widehat{zoy}$ مجاور یکدیگرند. بدیهی است چون $\widehat{xoz}$ و $\widehat{zoy}$ مجاور یکدیگرند خواهیم داشت:

$$\boxed{\widehat{xoy} = \widehat{xoz} + \widehat{zoy}}$$

مثال: مجموع دو زاویه‌ی مجاور 80° است. زاویه‌ی بین نیمسازهای آنها را به دست آورید.

پاسخ:



$$\widehat{xoz} + \widehat{zoy} = 80^\circ$$

طرفین رابطه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

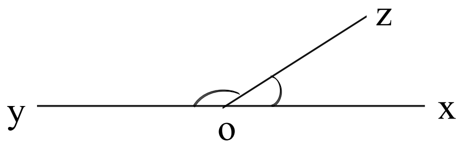
$$\frac{\widehat{xoz}}{2} + \frac{\widehat{zoy}}{2} = \frac{80^\circ}{2}$$

$$\boxed{\widehat{toz} + \widehat{zou} = 40^\circ} \Rightarrow \boxed{\widehat{tou} = 40^\circ}$$

دو زاویه‌ی مجانب:

دو زاویه را که مجاور باشند و مجموعشان نیز 180° باشد دو زاویه‌ی مجانب می‌نامند.

در حقیقت دو زاویه که هم مجاور باشند و هم مکمل باشند مجانب هستند.



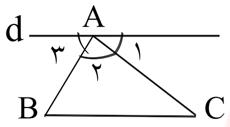
دو زاویه‌ی $\widehat{xoz}$ و $\widehat{zoy}$ مجانب یکدیگرند.

نکته مهم: دو زاویه‌ی مجانب، مکمل نیز می‌باشند، اما دو زاویه‌ی مکمل معلوم نیست که مجانب هم باشند یا نه. چون ممکن است دو زاویه مکمل باشند، اما مجاور نباشند.

مجموع زوایای داخلی یک مثلث:

برای بدست آوردن مجموع زوایای داخلی مثلث می‌توانید از نقاله استفاده کنید و یا سه زاویه را بریده و در کنار یکدیگر قرار می‌دهید. متوجه خواهید شد که مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰° خواهد بود.

قضیه: مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.



فرض	$\overset{\triangle}{ABC}$
حکم	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$

اثبات: برای اثبات خط d را موازی خط BC رسم می‌کنیم طوری که از نقطه A بگذرد. خواهیم داشت:

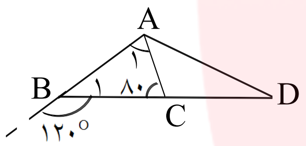
$$\left.\begin{matrix} d \parallel BC \\ AC \text{ مورب} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C} \quad (\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{matrix} d \parallel BC \\ AB \text{ مورب} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{A}_۳ \ (\mathrm{II}) \xrightarrow{\text{داریم که}} \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳ = ۱۸۰^\circ$$

$$\text{از } (\mathrm{I} \text{ و } \mathrm{II}) \text{ خواهیم داشت} \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} + \hat{A}_۲ = ۱۸۰^\circ$$

مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° خواهد بود:

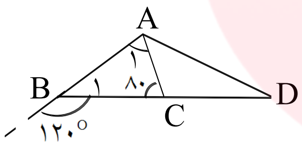
در شکل مقابل اندازه زاویه $\hat{A}_۱$ چقدر است؟



راه حل اول:

$$\hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + ۸۰^\circ) = ۱۸۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۴۰^\circ$$

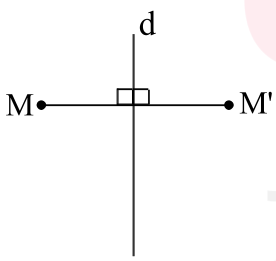
راه حل دوم: $\hat{A}_۱ + \hat{C}_۲ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۱۲۰^\circ - ۸۰^\circ = ۴۰^\circ$



تقارن

در هندسه قرینه هر شکل را می‌توان نسبت به یک نقطه و یا نسبت به یک خط پیدا کرد. به همین علت اگر قرینه‌ی شکل را نسبت به یک نقطه و یا یک خط در نظر بگیریم به ترتیب تقارن را **مرکزی** و **محوری** می‌نامیم.

تقارن محوری



تعریف: خط d در صفحه داده شده است. نقطه‌ی دلخواه M را روی صفحه و خارج از خط d در نظر می‌گیریم قرینه‌ی M نسبت به خط d را M' می‌نامیم به طوریکه d عمود منصف MM' باشد. اگر M روی خط d باشد قرینه‌ی M نسبت به خط d همان نقطه‌ی M تعریف می‌شود.

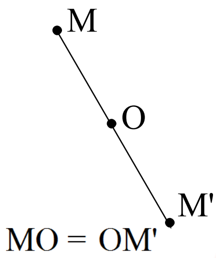
برای پیدا کردن قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک خط کافی است از آن نقطه بر خط عمود کرده و به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم. نقطه به دست آمده قرینه‌ی نقطه دلخواه است نسبت به خط مفروض.

ویژگی‌های تقارن محوری

- در تقارن محوری، قرینه‌ی هر خط راست، یک خط راست است.
- قرینه‌ی هر پاره‌خط با آن پاره‌خط مساوی است.
- تقارن محوری، قرینه‌ی هر زاویه با آن زاویه مساوی است.
- در تقارن محوری قرینه‌ی هر شکل با آن شکل هم اندازه است.

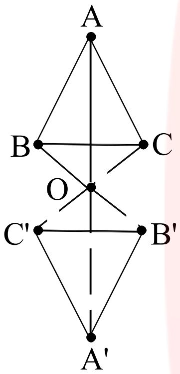
«برای روشن شدن ویژگی‌های فوق برای هر کدام مثالی بزنید و صحت آنرا در دفتر خود بررسی کنید.»

تقارن مرکزی



نقطه‌ی O را در صفحه در نظر بگیرید. متناظر با هر نقطه مانند M که روی O نباشد نقطه‌ای مانند 'M در آن صفحه می‌توان تعیین کرد طوری که OM' = OM و نقطه O وسط 'MM باشد. در این صورت نقطه‌ی 'M را قرینه نقطه‌ی M نسبت به نقطه‌ی O می‌گویند و نقطه‌ی O را مرکز تقارن می‌نامند.
اگر نقطه‌ی M روی مرکز تقارن واقع باشد. قرینه‌ی M همان M خواهد بود و بر خودش منطبق است.

رسم قرینه‌ی یک شکل نسبت به یک نقطه



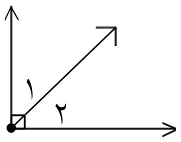
برای رسم قرینه‌ی یک شکل نسبت به یک نقطه که آنرا مرکز تقارن می‌نامیم کافی است از هر نقطه به مرکز تقارن وصل کرده و به اندازه‌ی خودش امتداد دهیم تا قرینه‌ی نقطه‌ی مورد نظر به دست آید. از وصل کردن نقاط قرینه به یکدیگر قرینه‌ی شکل مورد نظر نسبت به مرکز تقارن به دست می‌آید.

ویژگی‌های تقارن مرکزی

- قرینه‌ی مرکزی هر خط راست یک خط راست است.
- قرینه‌ی مرکزی هر شکل با آن شکل هم اندازه است.
- در تقارن مرکزی قرینه‌ی مرکز تقارن بر خودش منطبق است.
- در تقارن مرکزی، قرینه‌ی هر خط با آن خط موازی است.

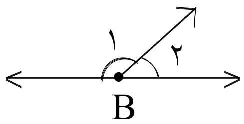
«جهت روشن شدن ویژگی‌های فوق برای هر کدام مثالی بزنید و در دفتر خود قرینه‌ی آن شکل را رسم کنید.»

روابط بین زوایا



$\hat{A}_{۱} + \hat{A}_{۱} = ۹۰^\circ$

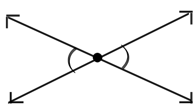
نکته ۱: دو زاویه‌ی متمم: مجموع ۲ زاویه ۹۰° است.



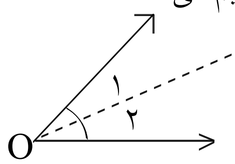
$\hat{B}_{۱} + \hat{B}_{۲} = ۱۸۰^\circ$

نکته ۲: دو زاویه‌ی مکمل: مجموع ۲ زاویه ۱۸۰° است.

نکته ۳: دو زاویه‌ی متقابل به رأس: در صورتی که هر دو زاویه در رأس مشترک باشند و اضلاع آن‌ها در امتداد هم باشند.

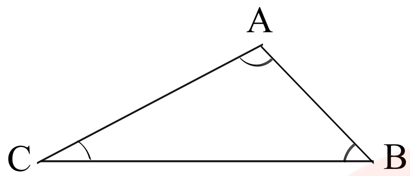


نکته ۴: نیمساز زاویه: نیم‌خطی است که از رأس زاویه رسم می‌شود و آنرا به ۲ زاویه مساوی تقسیم می‌کند.



$\hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲}$

نکته ۵: مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° می‌باشد.



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰°$

هم‌نهشتی مثلث‌ها:

دو مثلث هم‌نهشت: دو مثلث که بر هم منطبق می‌شوند و یک‌دیگر را کاملاً می‌پوشانند دو مثلث هم‌نهشت خوانده می‌شوند.

حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث:

حالت اول: اگر دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلثی و با دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلث دیگری برابر باشند آن دو مثلث قابل انطباق و یا هم‌نهشت هستند. (ض ز ض)

حالت دوم: اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی دیگر برابر باشد آن دو مثلث قابل انطباق و یا هم‌نهشت هستند. (ز ض ز)

حالت سوم: اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر برابر باشد آن دو مثلث قابل انطباق یا هم‌نهشت هستند. (ض ض ض)

شکل‌های هم‌نهشت (مساوی):

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل (انتقال، تقارن یا دوران) در صفحه بر شکل دیگر منطبق کنیم، می‌گوییم این دو شکل با هم مساوی (هم‌نهشت) هستند.

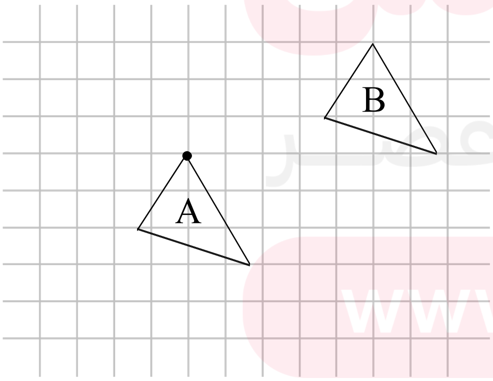
قرارداد: اگر دو شکل A و B هم‌نهشت باشند به زبان ریاضی می‌نویسیم $A \cong B$ (نماد $\cong$ هم‌نهشتی را بیان می‌کند.)

در دو شکل هندسی هم‌نهشت، اجزای متناظر (زاویه‌ها و ضلع‌ها) دو به دو با هم برابرند تساوی اجزای متناظر (زاویه‌ها و اضلاع) را هم می‌توان روی شکل مشخص کرد و هم می‌توان با علامت تساوی به زبان ریاضی نوشت.

تبدیلات هندسی

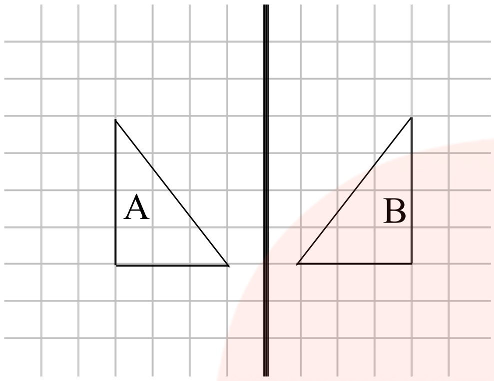
انتقال:

وقتی شکلی را روی صفحه انتقال می‌دهیم، تصویر به‌دست آمده مساوی و هم جهت شکل اولیه است. شکل B انتقال یافته‌ی شکل A می‌باشد.



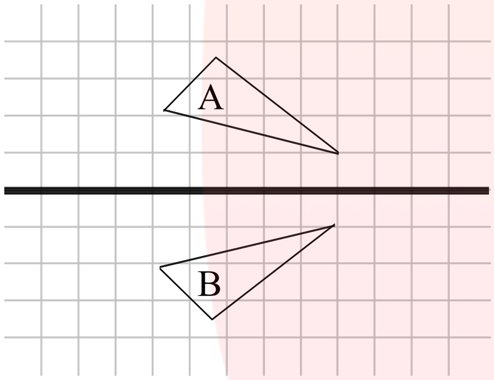
تقارن:

وقتی قرینه‌ی شکلی را نسبت به خط پیدا می‌کنیم تصویر به‌دست آمده مساوی آن شکل است اما جهت آن تغییر می‌کند. شکل B تقارن (قرینه) شکل A است نسبت به خط عمودی



نکته: دو نوع تقارن داریم:

۱- تقارن محوری: که خود ۲ نوع است محور عمودی یا محور افقی



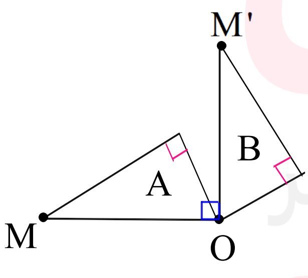
۲- تقارن مرکزی: نسبت به یک نقطه قرینه شکل را رسم می‌کنیم.

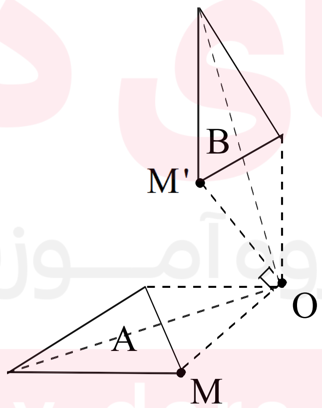
دوران:

دوران به مرکز o و زاویه‌ی x ، تبدیلی است که هر نقطه مثل M را در صفحه به اندازه‌ی زاویه‌ی x به نقطه‌ی M' در آن صفحه تصویر می‌کند.

دوران به مرکز o می‌تواند یکی از رأس‌های شکل باشد و یا خارج از شکل.

مثال: دوران به مرکز o و زاویه‌ی ۹۰°

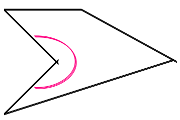




روابط بین زوایا:

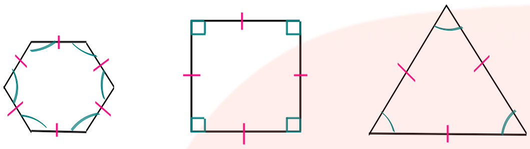
چندضلعی محدب (کوژ): چندضلعی که هیچ زاویه‌ی بزرگ‌تر از ۱۸۰° نداشته باشد را محدب گویند.

چندضلعی مقعر (کاو): چندضلعی که حداقل یک زاویه‌ی بزرگ‌تر از ۱۸۰° داشته باشد را مقعر گویند. مثال:



چندضلعی منتظم: چندضلعی که همه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌هایش با هم مساوی باشند را چندضلعی منتظم گویند.

مثال‌هایی از چندضلعی‌های منتظم:

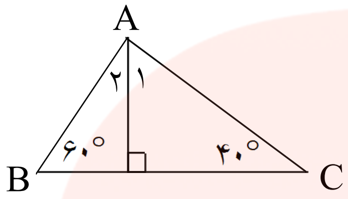


نکته: در چندضلعی منتظم هر چه تعداد ضلع‌ها بیش‌تر شود، اندازه‌ی زاویه‌ها بزرگ‌تر می‌شود.

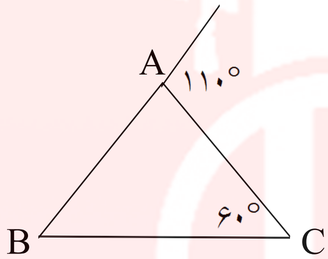
نکته: در چندضلعی منتظم هرچه تعداد ضلع‌ها بیش‌تر شود، شکل به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

۱- دو زاویه متمم یکدیگرند و اندازه‌ی یکی از دیگری ۱۲° بیشتر است، اندازه‌ی هر زاویه چقدر است؟

۲- اندازه‌ی هر یک از زاویه‌های $\hat{A}_۱$ و $\hat{A}_۲$ را حساب کنید.



۳- در مثلث ABC زاویه‌ی B را حساب کنید.

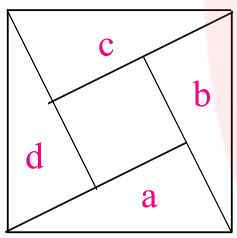


۴- در شکل مقابل مثلث‌های a و b و c و d با هم، هم‌نهشت هستند.

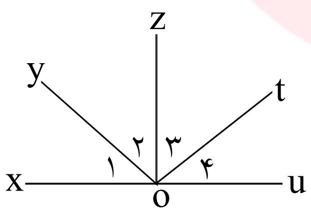
الف) هم‌نهشتی مثلث‌های مقابل را به زبان ریاضی بنویسید.

ب) با چه تبدیل‌هایی یا تبدیلی می‌توان a را بر d تصویر کرد؟

ج) با چه تبدیل یا تبدیل‌هایی می‌توان a را بر c تصویر کرد؟

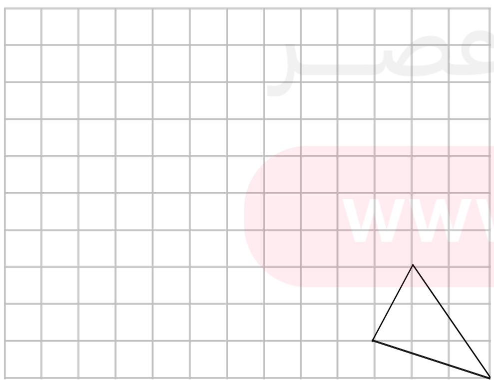


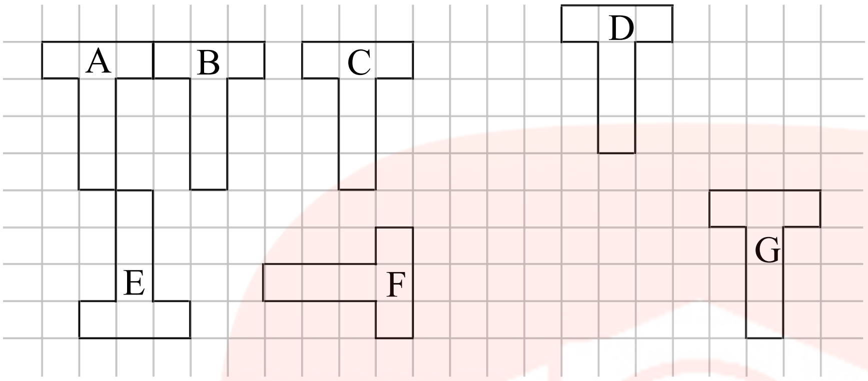
۵- در شکل زیر $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ = \hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$ زاویه‌های قائمه‌ی شکل کدامند؟ (چرا؟)



۶- اندازه‌ی یکی از زاویه‌های تند مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۴۰ درجه است. اندازه‌ی زاویه‌ی تند دیگر آن را حساب کنید.

۷- شکل زیر را با مختصات $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ منتقل کنید. [دو واحد به سمت چپ و چهار واحد به سمت بالا انتقال دهید.]





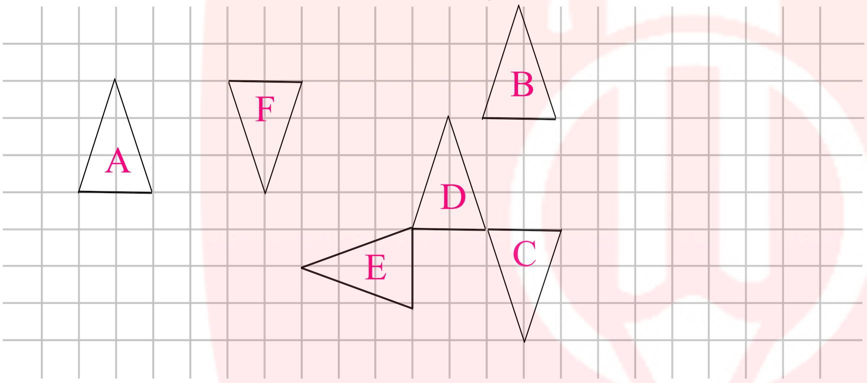
۸- همه‌ی شکل‌ها نوعی تبدیل از شکل A هستند.

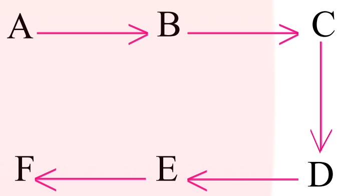
الف) کدام شکل‌ها، انتقال یافته‌ی A هستند؟

ب) کدام شکل‌ها قرینه‌ی A نسبت به خط یا محور هستند؟

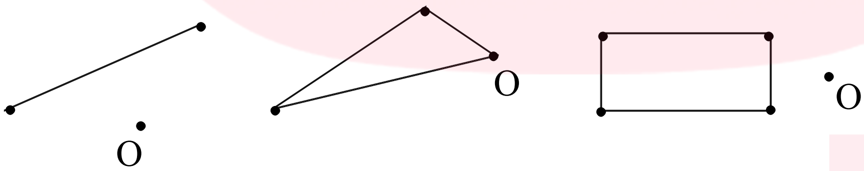
ج) کدام شکل‌ها دوران یافته‌ی A هستند؟

۹- با توجه به شکل‌ها، نوع هر تبدیل (انتقال، تقارن یا دوران) از شکلی به شکل بعدی را روی فلش‌ها بنویسید.





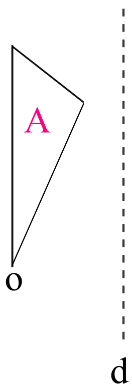
۱۰- قرینه‌ی هر شکل را نسبت به نقطه‌ی O رسم کنید. اگر هر شکل را حول نقطه‌ی O به اندازه‌ی ۱۸۰ درجه دوران دهید، آیا آن شکل بر قرینه‌ی خود منطبق می‌شود؟



۱۱- الف) شکل A را °۹۰ حول نقطه‌ی o در جهت عقربه‌های ساعت بچرخانید و شکل را B بنامید.

ب) قرینه‌ی A را نسبت به خط d رسم کنید و آن‌را c بنامید.

ج) آیا سه شکل با هم مساوی‌اند.

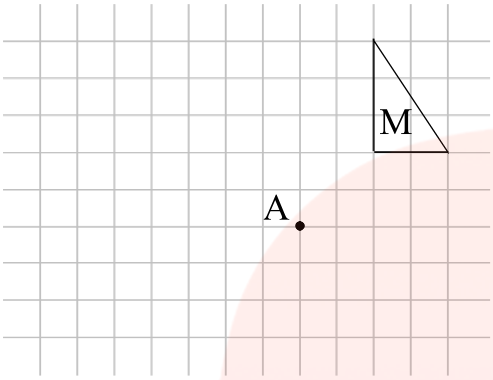


۱۲- الف) شکل M را نسبت به نقطه‌ی A قرینه کنید و آن‌را N بنامید.

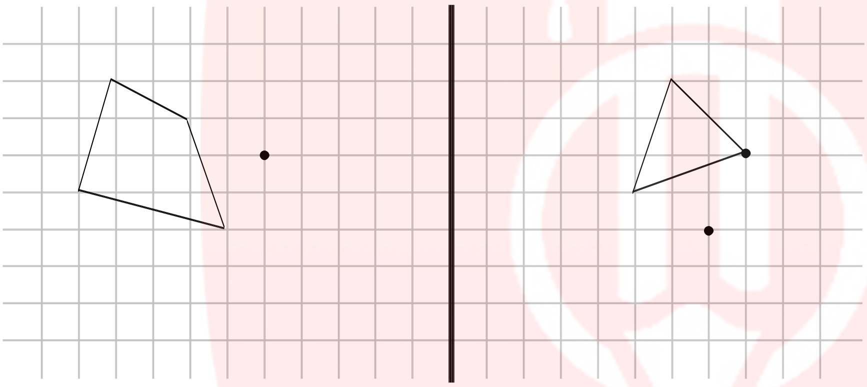
ب) شکل M را نسبت به نقطه‌ی A ، ۹۰° دوران دهید و آن‌را F بنامید.

ج) شکل M را با مختصات $\begin{bmatrix}+۴\\-۴\end{bmatrix}$ انتقال دهید و آن‌را K بنامید. (چهار واحد به سمت راست و ۴ واحد به سمت پایین)

د) اشکال N ، F و K چه رابطه‌ای با هم دارند؟



۱۳- در هر مورد، شکل داده شده را ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول نقطه‌ی o دوران دهید.

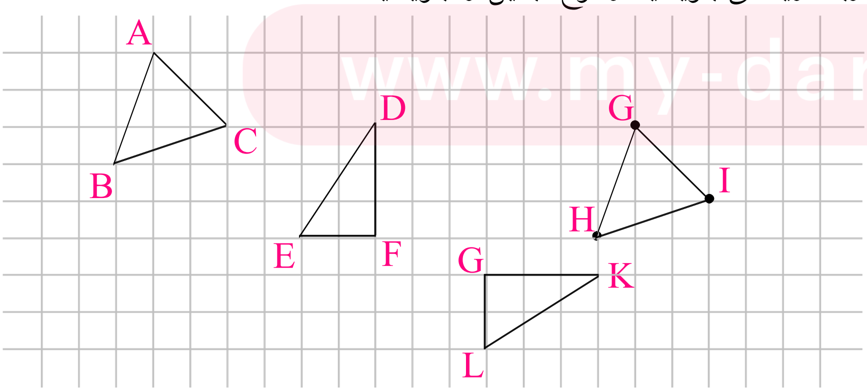


۱۴- با توجه به اینکه قرینه‌ی هر شکل با خود شکل مساوی است، قرینه‌ی هر یک از شکل‌های زیر را نسبت به نقطه‌ی O رسم کنید.

۱۵- اندازه‌ی زاویه‌های خواسته شده را بنویسید. (۱)

$\hat{B} =$ $\quad$ $\hat{x} =$ $\quad$ $\widehat{ACB} =$ $\quad$ $\hat{y} =$

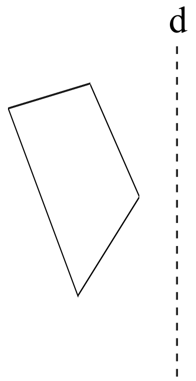
۱۶- مثلث‌های هم‌نهشت را در شکل بیابید. به زبان ریاضی بنویسید و نوع تبدیل را بنویسید.



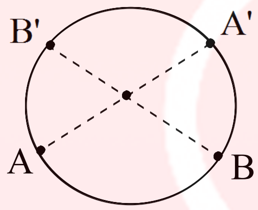
۱۷- قرینه‌ی شکل زیر را نسبت به خط d رسم کنید.

الف) آیا جهت دو شکل یکسان است؟

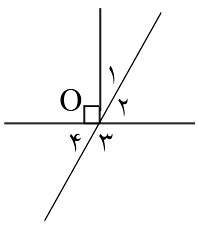
ب) محیط و مساحت دو شکل را با هم مقایسه کنید.



۱۸- در شکل مقابل، قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به مرکز دایره کدام نقطه است؟ قرینه‌ی نقطه‌ی B' نسبت به مرکز دایره کدام نقطه است؟ اگر نقطه‌ی A را حول مرکز دایره به اندازه‌ی ۱۸۰ درجه دوران دهیم، این نقطه بر کدام نقطه منطبق می‌شود؟

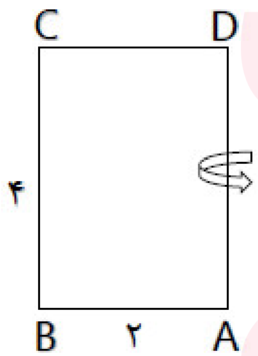


۱۹- در شکل زیر $\hat{o}_1 = 50^\circ$ است اندازه‌ی زاویه‌های $\hat{o}_2$ و $\hat{o}_3$ و $\hat{o}_4$ را حساب کنید.

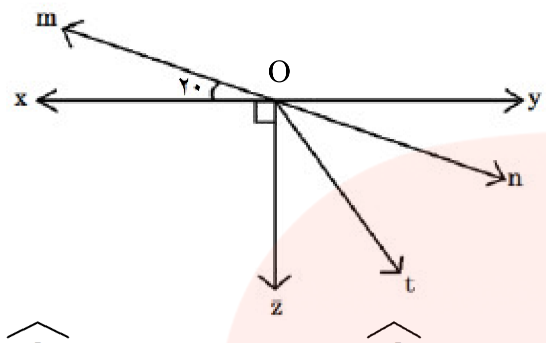


۲۰- دو زاویه مکمل یکدیگرند و اندازه‌ی یکی ۵ برابر دیگری است. آن دو زاویه کدامند؟

۲۱- مستطیل زیر را حول محور AD دوران می‌دهیم. حجم حاصل از این دوران را بیابید. (۱)



۲۲- در شکل زیر Ot نیم‌ساز زاویه $\widehat{zOn}$ است. اندازه زاویه‌های خواسته شده را بیابید. (۰/۷۵)

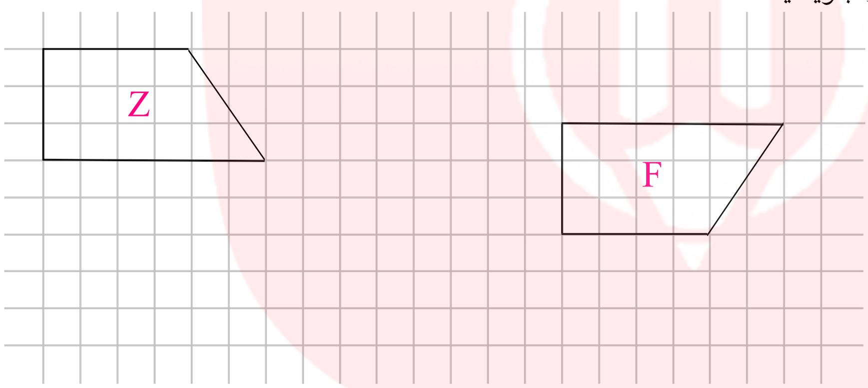


$\widehat{yOn}=.......$ $\widehat{nOt}=.......$ $\widehat{mOz}=.......$

۲۳- با توجه به شکل تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$(AD + DE) - (AC + CD)$

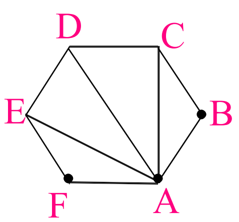
۲۴- می‌خواهیم شکل M را طوری رسم کنیم که بتوانیم با ۲ تبدیل متوالی شکل Z را بر شکل F منطبق کنیم. شکل M را رسم کنید و روی هر فلش نوعی تبدیل را بنویسید.



۲۵- در شش‌ضلعی منتظم مقابل، چهار مثلث (که دو به دو با هم مساوی هستند) تشکیل شده است.

الف) کدام مثلث‌ها با هم، هم‌نهشت هستند، آن‌ها را به زبان ریاضی نمایش دهید.

ب) تساوی اجزای متناظر را روی شکل مشخص کرده و بنویسید.

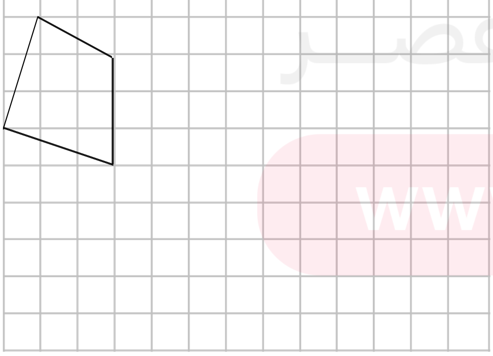


۲۶- اندازه‌های دو زاویه‌ی مثلثی ۳۵ درجه و ۷۲ درجه است. اندازه‌ی زاویه‌ی سوم آن را حساب کنید.

۲۷- شکل زیر را ۵ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین انتقال دهید.

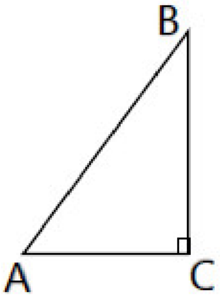
الف) آیا جهت شکل تغییر می‌کند؟

ب) محیط و مساحت شکل انتقال یافته را با شکل اولیه مقایسه کنید.



۲۸- الف) قرینه‌ی شکل مقابل را نسبت به پاره‌خط BC رسم کنید. (۰/۵)

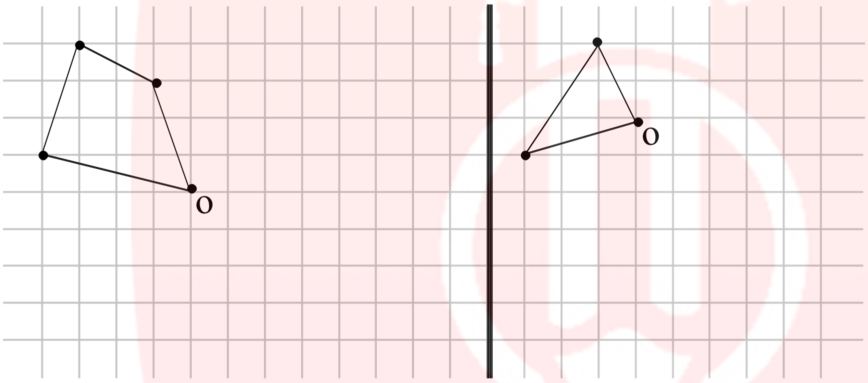
ب) دوران‌یافته شکل قسمت (الف) را نسبت به نقطه C با دوران ۹۰° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیدا کنید.



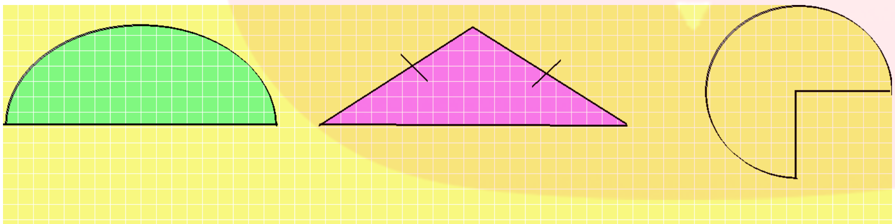
۲۹- در هر مورد، شکل داده شده را 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول نقطه‌ی o دوران دهید.

ب)

الف)



۳۰- محور تقارن هر شکل را رسم کنید.

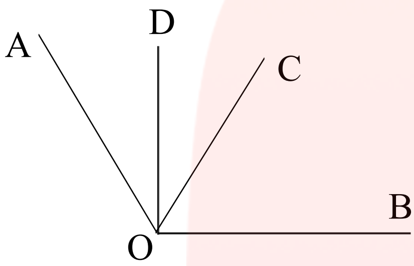


۳۱- دو زاویه $\hat{M}$ و $\hat{N}$ مکمل یکدیگرند. اگر $\hat{M} =$ ۱۲۶° و $\hat{N} = \frac{۲}{۳}\hat{D}$ باشد، متمم زاویه $\hat{D}$ برابر است با:

۱) ۹۰°　　۲) ۱۰°　　۳) ۱۸°　　۴) ۹°

۳۲- در ساعت دو و بیست دقیقه زاویه بین عقربه‌ی دقیقه شمار و عقربه ساعت شمار چند درجه است؟

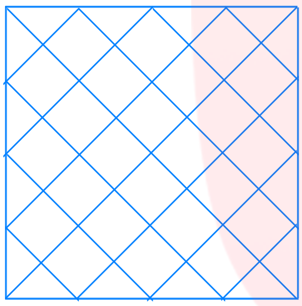
۱) ۴۰°　　۲) ۵۰°　　۳) ۵۵°　　۴) ۶۰°



۳۳- در شکل مقابل OC نیمساز زاویه $\widehat{AOB}$ و OD نیم‌خط دلخواهی است. حاصل عبارت $\widehat{AOD} - \widehat{BOD}$ برابر است با:

۱) $۲\widehat{COD}$　　۲) $\frac{\widehat{COD} + ۲\widehat{AOD}}{۲}$

۳) $۳\widehat{AOD}$　　۴) $\frac{\widehat{COB} + \widehat{AOD}}{۲}$

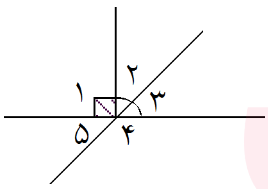


۳۴- در شکل روبه‌رو چند ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه وجود دارد؟

۱) ۸۰
۲) ۱۶۰
۳) ۱۷۶
۴) ۱۲۰
۵) ۲۳۲

۳۵- چند تا چندضلعیِ منتظم درون یک هشت‌ضلعیِ منتظم می‌توان رسم کرد به‌گونه‌ای که همه‌ی رأس‌های هریک از آن‌ها روی رأس‌هایی از هشت‌ضلعیِ منتظم باشد؟

۱) هیچ　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳　　۵) ۴



۳۶- در شکل مقابل $\hat{۲} =$ ۶۰° است. اندازه‌ی زاویه‌ی ۴ چند درجه است؟

۱) ۹۵°　　۲) ۱۲۰°　　۳) ۱۵۰°　　۴) قابل محاسبه نیست.

۳۷- اگر به اندازه‌ی زاویه‌ای ۳۰° بیفزاییم، حاصل از مکمل همان زاویه ۲۰° کمتر می‌شود. مقدار زاویه چقدر است؟

۱) ۵۵°　　۲) ۹۰°　　۳) ۶۵°　　۴) ۶۶°

۳۸- زاویه‌ی A مکمل $\hat{C}$ و زاویه C متمم $\hat{B}$ است. کدام رابطه درست است؟

۱) $\hat{A} - \hat{B} =$ ۹۰°　　۲) $\hat{A} - \hat{C} =$ ۹۰°　　۳) $\hat{B} - \hat{C} =$ ۴۵°　　۴) $\hat{A} = ۲\hat{C}$

۳۹- دو زاویه متمم یکدیگرند، اگر مجموع زاویه‌ی بزرگتر با شش برابر زاویه‌ی کوچکتر مساوی ۱۶۵° باشد، مکمل زاویه‌ی بزرگتر برابر است با:

۱) ۱۰۵°　　۲) ۱۲۵°　　۳) ۷۵°　　۴) ۱۶۵°

۴۰- مجموع دو زاویه ۸۰° است. مجموع مکمل‌های آنها چند درجه است؟

۱) ۸۰°　　۲) ۱۲۰°　　۳) ۲۷۰°　　۴) ۲۸۰°

۴۱- متمم $\widehat{A}$ با $\frac{۲}{۵}$ مکمل $\widehat{B}$ برابر است. اگر $\widehat{B} = ۱۰۰^\circ$ باشد، $\widehat{A}$ کدام است؟

۱) ۱۰°　　۲) ۸۰°　　۳) ۵۸°　　۴) ۳۲°

۴۲- اگر روی یک خط ۵ نقطه بگذاریم، چند پاره‌خط به‌وجود می‌آید؟

۱) ۵　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۲۴

۴۳- نیمسازهای دو زاویه مجاور و مکمل:

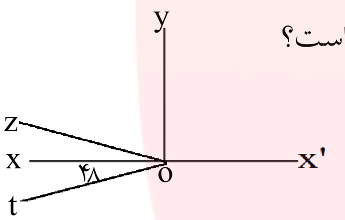
۱) بر هم عمودند.　　۲) با هم زاویه ۴۵° می‌سازند.

۳) با هم موازیند.　　۴) بر هم منطبق‌اند.

۴۴- مکمل زاویه $\widehat{A}$، $\frac{۲}{۳}$ متمم زاویه $\widehat{B}$ است. اگر زاویه $\widehat{A} = ۱۲۶$ باشد، زاویه $\widehat{B}$ چند درجه است؟

۱) ۹　　۲) ۳۶　　۳) ۵۴　　۴) ۸۱

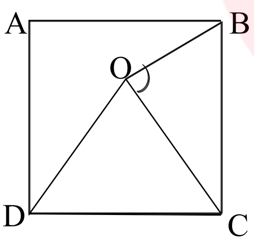
۴۵- در شکل مقابل نسبت زاویه $\widehat{zox}$ به $\widehat{xot}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. اندازه‌ی $\widehat{zoy}$ چند درجه است؟



۱) ۴۸　　۲) ۴۴

۳) ۵۵　　۴) ۶۶

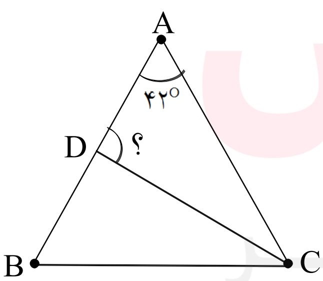
۴۶- چهارضلعی ABCD مربع و مثلث OCD متساوی‌الاضلاع است. اندازه‌ی زاویه‌ی BOC چند درجه است؟



۱) ۶۰°　　۲) ۷۵°

۳) ۴۵°　　۴) ۸۰°

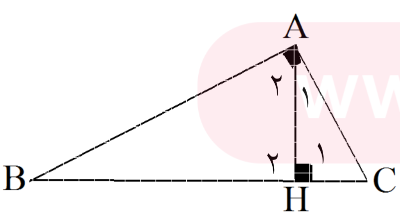
۴۷- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین و زاویه‌ی $\widehat{A} = ۴۲^\circ$ است. اگر CD نیمساز زاویه‌ی C باشد، زاویه‌ی $\widehat{D}$ چند درجه خواهد بود؟



۱) ۷۶/۵　　۲) ۱۴۵/۵

۳) ۱۳۸　　۴) ۱۰۳/۵

۴۸- در شکل زیر کدام دو زاویه با هم برابر هستند؟



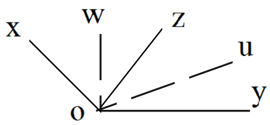
۱) $\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$　　۲) $\widehat{B} = \widehat{C}$

۳) $\widehat{B} = \widehat{A}_۱$　　۴) $\widehat{A}_۲ = \widehat{H}_۲$

۴۹- دو زاویه متمم یکدیگر هستند و اندازه‌ی یکی ۴ برابر دیگری است. اندازه‌ی زاویه‌ی بزرگتر چند درجه است؟

۱) ۷۲°　　۲) ۸۰°　　۳) ۶۴°　　۴) ۱۸°

۵۰- در شکل مقابل $\widehat{zoy} = ۴۰^\circ$ و Ou نیمساز آن است. همچنین $\widehat{xoz} = ۸۰^\circ$ و Ow نیمساز آن است. اندازه $\widehat{wou}$



چقدر است؟

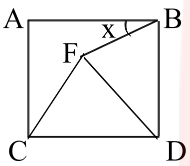
۱) ۴۰°　　۲) ۶۰°　　۳) ۲۰°　　۴) ۸۰°

۵۱- اختلاف دو زاویه متمم ۲۰° است. اندازه مکمل زاویه کوچکتر چند درجه است؟

۱) ۳۵°　　۲) ۱۴۵°　　۳) ۵۵°　　۴) ۱۲۵°

۵۲- اندازه‌ی یک زاویه دو برابر اندازه‌ی زاویه‌ی متمم آن است. اندازه‌ی این زاویه کدام است؟

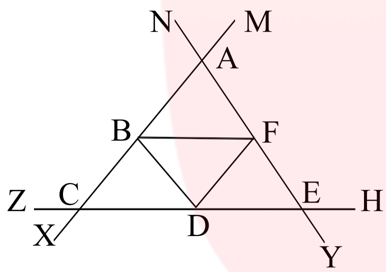
۱) ۱۵°　　۲) ۴۵°　　۳) ۳۰°　　۴) ۶۰°



۵۳- در شکل زیر چهار ضلعی ABCD مربع و مثلث FDC متساوی‌الاضلاع است، مقدار x چقدر است؟

۱) ۳۰°　　۲) $۲۲/۵^\circ$

۳) ۷۵°　　۴) ۱۵°



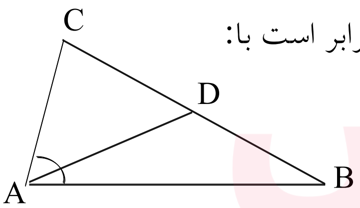
۵۴- در شکل مقابل چند نیم خط می‌بینید؟

۱) ۶　　۲) ۱۲

۳) ۱۸　　۴) ۲۴

۵۵- زوایای مثلثی به نسبت ۱ و ۲ و ۵ می‌باشد. کوچکترین زاویه‌ی این مثلث کدام است؟

۱) ۲۰°　　۲) $۲۲/۵^\circ$　　۳) ۳۰°　　۴) ۴۵°



۵۶- در مثلث ABC، $AC = CD$ و $\widehat{CAB} - \widehat{ABC} = ۳۰^\circ$ در این صورت $\widehat{BAD}$ برابر است با:

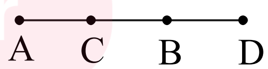
۱) ۳۰°　　۲) ۲۰°

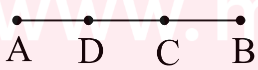
۳) $۲۲/۵^\circ$　　۴) ۱۵°

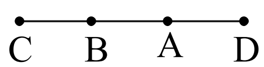
۵۷- در ساعت ۲۵ دقیقه بعد از ظهر، زاویه کوچکتر بین دو عقربه‌ی ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار برابر است با: (مسابقات علمی آمریکا)

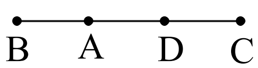
۱) $۱۳۲^\circ , ۳۰'$　　۲) ۱۵۰°　　۳) $۱۳۷^\circ , ۳۰'$　　۴) $۱۳۷^\circ , ۳۲'$

۵۸- در کدام شکل، رابطه‌ی مقابل برقرار است؟　$\overline{CD} - \overline{CB} = \overline{AB} + \overline{DA}$

۱) 

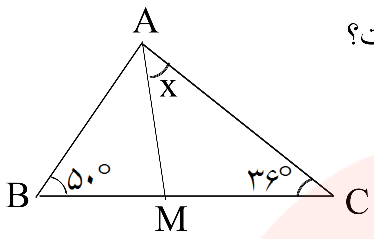
۲) 

۳) 

۴) 

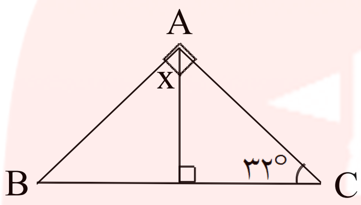
۵۹- تفاضل ۲ زاویه‌ی متمم [redacted] است. زاویه‌ی بزرگ‌تر چند درجه است؟

۱) ۶۹°　　۲) ۳۱°　　۳) ۶۲°　　۴) ۵۹°



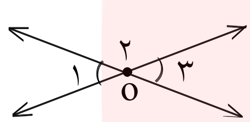
۶۰- در شکل زیر AM نیم‌ساز زاویه‌ی $B\hat{A}C$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی x کدام گزینه است؟

۱) ۸۶°
۲) ۵۴°
۳) ۴۷°
۴) ۴۰°



۶۱- با توجه به شکل اندازه‌ی زاویه‌ی x کدام گزینه است؟

۱) ۶۸°
۲) ۳۲°
۳) ۱۱۲°
۴) ۵۸°

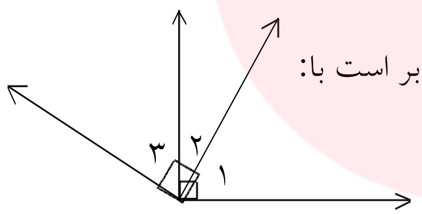


۶۲- در شکل مقابل دو زاویه‌ی $\hat{o}_1$ و $\hat{o}_3$ متمم یک‌دیگرند. مقدار $\hat{o}_2$ چقدر است؟

۱) ۱۲۵° ۲) ۱۳۰°
۳) ۱۳۵° ۴) ۱۴۰°

۶۳- در یک مثلث نسبت زاویه‌ها ۱ و ۲ و ۵ است. مکمل زاویه‌ی کوچک‌تر چه‌قدر است؟

۱) ۶۷/۵° ۲) ۱۲۷/۵° ۳) ۱۴۷/۵° ۴) ۱۵۷/۵°

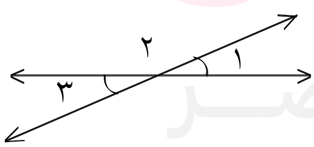


۶۴- در شکل مقابل $\begin{cases}\hat{1}+\hat{2}=90^\circ\\ \hat{3}+\hat{2}=90^\circ\end{cases}$ اگر $\hat{1}+\hat{3}=98^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه ۲ برابر است با:

۱) ۴۱°
۲) ۵۱°
۳) ۴۵°
۴) ۴۹°

۶۵- مکمل یک زاویه ۳ برابر خود زاویه است. آن زاویه کدام است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۴۵°



۶۶- مجموع ۳ زاویه $\hat{1}$ ، $\hat{2}$ و $\hat{3}$ برابر ۲۱۴° است. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{2}$ چه‌قدر است؟

۱) ۱۲۴°
۲) ۱۴۴°
۳) ۱۳۶°
۴) ۱۴۶°