

علم آمار و علم احتمال



❖ علم آمار در پی شناخت جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه های جمع

آوری شده معلوم است.

پدیده هایی که با شمارش و تعداد سر و کار دارند مربوط به علم آمار

هستند



❖ علم احتمال در پی بررسی یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم است و

به نوعی در جهت عکس علم آمار است.

پدیده هایی که میخواهیم امکان و شانس آن ها را بررسی کنیم مربوط به علم

آمار هستند.

📖 مثال: "کارخانه هایی که سهام خود را در بورس عرضه کرده اند" و "امکان پایین آمدن شاخص داوجونز در بورس

وال استریت در سال آینده" هر کدام مربوط به کدام علم است؟

(۱) علم آمار - علم آمار (۲) علم احتمال - علم احتمال

(۳) علم آمار - علم احتمال (۴) علم احتمال - علم آمار

📖 مثال: کدام گزینه مربوط به علم احتمال است؟

(۱) تعداد افراد حاضر در کلاس درس (۲) بلندقدترین دانش آموز مدرسه

(۳) امکان ظاهرشدن ۲ رو در ۴ پرتاب (۴) بالاترین نمره در کارنامه درسی

📖 مثال: "تعداد دانش آموزان علاقه مند به درس ریاضی" و "شانس گرفتن نمره بالاتر از ۱۸ در آزمون پایان ترم

درس آمار" به ترتیب مربوط به کدام علم میشود؟

(۱) آمار-آمار (۲) آمار-احتمال (۳) احتمال-آمار (۴) احتمال-احتمال

فضای نمونه ای



پدیده ای که قبل از رخ دادن، نتیجه اش معلوم نیست ولی مجموعه نتایج ممکن آن مشخص است آزمایش تصادفی نامیده میشود. مانند پرتاب سکه، پرتاب تاس، ... مجموعه همه نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می نامند و با S نشان می دهند و هریک از عضوهای آن را یک برآمد می نامند.

از آنجائیکه فضای نمونه یک مجموعه است، پس به دو روش زیر میتوان آن را مشخص کرد:

نام بردن (فهرست کردن) برآمدها معرفی خاصیت مشترک برآمدها به زبان ریاضی (گزاره نما)

📖 مثال: یک راننده تاکسی در ایستگاه منتظر میماند تا حداکثر ۴ مسافر سوار کند. البته ممکن است با کم تر از ۴ مسافر

هم حرکت کند. اما در مسیر برگشت هرگز خالی برنمیگردد. اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما

مهم باشد، فضای نمونه ای برای توصیف چنین پدیده ای چند عضو دارد؟

(۱) ۲۰ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۲۵

📖 مثال: برای هریک از پدیده های زیر فضای نمونه ای را مشخص کنید.

الف) پرتاب یک سکه

ب) خانواده تک فرزندی

پ) ریختن یک تاس

ت) خارج کردن یک لامپ به تصادف از جعبه ای شامل ۵ لامپ با شماره های ۱ تا ۵

📖 مثال: فضای نمونه ای هر یک از پدیده های زیر را مشخص کنید.

الف) پرتاب دو سکه با هم (دو بار پرتاب یک سکه)

ب) پرتاب سه سکه با هم (سه بار پرتاب یک سکه)

📖 مثال: فضای نمونه ای آزمایش پرتاب دو تاس با هم (دو بار پرتاب یک تاس) را مشخص کنید.

📖 مثال: در پرتاب یک سکه و یک تاس با هم فضای نمونه ای چند برآمد دارد؟

📖 مثال: در یک ایستگاه هواشناسی در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص میشود:

- دمای هوا: سرد یا گرم
- رطوبت هوا: خشک یا مرطوب
- سرعت باد: باد میوزد یا باد نمیوزد
- وضعیت هوا: صاف، نیمه ابری، یا ابری
- مقدار بارش: بارندگی یا عدم بارندگی

الف) فضای نمونه را برای یک لحظه تصادفی در این ایستگاه هواشناسی مشخص کنید.

ب) این فضای نمونه چندبرآمد دارد؟

📖 مثال: سکه ای را یک بار پرتاب میکنیم. اگر "پشت" بیاید آنگاه تاس را میریزیم. و اگر "رو" بیاید سکه را دوبار

دیگر پرتاب میکنیم.

فضای نمونه را مشخص کنید.

پیشامد



هر زیرمجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد می نامند. یعنی پیشامد بخشی از فضای نمونه است که مطلوب مساله است. بنابراین اگر فضای نمونه آن دارای n عضو باشد، برای آن میتوان 2^n پیشامد در نظر گرفت.

یعنی هر عضو از فضای نمونه می تواند در پیشامد حضور داشته باشد یا نداشته باشد.

هر پیشامد تک عضوی را ساده مینامیم.

📖 مثال: تاسی را پرتاب میکنیم. پس از ظاهر شدن عدد روی تاس، به تعداد همان عدد سکه پرتاب میکنیم. فضای نمونه

ای این آزمایش چندعضوی است؟

۳۸۴ (۴)

۶۴۲ (۳)

۴۸۴ (۲)

۱۲۶ (۱)

📖 مثال: از مجموعه اعداد طبیعی $\{1, 11, 12, \dots, 49, 50\}$ عددی را به تصادف انتخاب و ارقام آن را درهم ضرب می

کنیم و از این حاصل ضرب ها یک مجموعه می سازیم. کدام عدد در فضای نمونه این آزمایش وجود ندارد؟

۳۰ (۴)

۱۸ (۳)

۲۱ (۲)

۳۲ (۱)

📖 مثال: اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ فضای نمونه ای و $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ دو پیشامد در S باشند، پیشامد

$(A \cap B)' \cup (A \cap B)$ کدام است؟

$\{3\}$ (۴)

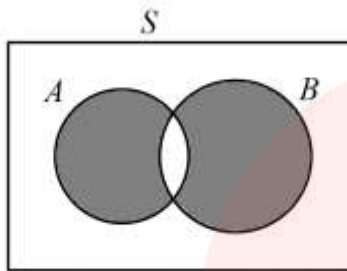
$\{3, 4\}$ (۳)

$\{1, 2, 4\}$ (۲)

$\{1, 2, 3, 4\}$ (۱)

www.my-dars.ir

اگر B, A دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، آنگاه نمودار مقابل مربوط به کدام پیشامد است؟



- (۱) $A \cup B'$
 (۲) $A' \cap B'$
 (۳) $(A \cap B) - (A \cap B)$
 (۴) $(A - B) \cup (B - A')$

مثال: "پیشامد A رخ ندهد یا B رخ ندهد" به کدام صورت زیر نوشته میشود؟

- (۱) $(A \cup B)'$
 (۲) $(A - B) \cup (B - A)$
 (۳) $(A' \cap B)'$
 (۴) $A' \cup B'$

مثال: اگر A پیشامد زوج بودن یک عدد طبیعی و B پیشامد مضرب ۳ بودن یک عدد طبیعی باشد، پیشامد آن که

عدد مضرب ۶ باشد، کدام است؟

- (۱) $A \cup B$
 (۲) $A \cap B$
 (۳) $A \cap B'$
 (۴) $A \cup B'$

مثال: در فضای نمونه ای $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، با ظاهر شدن عدد ۳ چند پیشامد رخ می دهد؟

- (۱) ۵
 (۲) ۳۶
 (۳) ۳۲
 (۴) ۶۴

مثال: در فضای نمونه ای $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ اگر پیشامد $A = \{1, 2, 3\}$ رخ داده باشد، چند پیشامد در S رخ نداده

است؟

www.my-dars.ir

- (۱) ۶۴
 (۲) ۱۲۸
 (۳) ۳۲
 (۴) ۲۵۶

مثال: در پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد "ظاهر شدن دست کم یک عدد ۳" و B پیشامد "آمدن مجموع زوج باشد"، $A - B$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ ۷(۲) ۸(۳) ۹(۴)

مثال: سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو بیاید دو سکه دیگر را نیز پرتاب می کنیم. تعداد کل پیشامدهای ممکن کدام است؟

- (۱) ۵ ۸(۲) ۳۲(۳) ۶۴(۴)

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می کنیم. پیشامد آنکه تاس کمتر از ۳ نیاید یا سکه رو بیاید چند عضو دارد؟

- (۱) ۲ ۱۰(۲) ۱۲(۳) ۹(۴)

مثال: در پرتاب دو تاس سالم، اگر A پیشامد آمدن اعداد متمایز و B پیشامد مجموع بیش تر از ۷ باشد، پیشامد $A \cap B$ چند برآمد دارد؟

- (۱) ۱۸ ۱۶(۲) ۱۴(۳) ۱۲(۴)

مثال: در پرتاب دو سکه با هم، هر دو پشت آمده اند. چند پیشامد از فضای نمونه این آزمایش رخ داده است؟

- (۱) ۱۶ ۱(۲) ۸(۳) ۳(۴)

www.my-dars.ir

📖 مثال: جعبه ای شامل ۱۵ عدد لامپ به شماره های ۱ تا ۱۵ است. لامپی به تصادف از جعبه بیرون می آوریم.

الف) پیشامد A که در آن "عدد روی لامپ یک عدد اول باشد" را مشخص کنید.

ب) پیشامد B که در آن "عدد روی لامپ فرد و مضرب ۳ باشد" را مشخص کنید.

📖 مثال: در آزمایش پرتاب دو تاس با هم:

الف) پیشامد A که در آن "مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۸ است" را مشخص کنید.

ب) پیشامد B که در آن "هر دو عدد ظاهر شده یکسان اند" را مشخص کنید.

پ) پیشامد C که در آن "مجموع دو عدد ظاهر شده عددی اول است" را مشخص کنید.

نکته در مورد مجموع اعداد رو شده در دو تاس:



مای دارس
گروه آموزشی عصر

📖 مثال: در بازی سنگ کاغذ قیچی، بین دو نفر به نام های a, b :

الف) فضای نمونه را مشخص کنید. ب) پیشامد آنکه شخص a برنده شود را مشخص کنید.

📖 مثال: فرض کنید A, B, C سه پیشامد از فضای نمونه ای S باشند. هر کدام از پیشامدهای زیر را با جبرمجموعه ای نشان دهید.

الف) پیشامدهای A, B رخ بدهند و پیشامد C رخ ندهد

ب) فقط پیشامد A رخ بدهد.

پ) حداقل یکی از سه پیشامد رخ دهد.

ت) حداکثر یکی از سه پیشامد رخ دهد.

📖 مثال: سکه ای را سه بار متوالی پرتاب میکنیم:

الف) پیشامد A که در آن هر سه بار مشابه بیاید را مشخص کنید.

ب) پیشامد B که در آن زوج بار رو بیاید را مشخص کنید.

پ) $A \cap B'$ را تشکیل دهید.

📖 مثال: یک سکه سالم را سه بار می اندازیم، مطلوبست:

الف) فضای نمونه ای این تجربه تصادفی

ب) پیشامد A که در آن فقط دوبار رو بیاید.

ج) پیشامد B که در آن اقلاً "دو بار پشت بیاید".

د) پیشامد $A - B$ را مشخص کنید.

www.my-dars.ir

📖 مثال: یک تاس را ۳ بار پرتاب میکنیم.

الف) پیشامد A که در آن "تاس برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید" را مشخص کنید.

ب) پیشامد B که در آن "تاس تا پرتاب سوم، دوبار ۶ بیاید" را مشخص کنید.

📖 مثال: فضای نمونه ای آزمایش پرتاب یک تاس شامل چندپیشامد است که دارای برآمدهایی(اعضای) فردهستند؟

۵۶(۴)

۵۵(۳)

۳۱(۲)

۹(۱)

📖 مثال: یک سکه را ۱۰ بار پرتاب میکنیم. پیش آمداینکه سکه موردنظر دقیقاً سه بار رو بیاید و در بار دهم نیز رو آمده باشد، چندعضو دارد؟

۱۰۸(د)

۸۱(ج)

۶۴(ب)

۳۶(الف)

📖 مثال: یک سکه رامی اندازیم اگر رو بیاید یک تاس رامی اندازیم واگر پشت بیاید سکه رادوباره می اندازیم. این پیشامد چندعضو دارد؟

۱۸(۴)

۱۶(۳)

۱۰(۲)

۸(۱)

📖 مثال: تاسی رادوبار پرتاب میکنیم. پیش آمداینکه مجموع اعداد ظاهرشده بر ۵ بخش پذیر باشد چندعضو دارد؟

۷(۴)

۶(۳)

۵(۲)

۴(۱)

نکته‌ی مجموع دو تاس فراموش نشود.

📖 مثال: در آزمایش پرتاب دوتاس با هم دو پیشامد زیر را در نظر گرفته ایم.

A : مجموع دو عدد ظاهر شده فرد است.

B : مجموع دو عدد ظاهر شده اول است.

در این صورت پیشامد " A اتفاق بیفتد و B اتفاق نیفتد" چند عضو دارد؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۴

احتمال و اصول آن



احتمال یک عدد حقیقی است که به یک پیشامد نسبت داده میشود و بیان گر میزان اطمینان از وقوع آن پیشامد است. برای هر پیشامد مانند A احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده میشود که عددی حقیقی متعلق به بازه $[0, 1]$ است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

در واقع احتمال تعداد حالت های مطلوب به تعداد کل حالت هاست.

❖ اصول احتمال (اصول کولموگروف)

۱- احتمال رخ دادن پیشامد حتمی برابر ۱ است. یعنی: $P(S) = 1$

۲- برای دو پیشامد ناسازگار A, B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

📖 مثال: احتمال مسافرت شخصی با هواپیما برابر $\frac{1}{5}$ و با قطار برابر $\frac{2}{3}$ است. احتمال این شخص با هواپیما یا قطار

www.my-dars.ir

مسافرت کند چقدر است؟

$\frac{11}{15}$ (۴)

$\frac{13}{15}$ (۳)

$\frac{3}{15}$ (۲)

$\frac{1}{15}$ (۱)

مثال: یک عدد از مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ به تصادف انتخاب میکنیم احتمال آنکه عدد انتخاب شده کمتر از ۷ یا زوج

باشد را بیابید؟

مثال: ۵ مهره سفید و ۵ مهره سیاه را در ظرفی ریخته ایم. به تصادف ۲ مهره را از ظرف خارج می کنیم. با کدام

احتمال هر دو مهره هم رنگ هستند؟

$$(1) \frac{2}{5}$$

$$(3) \frac{5}{9}$$

$$(2) \frac{4}{9}$$

$$(4) \frac{3}{5}$$

نکته هم رنگ :



مثال: از ۱۲ کتاب که ۵ عدد آنها در مورد ادبیات و ۷ عدد آنها در مورد تاریخ است، به طور تصادفی ۵ کتاب انتخاب

کرده ایم. احتمال اینکه ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده باشد، کدام است؟

$$(1) \frac{15}{66}$$

$$(3) \frac{35}{132}$$

$$(2) \frac{17}{66}$$

$$(4) \frac{37}{132}$$

www.my-dars.ir

مثال: دو تاس را با هم می ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

مثال: دو تاس را با هم پرتاب میکنیم. با کدام احتمال مجموع اعداد رو شده مضرب ۴ است؟

مثال: از میان ۹ نفر دانش آموز که ۵ نفر سال سوم و ۴ نفر سال دوم می باشند ۵ نفر انتخاب می کنیم، احتمال اینکه ۳ نفر سال سوم و دو نفر سال دوم باشند.

مثال: در پرتاب دو مکعب باهم مشروط بر اینکه مجموع دو عدد رو شده برابر ۶ باشد، احتمال اینکه هر دو عدد رو شده زوج باشند.

مثال: در پرتاب سه سکه سالم با هم، احتمال آنکه زوج بار رو بیاید چند برابر احتمال رخ دادن پیشامد هر سه سکه مشابه بیاید است؟

www.my-dars.ir

📖 مثال: در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیا و بدون جایگذاری از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره ی خارج شده سفید است؟

📖 مثال: در کیسه ای ۵ مهره با شماره های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره ها را به طور تصادفی و پی در پی و بدون جایگذاری خارج میکنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره های فرد متوالیا خارج نمیشود؟

$$0/25(4)$$

$$0/2(3)$$

$$0/15(2)$$

$$0/1(1)$$

📖 مثال: دوتاس راباهم می اندازیم. احتمال آنکه مجموع دو عدد بزرگتر از ۴ باشد.

مای درس
گروه آموزشی عصر

نکته ی متمم: www.my-dars.ir



📖 مثال: یک تاس همگن را سه بار می ریزیم. احتمال اینکه اولین بار در مرتبه سوم عدد ۶ ظاهر شود را $P(A)$ و

احتمال آنکه تا پرتاب سوم، ۲ بار عدد ۶ ظاهر شود را $P(B)$ می نامیم. حاصل $P(A)+P(B)$ کدام است؟

$$\frac{15}{54} \quad (۴)$$

$$\frac{11}{54} \quad (۳)$$

$$\frac{5}{27} \quad (۲)$$

$$\frac{7}{27} \quad (۱)$$

📖 مثال: یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب میکنیم، مطلوبست احتمال اینکه

الف) سکه پشت و تاس عدد بزرگتر از ۳ ظاهر شود.

ب) سکه پشت یا عدد رو شده بزرگتر از ۳ باشد.

📖 تذکر: فرق اصل جمع (یا) و اصل ضرب (و) را دقت کنید



📖 مثال: از بین ۹ کارت به شماره های ۱ تا ۹ به تصادف دو کارت برمیداریم. احتمال اینکه مجموع شماره های روی

کارت برابر ۱۱ باشد چقدر است؟

📖 مثال: ظرفی شامل ۶ مهره یکسان به شماره های ۱ تا ۶ است. دو مهره به تصادف از ظرف خارج می کنیم. احتمال

اینکه مجموع شماره های روی این دو مهره زوج باشد، چقدر است؟

www.may-dars.ir

📖 مثال: از بین دانش آموزان یک دبیرستان، ۳ نفر از کلاس دهم، ۴ نفر از کلاس یازدهم و ۳ نفر از کلاس دوازدهم داوطلب شرکت در یک مسابقه اند. اگر ۳ نفر از بین آنها به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال از هر کلاس یک نفر انتخاب می شوند؟

📖 مثال: از کیسه ای محتوی ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. دومهره باهم وبدون جایگذاری بیرون می آوریم. احتمال اینکه این دومهره هم رنگ نباشند، چقدر است؟

📖 مثال: می خواهیم از بین ۵ فوتبالیست و ۵ دهنده یک تیم ۴ نفره درست کنیم. احتمال اینکه در این تیم لاقل یک فوتبالیست حتما "حضور داشته باشد، چقدر است؟

📖 مثال: در سؤال قبل احتمال اینکه یک فوتبالیست خاص در این تیم حضور داشته باشد چقدر است؟

نکته اشیا خاص در انتخاب ها



📖 مثال: در کیسه ای ۳ مهره آبی و ۴ مهره زرد است. مهره ها را یکی پس از دیگری از کیسه بیرون می آوریم احتمال آنکه مهره ها یکی در میان آبی وزرد باشد.

www.my-dars.ir

📖 مثال: از یک جعبه محتوی ۹۵ لامپ سالم و ۵ لامپ معیوب، سه لامپ را به طور تصادفی بیرون می آوریم. مطلوبست احتمال آنکه هر سه لامپ معیوب باشد.

ثانیا "حداکثر ۲ لامپ معیوب باشد.

ثالثا: حداقل ۲ لامپ معیوب باشد.

📖 مثال: در داخل کیسه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره سفید وجود دارد. ۳ مهره از کیسه خارج میکنیم. مطلوبست احتمال آنکه الف) هر سه مهره هم رنگ باشند.

ب) دو مهره هم رنگ باشند.

مای درس
گروه آموزشی عصر

📖 مثال: جعبه ای شامل ۱۰ لامپ یکسان است که ۴ تای آنها معیوب است. به تصادف سه لامپ از جعبه خارج میکنیم. احتمال رخ دادن اینکه هر سه لامپ سالم باشند را بیابید.

www.my-dars.ir

📖 مثال: در یک کلاس ۳۲ دانش آموز در ۴ ردیف روی نیمکت نشسته اند. دو نفر به تصادف از دانش آموزان این کلاس انتخاب میشوند. احتمال رخ دادن هر یک از پیشامدهای زیر را بیابید.

الف) هر دو نفر از ردیف اول باشند.

ب) هر دو نفر یک ردیف باشند.

پ) یکی از ردیف اول و یکی از ردیف دوم باشد.

📖 مثال: روی هر یک از چند کارت یکسان، ترکیب های چهارحرفی از مجموعه $\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ را نوشته و به تصادف یک کارت از بین آنها برمیداریم. احتمال اینکه حروف i, a با هم روی این کارت باشند چقدر است؟

📖 مثال: از ظرفی شامل ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه، به تصادف مهره ای برمیداریم و پس از مشاهده رنگ آن به کیسه برمیگردانیم. سپس مهره دیگری انتخاب میکنیم. با کدام احتمال این دو مهره هم رنگ نمی باشند؟

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

نکته اشیا یی که میخواهیم کنار هم باشند:



مثال: پنج نفر به نام های e, d, c, b, a به طور تصادفی در یک ردیف قرار می گیرند.

الف) احتمال اینکه b, a کنار هم باشند چقدر است؟

قضیه های احتمال



1 اگر A پیشامدی دلخواه از فضای نمونه S باشد، آنگاه: $P(A') = 1 - P(A)$

2 قضیه دوم: برای هر دو پیشامد B, A از فضای نمونه داریم: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

3 برای دو پیشامد B, A از فضای نمونه داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

www.my-dars.ir

مثال: کیسه ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سبز است. اگر ۳ مهره به تصادف از این کیسه انتخاب کنیم، با کدام احتمال هر سه مهره هم رنگ نیستند؟

مثال: در پرتاب دو تاس سالم با هم، با کدام احتمال مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۱۰ می باشد؟

$$(۱) \frac{۱}{۶} \quad (۲) \frac{۱}{۳} \quad (۳) \frac{۵}{۶} \quad (۴) \frac{۲}{۳}$$

مثال: احتمال قبولی در درس آمار و احتمال برابر با $\frac{۰}{۸}$ و احتمال قبولی در درس هندسه برابر $\frac{۰}{۷}$ است. اگر احتمال قبولی در هر دو درس برابر $\frac{۰}{۶۵}$ باشد،

الف) احتمال قبولی در حداقل یکی از دو درس چقدر است؟

ب) احتمال قبولی فقط در درس آمار و احتمال چقدر است؟

پ) احتمال قبولی فقط در یکی از دو درس چقدر است؟

📖 مثال: درون جعبه ای ۹ گوی یکسان به شماره های ۱ تا ۹ قرار دارند. به طور تصادفی دو گوی از جعبه بیرون می‌آوریم.

احتمال آنکه شماره های روی هر دو گوی زوج باشند کدام است؟

$$\frac{1}{6} (۴)$$

$$\frac{3}{8} (۳)$$

$$\frac{1}{4} (۲)$$

$$\frac{1}{3} (۱)$$

📖 مثال: در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال

مهره های خارج شده هم رنگ هستند؟

📖 مثال: دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که مجموع دو عدد ظاهر شده زوج بوده و حداقل در یک

تاس عدد ۶ آمده باشد کدام است؟

مای دارس

📖 مثال: دو تاس را با هم می‌ریزیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اول است؟

www.my-dars.ir

📖 مثال: اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون می آوریم. با کدام احتمال مجموع این دو کارت برابر ۱۱ است؟

📖 مثال: از اعداد ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور متوالی و تصادفی تمام گوی ها را از جعبه خارج می کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می شوند؟ (سراسری ۹۴)

📖 مثال: در جعبه ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید خارج شده است؟

📖 مثال: اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A-B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ ، آنگاه $P(A')$ کدام

است؟

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال: برای دو پیشامد A, B از فضای نمونه ای S ، حاصل $P(A-B) - P(A \cup B)$ کدام است؟

(۱) $P(B)$ (۲) $P(B')$ (۳) $-P(B)$ (۴) $-P(B')$

مثال: اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $P(A \cap B') = 0.2$ و $P(B) = 0.4$ باشند،

$P(A' \cap B')$ کدام است؟ (۱) 0.4 (۲) 0.5 (۳) 0.16 (۴) 0.7

تذکر: گاهی اوقات در سوال لازم است به متمم چیزی که خواسته شده فکر کنید. این نکته در بسیاری از



سوالات و تست ها کاربرد دارد.

مثال: اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A \cap B') = \frac{5}{7}$ ، $P(B \cap A') = \frac{1}{7}$ ، $P(A) = 3P(B)$ باشد،

حاصل $P(A \cup B)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{6}{7}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{13}{14}$

مثال: اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $P(A) = 0.6$ و $P(B) = 0.7$ و

$P(A \cap B') = 0.2$ باشند، آنگاه $P(A' \cap B)$ کدام است؟

(۱) 0.1 (۲) 0.3 (۳) 0.4 (۴) 0.5

www.my-dars.ir

مثال: در یک مدرسه با ۶۰ دانش آموز، ۳۵ نفر مجله A، ۳۰ نفر مجله B و ۱۵ نفر هر دو مجله را میخوانند. یک

دانش آموز به تصادف از این مدرسه انتخاب میکنیم. احتمال آنکه او هیچ مجله ای را نخواند کدام است؟

$$\frac{1}{10} (۴)$$

$$\frac{1}{2} (۳)$$

$$\frac{1}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{6} (۱)$$

نکته مضرب ها:



مثال: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر

باشد چقدر است؟

مثال: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۴ یا ۶ بخش پذیر

باشد چقدر است؟

📖 مثال: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 500\}$ عددی به طور تصادفی انتخاب میکنیم. با کدام احتمال عددانتخابی مضرب ۴ یا مضرب ۷ است؟

📖 مثال: از مجموعه $\{100, 101, 102, \dots, 200\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد چقدر است؟

📖 مثال: عددی به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ انتخاب میکنیم. احتمال رخ دادن هر یک از پیشامدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد ولی بر ۳ بخش پذیر نباشد.

ب) عدد انتخابی نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش پذیر باشد.

ت) عددانتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد.

www.my-dars.ir

احتمال غیرهم شانس



هرگاه حداقل دو برآمد از فضای نمونه ای S دارای احتمال نابرابر باشند، آنگاه S را فضای نمونه ای غیرهم شانس می نامیم. برای محاسبه احتمال در فضاهای نمونه ای غیر هم شانس دو موضوع زیر را در نظر می گیریم:

الف) تمام احتمال های نسبت داده شده به هر یک از عضوهای S اعداد حقیقی نامنفی اند

ب) مجموع تمام احتمال های نسبت داده شده برابر یک است.

❖ در حل این نوع سوالات احتمال یکی از برآمدها را X می گیریم و سپس بقیه را بر حسب X به می آوریم. سپس جمع تمام احتمال ها را برابر ۱ می گیریم.

📖 مثال: در صورتی که $S = \{a, b, c\}$ مطلوبست محاسبه $P(a)$ اگر $P(b) = \frac{1}{5}, P(c) = \frac{1}{4}$

📖 مثال: در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن "رو" نصف احتمال آمدن "پشت" است. در پرتاب این سکه؛ احتمال ظاهر شدن "رو" و احتمال ظاهر شدن "پشت" را به دست آورید.

📖 مثال: سه دونه باهم مسابقه میدهند احتمال برد نفر اول نصف احتمال بردن فردوم و احتمال بردن فردوم یک سوم احتمال بردن فردوم است. احتمال آنکه دونه اول برنده نشود، چقدر است؟

www.my-dars.ir

مثال: سه دونه a, b, c باهم مسابقه میدهند، فرض کنیم احتمال برد a چهار برابر احتمال برد b و احتمال برد b دو برابر احتمال برد c باشد.

الف) احتمال بردهر کدام چقدر است؟

ب) احتمال برد b یا c چقدر است؟

مثال: پنج نفر دونه a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 در یک مسابقه شرکت میکنند. می دانیم: احتمال برد a_2 دو برابر a_1 و a_3 سه برابر a_2 و a_4 چهار برابر a_3 و a_5 پنج برابر a_4 است، مطلوبست: الف) احتمال آنکه دونه a_1 یا a_4 برنده شود. ب) هیچ یک از دونه های a_3, a_4, a_5 برنده نشوند.

مثال: تاسی به گونه ای ساخته شده که وقوع هر عدد اول ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول باشد. اگر A پیشامد وقوع عددی کوچکتر از ۴ باشد، $P(A)$ را بیابید.

مثال: در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه ای $S = \{a, b, c, d, e\}$ است. اگر $P(\{a, b\}) = \frac{2}{7}$ ، $P(\{a, b, c, d\}) = \frac{3}{5}$

و پیشامد A به صورت $A = \{a, b, e\}$ تعریف شود، آنگاه $P(A')$ چقدر است؟

www.my-dars.ir

📖 مثال: در یک آزمایش تصادفی متشکل از سه برآمد، فضای نمونه ای به صورت $S = \{a, b, c\}$ است. اگر

$P(c), P(b), P(a)$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هرکدام از برآمدها را بیابید.

📖 مثال: فضای نمونه ای یک پدیده تصادفی متناظر با سه برآمد به صورت $S = \{x, y, z\}$ است. اگر احتمال های متناظر با

این سه برآمد یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، $P(\{x, z\})$ کدام است؟

📖 مثال: اگر p یک تخصیص قابل قبول برای فضای نمونه ای $S = \{a_1, a_2, a_3\}$ باشد و $P(\{a_1, a_2\}) = 3P(a_3)$ مقدار

$P(a_2)$ چقدر است؟

📖 مثال: احمد و علی و رضا به یک هدف تیراندازی می کنند. احتمال به هدف زدن علی ۲ برابر احتمال به هدف زدن

رضا $\frac{1}{3}$ علی است. احتمال آنکه احمد به هدف بزند چقدر است؟

www.my-dars.ir

📖 مثال: یک تاس طوری ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد متناسب با همان عدد است احتمال عدد ۳ کدام است؟

در سؤال قبل احتمال آنکه عدد زوج باشد چقدر است؟

📖 مثال: فرض می کنیم $S = \{a, b, c\}$ مطلوبست $P(a), P(b)$ در صورتی که داشته باشیم:

$$P(a) = 2P(b), P(c) = \frac{1}{5}$$

📖 مثال: دو مرد و سه زن در یک مسابقه شطرنج شرکت می کنند. افراد هم جنس در برد مسابقه هم احتمال هستند، ولی

احتمال برنده شدن هر مرد دو برابر هر زن است. احتمال برنده شدن یک زن را پیدا کنید.

مای دارس

📖 مثال: فرض می کنیم $S = \{a, b, c\}$ فضای نمونه ای یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم:

$$P(a) = \frac{1}{3}P(b), P(b) = \frac{1}{3}P(c) \quad \text{مقدار } P(b') \text{ را محاسبه کنید. (دی ۸۳)}$$

www.my-dars.ir

📖 مثال: تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال آمدن هر عدد غیر اول دو برابر احتمال آمدن هر عدد اول است

اگر در پرتاب این تاس پیشامد $A = \{2, 4, 5\}$ باشد، $P(A)$ را محاسبه کنید. (شهریور ۸۳)

📖 مثال: تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال آمدن عددهای فرد، پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج

است. احتمال آمدن هر کدام از اعداد را حساب کنید. (خرداد ۸۴)

📖 مثال: فرض می کنیم $s = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه ای یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم:

$$P(d) = \frac{3}{8}, P(a) = P(b) = 7P(c)$$

مقدار $p(b)$ را محاسبه کنید. (شهریور ۸۴)

📖 مثال: سه دانش آموز A, B, C باهم مسابقه دو میدانی می دهند. احتمال برنده شدن C, A یکسان ولی احتمال برنده

شدن هر کدام سه برابر احتمال برنده شدن B است. احتمال اینکه C یا B برنده شوند چقدر است؟ (خرداد ۸۵)

مثال: اگر $S = \{1, 2, 3, 4\}$ فضای نمونه و $P(1) = \frac{P(2)}{2} = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4}$ آنگاه $P(\{1, 4\})$ کدام است؟

$$0.9(4)$$

$$0.7(3)$$

$$0.5(2)$$

$$0.3(1)$$

احتمال شرطی



در برخی مسائل اعلام میشود که پیشامدی مثل B رخ داده است و از ما میخواهند احتمال رخ دادن پیشامد دیگری مانند A را با توجه به این که پیشامد B رخ داده است، محاسبه نماییم. به عبارت دیگر، احتمال رخ دادن پیشامد A به تنهایی مورد نظر نیست. در این صورت می‌گوییم احتمال رخ دادن A به شرط رخ داد B و مینویسیم: $P(A|B)$ که به آن احتمال شرطی می‌گوییم.

❖ قانون احتمال شرطی به لحاظ مفهومی عبارت است از:

$$P(\text{رخ دادن اولی} | \text{دومی رخ بدهد}) = P(\text{اولی رخ بدهد}) \cdot P(\text{وقوع توام دو پیشامد})$$

❖ توجه کنید نماد " $|$ " در " $P(A|B)$ " به صورت "به شرط" خوانده می‌شود.

❖ در احتمال شرطی $P(A|B)$ چون اعلام شده است پیشامد B رخ داده است پس: $B \neq \emptyset$

❖ در برخی مسائل با کاهش فضای نمونه میتوان به سادگی مسائل را حل کرد.

www.my-dars.ir

❖ فرمول احتمال شرطی:

مثال: تاسی را پرتاب کرده ایم. زوج آمده است. احتمال آمدن عدد بزرگتر از ۳ کدام است؟

$$\frac{1}{4} (۴)$$

$$\frac{1}{3} (۳)$$

$$\frac{2}{3} (۲)$$

$$\frac{1}{2} (۱)$$

مثال: میوه های باغی بر حسب نوع و کیفیت مطابق جدول زیر می باشند. میوه ای به تصادف از این باغ انتخاب می

| نوع \ کیفیت | A | B |
|-------------|-----|-----|
| خوب | 0/2 | 0/3 |
| متوسط | 0/3 | 0/2 |

شود. اگر از نوع B باشد، چقدر احتمال دارد دارای کیفیت متوسط باشد؟

مثال: سازنده قطعات یدکی یک کارخانه از روی تجربه میداند که احتمال این که سفارشی به موقع برای ارسال آماده

شود ۰/۹ است و احتمال اینکه سفارشی به موقع برای ارسال آماده و به موقع به مشتری تحویل داده شود برابر ۰/۶ است.

احتمال اینکه سفارشی به موقع تحویل مشتری شود به شرط آنکه به موقع ارسال شده باشد، چقدر است؟

مثال: یک تولید کننده از روی تجربه میداند احتمال آنکه کسی آگهی تبلیغتش را بخواند برابر ۰/۷ و احتمال اینکه

کسی محصول این تولید کننده را بخرد به شرط آنکه تبلیغتش را خوانده باشد، برابر ۰/۴۵ است. احتمال اینکه کسی آگهی

تبلیغات این تولید کننده را خوانده باشد و محصولاتش را بخرد چقدر است؟

📖 مثال: ظرفی شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. دو مهره به طور تصادفی پی در پی و بدون جایگذاری از ظرف خارج می‌کنیم. اگر مهره اول سفید باشد، با کدام احتمال دومی نیز سیاه است؟

📖 مثال: در پرتاب دو تاس سبز و قرمز اگر بدانیم مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۱۰ است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

📖 مثال: در یک خانواده سه فرزندی، اگر دست کم یک فرزند آنها دختر باشد، با کدام احتمال هر سه فرزند آنها دختر است؟

📖 مثال: دو تاس سالم را انداخته ایم. اگر اعداد رو شده از دو تاس مساوی نباشند، احتمال این که مجموع دو عدد ظاهر شده برابر ۸ باشد، کدام است؟

مای دارس
گروه آموزشی عصر

📖 مثال: در پرتاب یک تاس اگر برآمد حاصل؛ مضرب ۳ نباشد احتمال آنکه زوج بیاید کدام است؟

www.my-dars.ir

📖 مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. میدانیم مجموع اعداد ظاهر شده ۶ است، احتمال آن که هر دو تاس زوج آمده باشد کدام است؟

📖 مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. هیچ یک از اعداد رو شده مضرب ۳ نیست. احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده ۹ باشد، چقدر است؟

📖 مثال: دو تاس همگن را پرتاب می کنیم. اگر مجموع اعداد ظاهر شده بزرگ تر از ۴ باشد، چقدر احتمال دارد تاس ها یکسان آمده باشد؟

مای درس
گروه آموزشی عصر

📖 مثال: دو تاس را پرتاب می کنیم. اگر اعداد رو شده یکسان نباشند، احتمال اینکه هر دو زوج باشند، کدام است؟

www.my-dars.ir

📖 مثال: دو تاس همگن را انداخته ایم. اگر حاصل جمع شماره های رو شده کم تر از ۶ باشد، احتمال آنکه شماره یکی از تاس های رو شده ۲ باشد، کدام است؟

📖 مثال: در خانواده ای با ۴ فرزند، اگر فرزند اول پسر باشد، احتمال اینکه این خانواده حداقل ۳ پسر داشته باشد، کدام است؟

📖 مثال: در خانواده ای با ۳ فرزند، یکی از فرزندان پسر است. احتمال آنکه هر سه فرزند خانواده پسر باشد، کدام است؟

📖 مثال: پدر علی ۳ بچه دارد. احتمال آنکه تعداد دختران او بیشتر از پسرانش باشد، کدام است؟

مای درس
گروه آموزشی عصر

📖 مثال: اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی باشد و $P(a) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a, b, c\}) = \frac{1}{4}$ ، آنگاه:

الف) $P(\{a\} | \{a, b, c\})$ را محاسبه کنید. ب) $P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\})$ را بیابید.

مثال: اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A) = 0.2, P(B) = 0.22, P(B|A) = 0.7$ و آن گاه $P(A|B')$ و $P(B'|A')$ را بیابید.

نکته:



$$P(A'|B) = 1 - P(A|B)$$

اثبات:

مای دررس
گروه آموزشی عصر

مثال: احمد و علی هر کدام با احتمال های به ترتیب 0.4 و 0.3 برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه می روند. اگر

احمد به ورزشگاه رفته باشد، علی با احتمال 0.7 به ورزشگاه می رود. فرض کنید احمد به ورزشگاه نرفته باشد، با چه

احتمالی علی نیز به ورزشگاه نرفته است؟

📖 مثال: کیسه ای شامل ۲ گوی سبز، ۴ گوی قرمز و ۵ گوی آبی است. از این کیسه به طور تصادفی سه گوی به ترتیب و بدون جایگذاری بیرون می آوریم. الف) احتمال اینکه گوی اول سبز، گوی دوم قرمز و گوی سوم آبی باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط گوی اول و سوم آبی باشد چقدر است؟

📖 مثال: جعبه ای شامل ۱۲ لامپ است که ۳ تای آنها معیوب است. اگر به تصادف ۳ لامپ از جعبه، پی در پی و بدون جایگذاری بیرون آوریم، با کدام احتمال: الف) هر سه لامپ معیوب اند؟

ب) حداقل یک لامپ معیوب است؟

📖 مثال: جعبه ای شامل ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب است. اگر سه لامپ به طور پی در پی و بدون جایگذاری از این جعبه به تصادف خارج کنیم، با کدام احتمال به طور یک در میان سالم و معیوب اند؟

$$\frac{7}{10} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{15} \text{ (۳)}$$

$$\frac{4}{10} \text{ (۲)}$$

$$\frac{8}{15} \text{ (۱)}$$

www.my-dars.ir

📖 مثال: یک بازیکن فوتبال در هنگام زدن ضربات پنالتی اگر روحیه خوبی داشته باشد، به احتمال ۹۰ درصد و اگر روحیه خوبی نداشته باشد، به احتمال ۶۰ درصد گل میزند. اگر این بازیکن یک ضربه پنالتی را وارد دروازه کند، روحیه خوبی دارد و در غیراین صورت روحیه خوبی ندارد. اگر این بازیکن قبل از اولین ضربه، روحیه خوبی داشته باشد، با کدام احتمال از سه ضربه متوالی او:

الف) دقیقا دو ضربه آخر گل میشود؟

ب) فقط ضربه آخر گل میشود؟

پ) فقط ضربه اول گل میشود؟

📖 مثال: علی و رضا عضو تیم ده نفری فوتبال مدرسه اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر علی از رضا بلندتر باشد، با کدام احتمال از نظر بلندی قد، نفر چهارم تیم است؟

مثال: اگر فضای نمونه یک آزمایش تصادفی باشد و $P(a) = \frac{1}{4}$, $P(\{d, e\}) = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل

$P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\})$ کدام است؟

مثال: یک سکه سالم را ۵ بار پرتاب کرده ایم. اگر دقیقاً ۳ بار رو آمده باشد، احتمال اینکه در هیچ دو پرتابی متوالی رو نیامده باشد، چقدر است؟

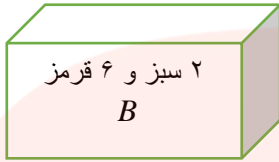
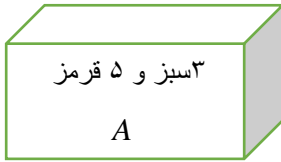
مثال: در تجربه پرتاب دو تاس اگر بدانیم حاصل ضرب دو تاس زوج است، با کدام احتمال هر دو تاس زوج می آیند؟
(سراسری ۸۸)

قانون احتمال کل (مسائل چند مرحله ای)



در بسیاری از مسائل احتمال، با بیش از چند تصادف مواجه ایم که پشت سرهم اتفاق می افتند مخصوصاً آزمایش هایی که نتیجه اولی روی دومی تاثیرگذار است. در چنین مواردی که نتایج آزمایش اول روی آزمایش دوم تاثیرگذار است و نتیجه آزمایش دوم منوط به آزمایش اول است، بهتر است از نمودار درختی استفاده کنیم. در این نوع مسائل بعد از پرکردن احتمال ها در درخت، اعداد سرشاخه های متوالی را در هم ضرب و اعداد شاخه های موازی را با هم جمع می کنیم.

مثال: دو ظرف همانند، مطابق شکل مفروض است. یکی از ظرف ها را به تصادف انتخاب و مهره ای از آن خارج



می کنیم. احتمال آنکه قرمز باشد، کدام است؟ (احتمال کل نوع اول)

مثال: دو ظرف همانند داریم. اولی شامل 2 مهره سفید و 3 مهره سیاه و دومی شامل 5 مهره سفید و 4 مهره سیاه است. یکی از دو ظرف را به تصادف انتخاب می کنیم و مهره ای از آن خارج می کنیم. احتمال سفیدبودن این مهره چقدر است؟

مثال: در اولین ظرف از سه ظرف همانند، 3 مهره سفید و 5 مهره سیاه، در دومین ظرف 4 مهره سفید و 2 مهره سیاه و در ظرف سوم فقط مهره سیاه وجود دارد. با چشم بسته از یکی از ظرف ها مهره ای به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال سیاه بودن این مهره چقدر است؟

گروه آموزشی عصر

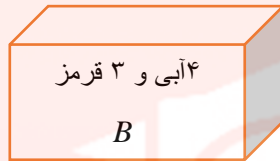
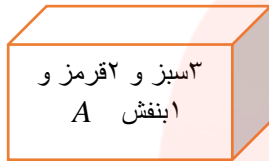
www.my-dars.ir

📖 مثال: دو ظرف مشابه داریم. اولی شامل ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و دومی شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. به طور تصادفی از یکی از ظرف ها دو مهره با هم بیرون می آوریم. احتمال اینکه هر دو مهره سفید باشند چقدر است؟

📖 مثال: در کارخانه ای سه دستگاه A, B, C به ترتیب ۲۰ و ۳۰ و ۵۰ درصد محصولات را تولید می کنند. و می دانیم محصولات این سه دستگاه به ترتیب ۱۰ و ۱۰ و ۲۰ درصد معیوب اند. احتمال اینکه محصولی که از این کارخانه انتخاب میشود سالم باشد چقدر است؟

📖 مثال: تکمیل بنای یک ساختمان ممکن است به دلیل اعتصاب کارگران به تاخیر افتد. فرض کنید احتمال اینکه اعتصابی رخ بدهد برابر $0/7$ است. اگر اعتصاب رخ بدهد با احتمال $0/4$ و اگر اعتصاب نباشد با احتمال $0/9$ عملیات ساختمانی به موقع تکمیل می شود. با کدام احتمال تکمیل بنای این ساختمان به موقع صورت می پذیرد؟

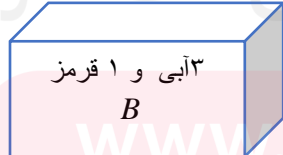
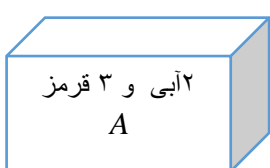
📖 مثال: دو ظرف همانند مطابق شکل داریم. یک مهره به تصادف از ظرف A برداشته و در ظرف B می گذاریم و سپس از ظرف B مهره ای خارج می کنیم. احتمال آن که مهره خارج شده از ظرف B قرمز باشد، کدام است؟ (احتمال



کل نوع دوم)

📖 مثال: دو ظرف داریم. اولی شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و دوم شامل ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برداشته و بدون مشاهده، آن را در ظرف دوم قرار می دهیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم برمی داریم. احتمال اینکه این مهره سفید باشد، چقدر است؟

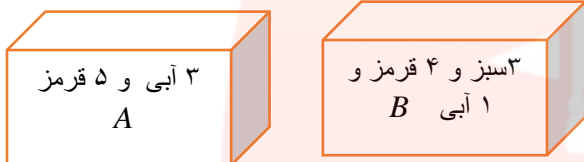
📖 مثال: در ظرف A ، ۲ مهره آبی و ۳ مهره قرمز و در ظرف B ، ۳ مهره آبی و ۱ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف A سه مهره به تصادف خارج کرده و در ظرف B قرار می دهیم. حال یک مهره به تصادف از ظرف B خارج می کنیم. احتمال



این که این مهره قرمز باشد کدام است؟ (احتمال کل نوع سوم)

مثال: دو ظرف همانند B, A مطابق شکل مفروضند. ۴ مهره از A و ۳ مهره از B برداشته و در یک ظرف خالی مانند C می ریزیم. سپس از ظرف C یک مهره به تصادف خارج می کنیم. احتمال قرمز بودن آن کدام است؟ (احتمال کل نوع

چهارم)



مثال: در دو جعبه به ترتیب ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول ۳ لامپ و از جعبه دوم ۵ لامپ به تصادف برمی داریم و در یک جعبه جدید قرار می دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب باشد چقدر است؟

مای درس

مثال: در یک کارخانه ۶۰ درصد محصولات را ماشین A ، ۳۰ درصد را ماشین B و باقی محصولات را ماشین C تولید می کند. اگر ماشین های C, B, A به ترتیب ۳ درصد، ۴ درصد و ۲ درصد محصول معیوب تولید کنند، احتمال آنکه محصولی که به تصادف از این کارخانه انتخاب میشود معیوب باشد، کدام است؟ (احتمال کل درصدی)

www.my-dars.ir

۹٪(۴

۳/۲٪(۳

۳٪(۲

۳/۶٪(۱

📖 مثال: جمعیت یک روستا ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد هستند. می دانیم ۷۰ درصد زنان و ۶۰ درصد مردان در این روستا دفترچه سلامت دارند. اگر فردی به تصادف از ساکنان روستا انتخاب شود، با کدام احتمال دفترچه سلامت دارد؟

📖 مثال: در شهری ۹۰ درصد افراد واکسن زده اند. احتمال ابتلا به بیماری برای افرادی که واکسن زده اند 0.002 و برای افرادی که واکسن نزده اند 0.1 است. اگر شخصی به تصادف از این شهر انتخاب شود، با کدام احتمال به بیماری مبتلا می شود؟

مای درس

📖 مثال: $\frac{3}{5}$ مردان و $\frac{7}{1}$ زنان یک روستا در انتخابات شورا شرکت کرده اند. اگر جمعیت مردان روستا دو برابر جمعیت

زنان روستا باشد، چقدر احتمال دارد شخصی که به تصادف از اهالی روستا انتخاب می شود در انتخابات شرکت کرده

www.my-dars.ir

باشد؟ (احتمال کل نسبتی)

مثال: سکه ای را پرتاب می کنیم. اگر رو آمد یک تاس و درغیراینصورت دو سکه پرتاب می کنیم. احتمال آنکه دقیقا

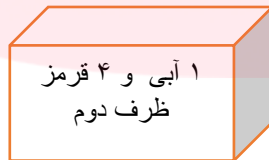
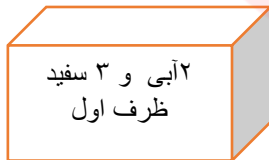
یک رو ظاهر شده باشد کدام است؟ (احتمال کل اگر... درغیراینصورت ...)

$$\frac{3}{4} (1) \quad \frac{3}{8} (2) \quad \frac{7}{8} (3) \quad \frac{5}{8} (4)$$

مثال: دو ظرف با محتویات زیر مفروضند. یک تاس همگن را میریزیم. اگر ۱ بیاید ظرف اول و در غیر این صورت ظرف

دوم را انتخاب میکنیم. سپس از ظرف انتخابی مهره ای به تصادف خارج می کنیم. احتمال سفید بودن این مهره چقدر

است؟



مای درس
گروه آموزشی عصر

یک توضیح خیلی خیلی مهم



www.my-dars.ir

اگر مهره یا مهره هایی را بدون دیدن رنگ آنها از یک جعبه کنار بگذاریم، این اتفاق هیچ تاثیری روی احتمال مهره هایی که

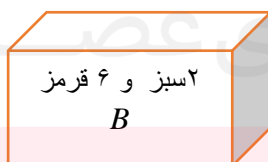
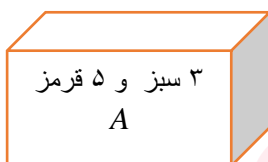
بعد از آن از جعبه خارج می کنیم نخواهد داشت و می توانیم این طور فرض کنیم که هیچ اتفاقی برای جعبه نیفتاده است و

همه مهره ها درون جعبه هستند } چون فضای نمونه همه حالت های ممکن است و تا زمانی که یک برآمد لو نرفته باشد همچنان جزو فضای نمونه است و هنگامی که افشا شود آن را از فضای نمونه کنار میگذاریم {

مثال: در ظرفی ۵ مهره قرمز و ۸ مهره سبز وجود دارد. یک مهره به تصادف از این ظرف خارج کرده و بدون دیدن رنگ آن، آن را کنار میگذاریم. سپس مهره ای دیگر خارج می کنیم. احتمال آن که این مهره قرمز باشد، کدام است؟

مثال: کیسه ای شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است. به تصادف سه مهره بیرون می آوریم و بدون مشاهده رنگ آن ها مهره چهارمی خارج می کنیم. احتمال آن که مهره آخر سفید باشد کدام است؟

مثال: دو ظرف همانند، مطابق شکل مفروضند. یکی از ظرف ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره ای از آن خارج می کنیم. اگر مهره خارج شده قرمز باشد، چقدر احتمال دارد از ظرف A خارج شده باشد؟



$$\frac{5}{11} \quad (1) \quad \frac{3}{10} \quad (2) \quad \text{(فرم شرطی احتمال کل)}$$

$$\frac{3}{8} \quad (3) \quad \frac{5}{16} \quad (4)$$

www.my-dars.ir

قانون بیز



در برخی مسائل همانند آنچه که در قانون احتمال کل بیان شد، فضای نمونه ای به پیشامدهایی افراز شده است. اما نتیجه آزمایش در مرحله آخر اعلام می شود و احتمال رخ دادن یکی از افرازاها با توجه به این که نتیجه آزمایش معلوم است، مورد نظر می باشد. یعنی مطلوب مساله یک احتمال شرطی است، که برای یافتن آن، با توجه به شرط داده شده (همان نتیجه آزمایش که اعلام شده است) روی نمودار درختی، حالت های ممکن را مشخص می کنیم و سپس به محاسبه احتمال مطلوب می پردازیم. این موضوع را **قانون بیز** می نامیم. \blacklozenge یادتان باشد همواره مخرج احتمال کل است.

مثال: دو ظرف همانند داریم. اولی شامل ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از دو ظرف را انتخاب می کنیم و مهره ای از آن خارج می کنیم. اگر این مهره سفید باشد، با کدام احتمال از ظرف اول خارج شده است؟

📖 مثال: سه جعبه مشابه هر کدام شامل ۱۰ مهره یکسان است. مهره های جعبه اول آبی و مهره های جعبه دوم قرمز و مهره های جعبه سوم ۲ عدد آبی و ۸ عدد قرمز اند. به تصادف یک جعبه انتخاب می کنیم و مهره ای از آن خارج می کنیم. اگر این مهره آبی باشد، چقدر احتمال دارد که از جعبه اول انتخاب شده باشد؟

📖 مثال: در یک کارخانه وقتی خط تولید سالم است، ۲ درصد محصولات و وقتی خط تولید دچار نقص است، ۱۰ درصد محصولات معیوب اند. به طور تجربی مشخص شده است که احتمال آن که خط تولید در این کارخانه دچار نقص فنی شود، ۵ درصد است. اگر محصولی به تصادف از این کارخانه انتخاب کنیم و مشاهده شود که معیوب است، با کدام خط تولید دچار نقص میشود؟

📖 مثال: دانش آموزی در ۲۵ درصد موارد پیاده و در ۷۵ درصد مواقع سواره به مدرسه می رود. اگر پیاده برود در ۵۰ درصد مواقع به موقع به مدرسه میرسد و اگر سواره برود در ۲۵ درصد مواقع دیر می رسد. اگر روزی دیر رسیده باشد، با کدام احتمال پیاده رفته است؟

مای درس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال: در یک دبیرستان ۷۰ درصد دانش آموزان کلاس A و ۸۰ درصد دانش آموزان کلاس B در انتخابات دانش آموزی شرکت کرده اند. اگر تعداد افراد کلاس A سه برابر تعداد افراد کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین رای دهندگان این دو کلاس انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد از دانش آموزان کلاس A است؟

مثال: در جامعه ای ۱۰ درصد افراد تحصیلات دانشگاهی دارند که ۲ درصد آنها بیکارند. درصد بیکاری سایر افراد جامعه ۲۰ درصد است. یک نفر به تصادف از این جامعه انتخاب میکنیم. اگر بیکار باشد، با کدام احتمال تحصیلات دانشگاهی دارد؟

مثال: احتمال ارسال صفر و یک در یک دکل مخابراتی به ترتیب $\frac{0.7}{10}$ و $\frac{0.3}{10}$ است. چون خطا وجود دارد. احتمال اینکه صفر ارسال شده همان صفر دریافت گردد، $\frac{0.9}{10}$ و احتمال آن که یک ارسال شده همان یک دریافت شود، $\frac{0.8}{10}$ است. اگر در گیرنده صفر دریافت شده باشد، با کدام احتمال صفر نیز ارسال شده است؟

۰/۴(۱) ۰/۲(۲) ۰/۵(۳) ۰/۶(۴)

پیشامدهای مستقل و وابسته:



❖ دو پیشامد را مستقل گوئیم هرگاه رخ دادن یکی تاثیری در رخ دادن دیگری نداشته باشد، به عبارت دیگر نتیجه این دو پیشامد ربطی به هم ندارند.

در واقع دو پیشامد A, B با احتمال های غیرصفر از فضای نمونه ای S مستقل اند اگر و تنها اگر:

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{و} \quad P(A|B) = P(A)$$

📖 مثال: در پرتاب دو تاس سالم قرمز و آبی با هم:

الف) اگر بدانیم تاس قرمز زوج آمده است، با کدام احتمال در تاس آبی عدد ۶ ظاهر شده است؟

ب) اگر بدانیم تاس آبی آمده است، با کدام احتمال در تاس قرمز عددی زوج ظاهر شده است؟

📖 مثال: در آزمایش پرتاب یک سکه سالم و یک تاس سالم با هم،

الف) اگر سکه "رو" شود، با کدام احتمال تاس عدد ۶ می آید؟

ب) اگر تاس عدد ۶ ظاهر شود، با کدام احتمال سکه "رو" می آید؟

📖 مثال: یک سکه سالم را صدبار انداخته ایم و هر صدبار رو آمده است. احتمال اینکه در پرتاب صد و یکم "رو" بیاید

چقدر است؟

📖 مثال: در پرتاب یک سکه سالم و یک تاس سالم با هم، با کدام احتمال سکه "رو" و تاس ۶ می آید؟

مثال: در پرتاب دو تاس سالم با هم، با کدام احتمال هیچ کدام از اعداد ظاهر شده مضرب ۳ نیستند؟

مثال: دو نفر با نام های A, B با احتمال های قبولی به ترتیب 0.7 و 0.8 در یک آزمون شرکت می کنند. با کدام احتمال:

الف) هر دو قبول می شوند؟
ب) دست کم یکی قبول می شود؟

پ) هیچ کدام قبول نمی شوند؟
ت) فقط A قبول می شود؟

مثال: اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A|B) = 0.2, P(A \cup B) = 0.4$ ، آنگاه $P(B)$ را بیابید.

مثال: احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی بیمار A برابر 0.6 و روی بیمار B برابر 0.8 است. اگر این عمل پیوند روی این دو نفر انجام شود، مطلوبست احتمال اینکه: الف) روی هر دو بیمار موفقیت آمیز باشد.

ب) روی حداقل یکی موفقیت آمیز باشد.

📖 مثال: اگر A, B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B) = 0/1, P(A \cap B') = 0/4$ ، حاصل $P(A \cup B')$ را بیابید.

📖 مثال: در جعبه A ، ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه B ، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. از هر یک از این دو جعبه یک مهره بیرون می آوریم. احتمال آن که مهره های خارج شده هم رنگ باشند چقدر است؟

📖 مثال: در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه وجود دارد. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره هم رنگ خارج شده است؟

📖 مثال: نشان دهید اگر A, B دو پیشامد مستقل و $A \subseteq B$ ، آنگاه $P(A) = 0$ یا $P(B) = 1$

📖 مثال: نشان دهید اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $P(A|B) = P(A|B')$ ، آنگاه A, B دو پیشامد مستقل هستند.

📖 مثال: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ عددی به تصادف انتخاب میشود. فرض می‌کنیم A پیشامد "عدد انتخابی زوج است" و B پیشامد "عدد انتخابی مضرب ۳ است" در نظر گرفته شود. آیا B, A مستقل اند؟

📖 مثال: در پرتاب دو تاس به طور متوالی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد، مستقل بودن B, A را بررسی کنید.

📖 مثال: جعبه‌ای شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است. به طور پی در پی دو مهره به تصادف و با جایگذاری بیرون می‌آوریم. مطلوبست احتمال آنکه:

الف) هر دو مهره قرمز باشند

ب) حداقل یک مهره آبی باشد

پ) هر دو مهره هم رنگ باشند

ناسازگاری و استقلال



می‌دانیم دو پیشامد ناسازگار، هیچ برآمد مشترکی ندارند. به عبارت دیگر دو پیشامد B, A ناسازگارند هرگاه

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{یا} \quad P(A \cap B) = 0$$

یعنی رخ دادن توام آنها غیرممکن است.

بنابراین واضح است که ناسازگاری دو پیشامد ربطی به مستقل بودن آنها ندارد. چون اگر B, A دو پیشامد مستقل باشند آنگاه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ، یعنی رخ دادن توام آنها قابل قبول است.

حال اگر فرض کنیم دو پیشامد ناسازگار و مستقل اند آنگاه: $P(A) \cdot P(B) = 0$ و لذا $P(A) = 0$ یا $P(B) = 0$

و به عبارت دیگر حداقل یکی از این دو پیشامد غیرممکن (نشدنی) است. پس ناسازگاری پیشامدها ربطی به مستقل بودن آنها ندارد و برعکس.

❖ متمم گیری استقلال پیشامدها را حفظ می کند.

قضیه: اگر B, A دو پیشامد مستقل از فضای نمونه ای باشند آنگاه:

الف) B, A' نیز دو پیشامد مستقل اند.

ب) B', A نیز دو پیشامد مستقل اند.

مای دارس
گروه آموزشی عصر

پ) B', A' نیز دو پیشامد مستقل اند.

www.my-dars.ir

❖ سه پیشامد مستقل:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{cases}$$

سه پیشامد A, B, C از یک فضای نمونه ای مستقل هستند هرگاه:

این چهار شرط باید همگی برقرار باشند. ممکن است سه تای اول برقرار باشد یعنی دو به دو مستقل باشند اما سه تا با هم مستقل نباشند.

📖 مثال: در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه A به هدف بزند، $\frac{5}{7}$ و احتمال اینکه B به هدف بزند برابر $\frac{7}{10}$ است.

اگر هر کدام یک بار تیراندازی کنند، با کدام هدف:

الف) هر دو به هدف می زنند؟

ب) فقط A به هدف می زند؟

پ) فقط یکی به هدف می زند؟

ت) هیچ کدام به هدف نمی زنند؟

📖 مثال: اگر A, B دو پیشامد مستقل با احتمال های به ترتیب $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ باشند، حاصل $P(A \cup B')$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

www.my-dars.ir

مثال: سه تیم کوهنوردی A, B, C با احتمال موفقیت به ترتیب ۴۰ و ۴۵ و ۵۰ درصد به طور جداگانه به جهت صعود به قله دماوند، اعزام می شوند. احتمال اینکه حداقل یکی از این تیم ها موفق به صعود شوند چقدر است؟

مثال: یک سکه و دو تاس همگن را به طور هم زمان پرتاب می کنیم. احتمال اینکه این سکه "رو" و هر دو تاس ۶ ظاهر شوند، چقدر است؟

مثال: خانواده ای دارای ۴ فرزند است.

الف) احتمال اینکه هر ۴ فرزند این خانواده دختر باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

مثال: احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، $\frac{0}{9}$ است. اگر این دارو بر روی ۱۰ نفر امتحان شود، با کدام احتمال روی همه آنها جواب منفی می دهد؟

مثال: در یک کلاس ۱۰ نفری احتمال اینکه

الف) همگی روز شنبه متولد شده باشند، چقدر است؟ ب) همگی در یک روز هفته متولد شده باشند، چقدر است؟

www.my-dars.ir

آزمون برنولی



هرآزمایشی که فقط دو نتیجه موفقیت و شکست برای آن در نظر گرفته شود، آزمون برنولی نامیده می شود.

* اگر احتمال موفقیت در هر بار تکرار یک آزمون برنولی برابر α در نظر گرفته شود، آنگاه احتمال k بار موفقیت در n بار تکرار یک آزمون برنولی عبارت است از:

$$P = \binom{n}{k} \alpha^k \cdot (1-\alpha)^{n-k}$$

انتخاب k بار موفقیت از n بار تکرار
 k بار پیروزی
بار شکست $n-k$

📖 مثال: یک سکه سالم را ده بار می اندازیم. احتمال این که نیمی از پرتاب ها "رو" ظاهر شود چقدر است؟

📖 مثال: در یک خانواده ۶ فرزندی با کدام احتمال ۴ فرزند پسر است؟

📖 مثال: در پرتاب چهار سکه سالم با هم، با کدام احتمال ۳ بار "رو" یا "پشت" ظاهر می شود؟

📖 مثال: در پرتاب یک سکه سالم، اگر رو بیاید یک تیرانداز مجاز است ۵ تیر رها کند و اگر پشت بیاید ۳ تیر رها می کند.

احتمال اصابت هر تیر رها شده به هدف برابر $\frac{3}{5}$ است. با کدام احتمال فقط یک تیر به هدف اصابت می کند؟

مثال: ۶۰ درصد کارکنان یک سازمان مرد و ۴۰ درصد آنان زن هستند. می دانیم ۲۰ درصد مردان و ۴۵ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر از بین آن ها ۳ نفر انتخاب شود، با کدام احتمال ۲ نفر آن ها تحصیلات دانشگاهی دارند؟

۰/۱۴۱(۴)

۰/۱۵۶(۳)

۰/۱۷۲(۲)

۰/۱۸۹(۱)

مای درس

گروه آموزشی عصر

اصطلاحات اولیه



واقعیت هایی درباره یک شیء یا فرد که در محاسبه ، برنامه ریزه و پیش بینی به کار می روند داده نام دارد. ❖

www.my-dars.ir