

فصل دوم

احتمال

مبانی احتمال

اصول احتمال

احتمال غیرهم شانس

احتمال شرطی

قانون احتمال کل

قانون بیز

پیشامدهای مستقل و وابسته

www.my-dars.ir

- تجربه احتمال : آزمایشی است که نتیجه آن از قبل معلوم نیست .
- فضای نمونه ای : مجموعه ای است شامل کلیه حالت های ممکن برای یک تجربه تصادفی

مثال ۱ : سکه ای را پرتاب می کنیم ، فضای نمونه ای چیست ؟

مثال ۲ : سکه ای را دوبار پرتاب می کنیم ، فضای نمونه ای چیست ؟

مثال ۳ : خانواده ای دارای ۳ فرزند می باشد فضای نمونه ای برای جنسیت این فرزندان چیست ؟

مثال ۴ : دو تاس غیر هم رنگ را با هم پرتاب می کنیم ، فضای نمونه ای چیست ؟

مثال ۵ : یک تاس و یک سکه را باهم پرتاب می کنیم ، فضای نمونه ای چیست ؟

مثال ۶ : یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست . فرض کنید آن ها یکی پس از دیگری وارد سالن می شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آن ها اهمیت داشته باشد ، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال این که اولین کسی که وارد می شود ، بلندقدترین عضو تیم باشد، چقدر است؟

مثال ۷ : در پرتاب ۳ سکه و ۲ تاس غیر هم رنگ فضای نمونه ای چند عضو دارد ؟

www.my-dars.ir

مثال ۸ : احمد و عباس باهم یک مرتبه سنگ ، کاغذ ، قیچی بازی می کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده بازی است؟

نکته: اگر در یافتن پیشامد تصادفی ترتیب و جابجایی مهم نباشد از ترکیب یعنی $C(n, r)$ استفاده می کنیم و اگر ترتیب و جابجایی مهم باشد از $P(n, r)$ استفاده می کنیم.

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۹: در کیسه ای ۷ مهره قرمز و ۵ مهره سبز و ۳ مهره سفید وجود دارد؛ از این کیسه ۲ مهره با هم خارج می کنیم مطلوب است تعداد عضو های فضای نمونه ای برای این آزمایش را به دست آورید.

مثال ۱۰: تبدیلات سه حرفی کلمه "آدم خوب" را روی کارت هایی می نویسیم یک کارت را از بین آن ها انتخاب می کنیم فضای نمونه ای برای این آزمایش چند عضو دارد؟ (تعداد کارت ها چند تاست؟)

پیشامد تصادفی

هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را یک پیشامد تصادفی می نامند.

مثال ۱۱: در پرتاب یک تاس پیشامد آن را تعیین کنید که عدد اول ظاهر شود.

مثال ۱۲: در پرتاب ۲ تاس غیر هم رنگ باهم پیشامد های زیر حساب کنید.

الف) مجموع شماره ها ۷ باشد.

ب) مجموع شماره ها بیش از ۱۰ باشد.

www.my-dars.ir

ج) مجموع شماره ها ۱۵ باشد .

د) در تاس اول عدد اول و در تاس دوم مضرب ۳ ظاهر شود.

ه) در لاقل یکی از تاس ها عدد ۵ ظاهر شود .

مثال ۱۳: در پرتاب ۳ سکه پیشامد های زیر را مشخص کنید :

الف) دقیقا ۲ بار رو ظاهر شود .

ب) لاقل ۲ بار رو ظاهر شود .

ج) حداکثر یک بار رو ظاهر شود .

نکته : اگر $n = m$ آنگاه $m! n! 2!$ (به صورت یک در میان قرار می گیرند .)

اگر $n = m + 1$ آن گاه $m! n!$ (به صورت یک در میان قرار می گیرند .)

مثال ۱۴ : ۴ سرباز و ۳ افسر در یک صف می ایستند ، پیشامد آن که آن ها یک در میان بایستند چند عضو دارد؟

www.mly-dars.ir

مثال ۱۵: سه کتاب ریاضی دو کتاب اقتصاد که باهم متفاوتند به چند طریق می‌تواند در یک قفسه در کنار هم قرار گیرند به طوری که :

الف: کتاب‌های هم موضوع کنار هم باشند.

ب: کتاب‌ها یک در میان کنار هم باشند.

مثال ۱۶: تعداد جایگشت‌های کلمه (system) که در آن‌ها بین دو حرف S دقیقا یک حرف دیگر وجود داشته باشد؟

مثال ۱۷: در یک کیسه سه مهره آبی چهار مهره قرمز و سه مهره سیاه قرار دارد. به چند طریق می‌توان سه مهره انتخاب کرد به طوری که حداقل دو مهره سیاه باشد.

مثال ۱۸: حروف کلمه (mohammad) چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت؟

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

نکته: برای به دست آوردن متمم یک پیشامد فضای نمونه ای را مجموعه مرجع در نظر می گیریم.

نکات مورد نیاز در این فصل:

الف:

پیشامد $A \cup B$:

۱- در حالتی رخ می دهد که حداقل یکی از پیشامد های A و B رخ دهد.

۲- پیشامد A رخ دهد یا پیشامد B رخ دهد.

۳- پیشامد A را با پیشامد B جمع می کنیم.

ب:

پیشامد $A \cap B$:

۱- پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ دهد.

۲- پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهد.

پ)

پیشامد A' یعنی وقتی صحبت از رخ ندادن پیشامد A باشد، رخ می دهد.

ت)

پیشامد $A - B$:

در حالتی استفاده می شود که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. (فقط A رخ دهد، دقیقا A رخ دهد).

ث)

پیشامد $A \Delta B$:

در حالتی استفاده می شود که دقیقا یکی از پیشامد های A یا B رخ دهد.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

✓ دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند هرگاه $A \cap B = \emptyset$

گروه آموزشی عصر

مثال ۱۹: دو سکه را باهم پرتاب می کنیم، اگر هر دو سکه پشت بیاید آن گاه یک تاس را می ریزیم، مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای این تجربه تصادفی www.my-dars.ir

ب) پیشامد A که در آن دقیقا هر دو سکه به پشت و عدد تاس بزرگتر از ۴ باشد.

پ) پیشامد B که در آن حداقل یک سکه رو بیاید.

مثال ۲۰: یک سکه و یک تاس را می اندازیم :

الف (فضای نمونه ای را بنویسید .

ب) پیشامد A که در آن سکه پشت و تاس ۳ باشد را بنویسید.

پ) پیشامد B که در آن سکه رو یا تاس ۳ باشد را مشخص کنید .

احتمال : اندازه گیری شانس

احتمال :

الف (گسسته

ب) پیوسته

نکته : آن چیزی که قابل اندازه گیری باشد متغیر پیوسته و آن چیزی که قابل شمارش باشد متغیر گسسته نامیده می شود .

احتمال هم شانس در فضای گسسته :

هر گاه A پیشامدی از فضای نمونه ای S باشد در این صورت احتمال پیشامد A برابر $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ است.

مثال ۲۱: سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم ، مطلوب است احتمال آن که :

الف (دو بار رو بیاید.

ب) لااقل دو بار رو بیاید .

www.my-dars.ir

ج) حداکثر دو بار رو بیاید .

مثال ۲۲: در پرتاب یک تاس مطلوب است احتمال ظاهر شدن عدد اول؟

مثال ۲۳: اعداد ۲ دورقمی از ۱۰ تا ۳۰ را روی کارت هایی می نویسیم یک کارت از بین آن ها خارج می کنیم ، مطلوب است احتمالات زیر :

الف) عدد ظاهر شده اول باشد .

ب) عدد ظاهر شده مضرب ۵ باشد .

پ) عدد ظاهر شده مربع کامل باشد .

ت) عدد ظاهر شده مضرب ۲ یا ۳ باشد .

ث) عدد ظاهر شده مضرب ۲ و مضرب ۳ باشد .

مثال ۲۴: در جعبه ای ۶ مهره سیاه و ۳ مهره سفید وجود دارد. از این جعبه ۵ مهره به تصادف و هم زمان بیرون می آوریم. با چه احتمالی حداقل ۴ مهره سیاه انتخاب شده اند؟

مثال ۲۵: در کیسه ای ۷ مهره قرمز و ۸ مهره سفید و ۴ مهره سیاه موجود است از این کیسه ۳ مهره باهم خارج می کنیم ، مطلوب است احتمال:

الف) هر سه هم رنگ باشد.

ب) هیچ دو مهره ای هم رنگ نباشد.

مثال ۲۶: از بین ۱۵ دانش آموز کلاس دهم و ۱۰ دانش آموز کلاس یازدهم و ۸ دانش آموز کلاس دوازدهم می خواهیم یک تیم ۶ نفره درست کنیم مطلوب است احتمالات زیر:

الف) در این تیم هیچ دانش آموز کلاس دهم عضو نباشد و از کلاس دوازدهم لااقل ۴ نفر عضو تیم باشند.

ب) به تعداد مساوی از دانش آموزان هر کلاس انتخاب شود.

مثال ۲۷: در کیسه ای سه مهره آبی و ۴ مهره زرد وجود دارد، مهره ها را یکی پس از دیگری بیرون می آوریم و در کنار هم ردیف می کنیم؛ احتمال آن که مهره ها یک در میان زرد باشند را بیابید.

مثال ۲۸: در کلاسی که داری ۷ دانش آموز است مطلوب است احتمال آن که هیچ دو دانش آموزی دارای ماه تولد یکسان نباشند.

مای درسی
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال ۲۹: اعداد سه رقمی ساخته شده از ارقام ۰ تا ۹ را روی کارت هایی می نویسیم. یک کارت خارج می کنیم مطلوب است احتمال آن که: (مسأله را در دو حالت تکرار مجاز و غیر مجاز حل کنید).
الف) عدد روی کارت فرد باشد.

ب) عدد روی کارت زوج باشد.

پ) عدد روی کارت مضرب ۵ باشد.

مثال ۳۰: اعداد ۱ و ۲ و ... و ۹ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آن ها بیرون می آوریم. با کدام احتمال مجموع دو کارت برابر ۱۱ است؟ (کنکور ریاضی ۹۱)

مای درس

گروه آموزشی مصر

قوانین احتمال (اصول احتمال)

اصل ۱) هر گاه A پیشامدی از فضای نمونه باشد احتمال A عددی است بین صفر و یک: $0 \leq P(A) \leq 1$

اصل ۲) احتمال فضای نمونه ای برابر است با یک: $P(S) = 1$

اصل ۳) هر گاه A و B دو پیشامد ناسازگار باشند (دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند هر گاه $A \cap B = \emptyset$ باشد) در

این صورت: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

قضیه ۱: اگر A و B و C سه پیشامد دو به دو ناسازگار باشند؛ آن گاه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

اثبات:

قضیه ۲: $P(A') = 1 - P(A)$

اثبات:

قضیه ۳: $P(\emptyset) = 0$

اثبات:

قضیه ۴: برای هر دو پیشامد A و B داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

اثبات:

مای دررس

قضیه ۵: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشد، آن گاه $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اثبات:

www.my-dars.ir

قضیه ۶: اگر $A \subset B$ باشد، آنگاه

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad (\text{الف})$$

$$P(A) \leq P(B) \quad (\text{ب})$$

اثبات :

مثال ۳۱: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشد و $P(A) = 0/2$ و $P(B) = 0/3$ باشد $P(A \cup B)$ را به دست آورید.

مثال ۳۲: عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید:
الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی به ۳ بخش پذیر نباشد.

مای دررس

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳.
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال ۳۳: دو تاس را باهم پرتاب می کنیم احتمال این که مجموع دو تاس برابر ۶ یا هر دو تاس فرد بیایند را به دست آورید.

مثال ۳۴: احتمال آن که دانش آموزی در درس فیزیک قبول شود $0/55$ و در درس شیمی قبول شود $0/6$ است. اگر احتمال آن که حداقل در یکی از دو درس قبول شود $0/75$ باشد احتمال قبولی در هر دو درس را بیابید.

مثال ۳۵: یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آن ها یکی پس از دیگری وارد سالن می شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آن ها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال این که اولین کسی که وارد می شود، بلندقدترین عضو تیم باشد، چقدر است؟

تست ۱: یک تاس سالم را سه بار طور متوالی پرتاب می کنیم. احتمال رو شدن حداقل یک بار عدد ۶ کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۹)

$$\frac{31}{72} (4)$$

$$\frac{91}{216} (3)$$

$$\frac{41}{108} (2)$$

$$\frac{13}{36} (1)$$

تست ۲: به تصادف یک عدد طبیعی دو رقمی انتخاب می شود. با کدام احتمال، عدد انتخابی مضرب ۳ یا ۵ است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۹)

$$\frac{8}{15} (4)$$

$$\frac{7}{15} (3)$$

$$\frac{3}{5} (2)$$

$$\frac{2}{5} (1)$$

تمارین

تمرین ۱: پنج نفر زن و شش نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده اند. با این حال، امکان استخدام تنها برای پنج نفر از آن ها وجود دارد احتمال انتخاب ۵ نفر ر در حالت های زیر بیابید:

الف) ۲ زن و ۳ مرد انتخاب شوند.

ب) ۵ زن انتخاب شوند.

پ) حداقل ۴ مرد انتخاب شوند.

تمرین ۲: یک تاس و یک سکه با هم انداخته می شوند، مطلوب است:

الف) احتمال آن که تاس عددی زوج و سکه رو بیاید.

ب) احتمال آن که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

تمرین ۳: یک سکه محتوی ۲۰ مهره قرمز، ۱۰ مهره سفید و ۱۵ مهره سبز است، یک مهره را به تصادفی از کیسه بیرون می آوریم، مطلوب است:

www.my-dars.ir

الف) احتمال آن که این مهره سفید باشد.

(ب) احتمال آن که یک مهره قرمز و یک مهره سفید باشد.

تمرین ۴: اگر $P(A \cap B) = 0/1$ و $P(A' \cup B) = 0/8$ و $P(A \cup A') = 0/7$ حاصل $P(A \cup B)$ را بیابید.

تمرین ۵: از کیسه ای که محتوای آن ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است به تصادف سه مهره خارج می کنیم با کدام احتمال بین مهره های خارج شده مهره سفید نیست یا مهره سیاه نیست؟ (کنکور ریاضی ۹۵)

تمرین ۶: از بین مجموعه اعداد متوالی $\{101, 102, \dots, 250\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد لااقل بر یکی از اعداد ۴ یا ۵ بخش پذیر باشد.

تمرین ۷: اگر $P(A) = 0/4$ و $P(B') = 0.7$ باشد. حداقل مقدار $P(A' \cup B')$ چقدر است؟

تمرین ۸: در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف سه مهره خارج می کنیم با کدام احتمال مهره های خارج شده هم رنگ هستند؟ (کنکور ریاضی ۹۲)

تمرین ۹: در جعبه ای سه مهره سفید دو مهره سیاه و پنج مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون بیاوریم. با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟ (کنکور تجربی ۹۴)

تمرین ۱۰: اعداد ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ بر روی ۶ مهره یکسان نوشته شده اند. اگر دو مهره را باهم بیرون بیاوریم ، با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ است؟ (کنکور ریاضی خارج ۸۸)

تمرین ۱۱: از مجموعه $\{201, 202, \dots, 500\}$ یک عدد به صورت تصادفی انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد نه مضرب ۴ و نه مضرب ۵ است؟ (کنکور ریاضی ۸۹)

تمرین ۱۲: در جعبه ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است . به تصادف ۳ مهره از بین می آوریم . با کدام احتمال فقط یکی از مهره ها سفید است؟

تمرین ۱۴: در ظرفی پنج مهره با شماره های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ قرار دارند . دو مهره را باهم بیرون می آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره های این دو مهره فرد است؟

تمرین ۱۵: دو تاس را باهم پرتاب می کنیم . با کدام احتمال دو عدد ظاهر شده متوالی هستند؟

احتمال غیر هم شانس در فضای گسسته

پیشامد ساده: هر زیر مجموعه تک عضوی از فضای نمونه ای را پیشامد ساده می نامند.

احتمال تخصیص یافته: برای هر پیشامد احتمالی در نظر گرفته می شود که به آن احتمال تخصیص یافته می گویند.

احتمال تخصیص یافته مقبول: هر گاه $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ فضای نمونه ای و k_1, k_2, \dots, k_n احتمال تخصیص یافته مقبول: $p_1(\{e_1\}) = k_1, p_2(\{e_2\}) = k_2, \dots, p_n(\{e_n\}) = k_n$ باشد؛ این احتمالات مقبول هستند هر گاه:

$$1) \forall i \quad 0 \leq k_i \leq 1 \quad (0 \leq p(e_i) \leq 1)$$

$$2) k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1$$

مثال ۳۶: کدام یک از احتمالات تخصیص یافته زیر برای فضای نمونه ای $S = \{a, b, c\}$ مقبول است؟

$$P(\{a\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{b\}) = P(\{c\}) = \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$P(\{a\}) = \frac{-1}{4}, \quad P(\{b\}) = \frac{2}{3}, \quad P(\{c\}) = \frac{7}{12} \quad (2)$$

$$P(\{a\}) = \frac{1}{3}, \quad P(\{b\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{c\}) = \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$P(\{a\}) = \frac{1}{5}, \quad P(\{b\}) = \frac{2}{7}, \quad P(\{c\}) = \frac{18}{35} \quad (4)$$

$$P(\{a\}) = \frac{4}{3}, \quad P(\{b\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{c\}) = \frac{1}{5} \quad (5)$$

مثال ۳۷: تاسی را پرتاب می کنیم اگر احتمال ظاهر شدن عدد زوج دو برابر احتمال ظاهر شدن عدد فرد باشد؛

اولا احتمال ظاهر شدن هر عدد را به دست آورید.

مای درسی

ثانیا احتمال آن را به دست آورید که عدد زوج یا مضرب ۵ ظاهر شود.

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال ۳۸: در یک مسابقه چهار جانبه فوتبال تیم های a, b, c, d حضور دارند اگر احتمال قهرمانی تیم های a, b, c با هم برابر باشند ولی احتمال قهرمانی تیم d دو برابر هر یک از تیم های دیگر باشد، احتمال قهرمانی هر تیم را به دست آورید.

تذکر: هر گاه A یک پیشامد اختیاری از فضای نمونه ای S باشد چنان چه A از اجتماع چند پیشامد ساده به وجود آمده باشد احتمال پیشامد A برابر است با مجموع احتمالات پیشامد های ساده.

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

$$P(A) = P(\{s_1, s_2, \dots, s_k\}) \\ = P(s_1) + P(s_2) + \dots + P(s_k)$$

مثال ۳۹: در یک آزمایش تصادفی $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه ای است. اگر $P(\{x, z\}) = \frac{1}{4}$ ، $P(\{x, y\}) = \frac{2}{4}$ احتمال وقوع هر پیشامد را به دست آورید.

مثال ۴۰: یک تاس به گونه ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است در پرتاب این تاس احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را به دست آورید.

نکته: برای نوشتن احتمال تخصیص یافته اگر فضای نمونه ای تک عضوی باشد در صورتی که عضو مربوطه را در آکولاد قرار ندهیم عیبی ندارد اما اگر فضای نمونه ای چند عضو داشته باشد قرار دادن آکولاد ضروری است.

مثال ۴۱: در یک شهرستان ۴ نفر کاندیدای انتخاب نمایندگی مجلس هستند اگر شانس انتخاب A_1 دو برابر شانس انتخاب A_2 و شانس انتخاب A_3 دو برابر شانس انتخاب A_4 باشد؛ A_2 و A_3 هم شانس باشند، احتمال انتخاب A_1 چقدر است؟

مثال ۴۲: فرض کنیم $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ فضای نمونه ای یک تجربه تصادفی باشد؛ اگر $P(s_3) = \frac{1}{3}$

$$P(\{s_2, s_4\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{s_2, s_3\}) = \frac{2}{3}$$

آنگاه مطلوب است محاسبه $P(s_1)$.

مثال ۴۳: تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول ۳ برابر وقوع عدد غیر اول است. در یک پرتاب این تاس A پیشامد وقوع عددی کوچک تر از ۴ است. $P(A)$ را به دست آورید.

مای درس

مثال ۴۴: اگر $s = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد به طوری که $P(A) = \frac{2}{7}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $P(C')$ را به دست آورید.

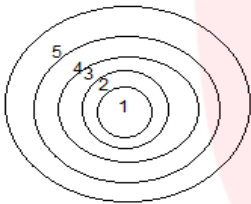
www.my-dars.ir

مثال ۴۵: در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه ای است. اگر $P(x)$ و $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامد را به دست بیاورید.

مثال ۴۶: در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره ای شکل، مطابق شکل رو به رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است (مرز مشترک بین دو ناحیه را جزء ناحیه کوچکتر محسوب کنید). فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه k ام $x(2k - 1)$ باشد:

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصبت به دو ناحیه دوم یا پنجم؟



مای درس

گروه آموزشی عصر

دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S را در نظر بگیرید. اگر $P(B) \neq 0$ باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A به شرطی که پیشامد B اتفاق بیفتد، برابر است با:

www.my-dars.ir

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

با توجه به رابطه بالا در احتمال شرطی، پیشامد رخ داده شده (یعنی پیشامد B) را به عنوان فضای نمونه ای جدید در نظر می گیریم و پیشامد مطلوب مسئله (پیشامد A) را از روی فضای نمونه ای جدید تعیین می کنیم.

مثال ۴۷: یک تاس را دو بار پرتاب می کنیم. اگر عدد ظاهر شده در پرتاب دوم بزرگ تر از عدد ظاهر شده در پرتاب اول باشد، احتمال اینکه مجموع دو تاس زوج باشد را بیابید.

نکته: اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

مثال ۴۸: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوریکه $P(B) \neq 0$ باشد ثابت کنید:

$$P(A'|B) = 1 - P(A|B)$$

مای دارس

نکته: در مسائل احتمال شرطی، ابتدا ببینید شرط سوال چیست، سپس با توجه به شرط داده شده (آن چیزی که می دانیم!) فضای نمونه ای و پیشامد را پیدا کرده، احتمال مورد نظر را به دست می آوریم.

نکته: آن عبارتی که بعد از می دانیم یا اگر می آید، شرط مسئله است.

مثال ۴۹: فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند به طوری که

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A) = \frac{1}{2}$$

الف: مقدار $P(A|B)$, $P(B|A)$ را حساب کنید.

ب: مقدار $P(A \cup B)$, $P(A'|B')$ را حساب کنید.

مثال ۵۰: دو تاس را پرتاب می کنیم می دانیم مجموع دو عدد رو شده ۸ است. احتمال این که هر دو عدد زوج باشد چقدر است؟

مثال ۵۱: در خانواده ای که دارای ۳ فرزند است بزرگ ترین فرزند خانواده پسر است. احتمال این که این خانواده حداقل یک دختر داشته باشد چقدر است؟

مثال ۵۲: یک کیسه حاوی ۵ مهره سیاه و ۷ مهره سفید است . دو مهره به تصادف متوالیا و بدون جایگذاری بیرون می کشیم . با فرض این که بدانیم اولین مهره سیاه است احتمال آن که دومین مهره نیز سیاه باشد چقدر است؟

نکته: برای محاسبه احتمال A به شرط B می توان از کاهش فضای نمونه نیز استفاده کرد یعنی فضای نمونه جدید همان مجموعه B باشد و از A ، B را انتخاب کنیم.

مثال ۵۳: روش دوم مثال ۵۲ را با استفاده از نکته فوق بنویسید.

www.my-dars.ir

مثال ۵۴: درباره خانواده ای چهارفرزندی ، می دانیم که دست کم یکی از فرزندان آن ها پسر است. احتمال این که دقیقا ۲ پسر داشته باشد، چقدر است؟

مثال ۵۵: خانواده ای ۴ فرزند دارد. می دانیم فرزند اول پسر است . مطلوب است احتمال آن که سه فرزند دیگر این خانواده دختر باشد.

مثال ۵۶: سکه ای سه بار پرتاب می کنیم می دانیم دست کم یک بار رو آمده است در این صورت احتمال این که هر سه بار رو آمده باشد چقدر است؟

مثال ۵۷: دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می کنیم :

الف: اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است احتمال این که تاس سبز ۶ آمده باشد، چقدر است؟

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

ب: اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است احتمال آن که مجموع دو تاس ۱۰ شده باشد، چقدر است؟

مثال ۵۸: تیم ملی والیبال ایران ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست اگر یکی از بازیکن ها را به تصادف انتخاب کنیم :

الف: احتمال این که آن بازیکن بلند قد ترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

ب: بازیکن دیگری به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم که از بازیکن اول کوتاه قد تر است در این صورت احتمال این که بازیکن اول بلند قد ترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

مثال ۵۹: در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است . دو مهره متوالیا و بدون جایگذاری از آن بیرون می آوریم . با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره ، دومین مهره خارج شده سفید است؟

مثال ۶۰: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند . به طوری که $A \subset B$, $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{3}{4}$ آن گاه $P(B|A')$ کدام است ؟

مای دارس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال ۶۱: از ۹ کلید درون کیسه ای، ۴ تای آن ها طلایی رنگ است. فغلی داریم که فقط با کلید های طلایی رنگ باز می شود. اگر به تصادف دو کلید از این کیسه خارج کنیم و بتوان فقل را باز کرد. با چه احتمالی با هر دو کلید می توان فقل را باز کرد؟

تست ۳: یک فضای نمونه ای متشکل از ۵ برآمد a و b و c و d و e است. اگر $P(a) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a, b, c\}) = \frac{2}{3}$ احتمال $P(\{b, c, e\}|\{a, b, c\})$ کدام است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۶)

$$\frac{2}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{5}{12} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{8} \text{ (۱)}$$

تست ۴: تاس همگنی را سه بار پرتاب می کنیم، اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده، عددی فرد است. احتمال این که لااقل یکی از تاس های رو شده ۳ باشد، کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۹)

$$\frac{15}{36} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

تست ۵: امیر و بهروز هر کدام به ترتیب با احتمال $0/6$ و $0/3$ در یک مسابقه علمی شرکت می کنند. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت بهروز $0/5$ است. احتمال شرکت امیر به شرط شرکت نکردن بهروز کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۸)

$\frac{6}{7}(4)$

$\frac{11}{14}(3)$

$\frac{5}{7}(2)$

$\frac{9}{14}(1)$

تست ۶: در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. دو مهره به صورت پی در پی و بدون جایگذاری از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال مهره دوم سفید است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۸)

$0/72(4)$

$0/64(3)$

$0/6(2)$

$0/5(1)$

تست ۷: تاس همگنی را سه بار پرتاب می کنیم. اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده یک عدد فرد است. احتمال این که لااقل یکی از تاس های رو شده ۲ باشد کدام است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۹)

$\frac{3}{4}(4)$

$\frac{7}{12}(3)$

$\frac{1}{2}(2)$

$\frac{5}{12}(1)$

تست ۸: سه ظرف داریم. در ظرف اول ۹ مهره سفید و در دومی ۹ مهره سیاه و در سومی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارد. به تصادف از یک ظرف دو مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال یکی از دو مهره سیاه است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۹)

$\frac{13}{18}(4)$

$\frac{25}{36}(3)$

$\frac{11}{18}(2)$

$\frac{1}{3}(1)$

تست ۹: A و B دو پیشامد از یک فضای نمونه ای هستند. اگر

$P(A) = 0/4$ و $P(B|A) = 0/25$ و $P(B) = 0/3$ باشد، $P(B|A')$ کدام است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۹)

$$\frac{1}{5}(4)$$

$$\frac{1}{4}(3)$$

$$\frac{1}{3}(2)$$

$$\frac{2}{3}(1)$$

قانون ضرب احتمال

اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(B) > 0$ ، آن گاه از رابطه $P(A \cap B) = P(A)P(A|B)$ ، تساوی

$P(A \cap B) = P(A)P(A|B)$ به دست می آید. که به آن قانون ضرب احتمال گفته می شود و برای به دست آوردن احتمال هم زمان وقوع دو پیشامد استفاده می شود.

مثال ۶۲: قانون ضرب احتمال را برای سه پیشامد A_1 و A_2 و A_3 با احتمال های ناصفر، ثابت کنید:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$$

مای درس

مثال ۶۳: یک تولید کننده حدس می زند احتمال آن که کسی آگاهی تبلیغات شرکت را بخواند برابر $0/4$ است. تصور می کند که احتمال این که اگر کسی این آگاهی را خوانده محصول کارخانه را بخرد برابر $0/01$ است مطلوب است:

احتمال اینکه کسی آگاهی را خوانده و محصول را بخرد.

www.my-dars.ir

مثال ۶۴: در کیسه ای ۶ مهره سیاه و ۴ مهره سفید وجود دارد. از این کیسه دو مهره پی در پی و بدون جایگذاری بیرون می کشیم احتمال این که مهره اول سیاه و مهره دوم سفید باشد چقدر است؟

مثال ۶۵: در جعبه ای ۱۵ لامپ وجود دارد که ۶ تای آن خراب است. دو لامپ متوالیا و بدون جایگذاری بیرون می کشیم احتمال این که هر دو لامپ خراب باشد چقدر است؟

مثال ۶۶: در جعبه ای ۵ مهره سفید ۷ مهره سیاه و ۴ مهره سبز وجود دارد. از این جعبه سه مهره متوالیا و بدون جایگذاری بیرون می کشیم:

الف: احتمال آن که مهره اول سفید و مهره دوم سیاه و مهره سوم سبز باشد چقدر است؟

ب: احتمال آن که هر سه مهره سفید باشد چقدر است؟

پ: احتمال آن که هر سه مهره هم رنگ باشد چقدر است؟

www.my-dars.ir

مثال ۶۷: در یک کلاس ۱۵ پسر و ۵ دختر وجود دارد. ۳ نفر را به تصادف و متوالیا به پای تخته می خوانیم . احتمال آن که دو نفر آن ها دختر باشد چقدر است؟

مثال ۶۸: در یک خانواده سه نفری ، می دانیم یکی از فرزندان پسر است . با کدام احتمال دو فرزند دیگر ، دختر است؟

مثال ۶۹: در یک خانواده سه فرزندی ، می دانیم فرزند اول آن ها دختر است . با کدام احتمال لاقل یکی از فرزندان ، پسر است؟

تست ۱۰: در جعبه اول ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه قرار دارند. از جعبه اول یک مهره به دلخواه خارج و در جعبه دوم می اندازیم، سپس دو مهره از جعبه دوم بیرون می آوریم. با کدام احتمال لاقل یکی از دو مهره سفید است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۹)

$$\frac{23}{27} (4)$$

$$\frac{38}{45} (3)$$

$$\frac{34}{45} (2)$$

$$\frac{20}{27} (1)$$

قانون احتمال کل

فرض کنید فضای نمونه ای S را به پیشامد های دو به دو ناسازگار B_1 و B_2 و B_3 و ... تقسیم کنیم . برای تعیین احتمال وقوع پیشامد A که در داخل این پیشامدها قرار گرفته است ، خواهیم داشت :

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

برای حل سوالات قانون احتمال به جای استفاده از فرمول بالا می توان مسئله را با روش نمودار درختی به راحتی حل کرد، مثال زیر را حل کنید.

مثال ۷۰: دو کیسه داریم، در کیسه اول ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه و در کیسه دوم سه مهره سفید و ۶ مهره سیاه وجود دارد. یکی از این کسبه ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره ای به تصادف از آن بیرون می کشیم . احتمال این که این مهره سیاه باشد چقدر است؟

مثال ۷۱: سه جعبه داریم در جعبه اول ۱۰ لامپ وجود دارد . که ۴ تای آن خراب است. در جعبه دوم ۶ لامپ وجود دارد که یکی از آن ها خراب است. در جعبه سوم ۸ لامپ وجود دارد که سه تای آن ها خراب می باشد. جعبه ای را به تصادف برگزیده و یک لامپ از آن بیرون می کشیم احتمال این که این لامپ سالم باشد چقدر است؟

مثال ۷۲: احتمال مبتلا شدن به یک بیمار خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان ، واکسن زده باشند، احتمال این که یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

مثال ۷۳: میوه فروشی ۱۰ صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. سه صندوق از باغ شمالی پنج صندوق از باغ مرکزی و دو صندوق از باغ جنوبی، در این سه باغ احتمال این که یک سیب لکه دار باشد به ترتیب ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض این که تعداد سیب در صندوق های مختلف برابر است، احتمال این که سیبی که از یکی از صندوق ها بر می داریم لکه دار باشد چقدر است؟

مثال ۷۴: در شهری ۶۰ درصد راننده ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال این که یک راننده مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام می دهند. احتمال این که یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

مثال ۷۵: در دو جعبه به ترتیب ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از هر کدام از جعبه ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می دهیم. احتمال آن که لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

مای درس

گروه آموزشی عصر

نکته: فرض کنید B پیشامدی از فضای نمونه ای S باشد، B' متمم B است و $P(B') = 1 - P(B)$ به طوری که

$$0 < P(B) < 1$$

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

مثال ۷۶: دسته ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کاردی را به تصادف از این دسته انتخاب می کنیم و یک روی آن را می بینیم، احتمال این که آن رو قرمز باشد چقدر است؟

مثال ۷۷: بررسی آماری نشان داده است که اگر یک ساحل جزیره هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد، چقدر است؟

مثال ۷۸: جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامه تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این که گواهینامه تراکتور داشته باشد، چقدر است؟

مای درس

مثال ۷۹: دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می آوریم، با چه احتمالی این مهره سبز است؟

www.my-dars.ir

تمرین ۱۶: تولیدات یک شرکت توسط سه کارخانه A و B و C به نسبت ۴۵، ۲۰ و ۳۵ درصد تولید می شود. ۵ درصد از تولیدات شرکت A و ۴ درصد از تولیدات شرکت B و ۲ درصد از تولیدات شرکت C خراب است. اگر یک کالا به تصادف از این شرکت خریداری شود احتمال این که این کالا خراب باشد چقدر است؟

تمرین ۱۷: برطبق آمار می دانیم ۵۰ درصد ایرانی ها و ۳۰ درصد ژاپنی ها قدی بالای ۱۷۵ سانتی متر دارند. از جمعی شامل ۴ ایرانی و ۶ ژاپنی، یک نفر به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آن که وی قدی بالای ۱۷۵ داشته باشد، چقدر است؟

تمرین ۱۸: پنج ظرف داده شده است. در دو تا از این ظرف ها دو مهره سفید و یک مهره سیاه است. در یکی از این ظرف ها فقط ده مهره سیاه است. در دو ظرف دیگر سه مهره سفید و یک مهره سیاه است. یک ظرف را به تصادف انتخاب کرده و مهره ای از آن بیرون می کشیم احتمال این که مهره بیرون کشیده شده سفید باشد چقدر است؟

مای درس

تست ۱۱: احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۰ درصد و به فرزند دختر ۶ درصد است. با کدام احتمال، فرزندی که به دنیا می آید، این نوع بیماری را داراست؟ (کنکور ریاضی)

۰/۹۴(۴)

www.۰/۹۳(۳).my-dars.ir ۰/۹۲(۲)

۰/۹۱(۱)

تست ۱۲: در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان، دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن ها دفترچه سلامت دارد؟ (تجربی خارج ۹۰ و ۹۳)

$$0.696(4)$$

$$0.685(3)$$

$$0.669(2)$$

$$0.658(1)$$

تمرین ۱۹: دو کیسه داریم که در کیسه اول سه مهره قرمز و دو مهره سبز و در کیسه دوم دو مهره قرمز و پنج مهره سبز وجود دارد. یک کیسه را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره را بیرون می کشیم و در کیسه دیگری می گذاریم و سپس یک مهره از کیسه اخیر بیرون می کشیم:

الف: احتمال این که مهره اول قرمز و مهره دوم سبز باشد چقدر است؟

ب: احتمال این که دو مهر هم رنگ نباشد چقدر است؟

ج: احتمال این که هر دو مهره سبز باشد چقدر است؟

تست: ۱۳: در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ وجود دارد. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبه اول ۵ لامپ و از جعبه دوم ۷ لامپ به تصادف برداشته و در جعبه جدید قرار می دهیم با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۸)

$$\frac{7}{24}(4)$$

$$\frac{13}{48}(3)$$

$$\frac{11}{48}(2)$$

$$\frac{5}{24}(1)$$

قانون بیز

فرض کنید B_1 و B_2 و B_3 و ... و B_n پیشامد هایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می کنند در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

این قانون توضیح می دهد که چگونه $P(B_i)$ ها بعد از مشاهده رخ دادن پیشامد A به $P(B_i|A)$ ها تبدیل می شود:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)}$$

همان طور که می بینیم مخرج کسر قانون کلی احتمال است پس فرمول بالا ترکیبی از قانون بیز و قانون کلی است.

مثال ۸۰: دو کیسه داریم که در کیسه اول ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه است و در کیسه دوم سه مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. یکی از این کیسه ها را به تصادف انتخاب کرده و مهره ای از آن بیرون می کشیم اگر مهره انتخاب شده سفید باشد احتمال این که مهره متعلق به کیسه دوم باشد چقدر است؟

مثال ۸۱: در کیسه A ، ۴ مهره سبز و ۶ مهره قرمز است. کیسه B ، ۷ مهره سبز و ۴ مهره قرمز دارد. یک مهره به تصادف از کیسه A برمی داریم و در کیسه B می گذاریم و سپس از کیسه B یک مهره به تصادف بیرون می کشیم اگر بدانیم مهره انتخاب شده از کیسه B سبز است، احتمال این که مهره جا به جا شده قرمز باشد چقدر است؟

www.my-dars.ir

مثال ۸۲: ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رای دهنده های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

مثال ۸۳: سه شرکت A و B و C به ترتیب ۵۰، ۳۰ و ۲۰ درصد از محصولات کارخانه ای را تولید می کنند. درصد محصولات خراب این سه شرکت به ترتیب عبارت اند از ۳، ۴ و ۵ درصد. یک محصول به تصادف از تولیدات این کارخانه انتخاب می کنیم. ملاحظه می کنیم خراب است. احتمال این که این محصول توسط شرکت A تولید شده باشد چقدر است؟

نکته: فرض کنید B پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است، در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')}$$

مثال ۸۴: دسته ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می کنیم و می بینیم که قرمز است. احتمال این که روی دیگر کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟

مای درس
گروه آموزشی عصر

مثال ۸۵: قانون بیز را ثابت کنید:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

مثال ۸۶: با فرض شرایط قانون احتمال کل ثابت کنید:

$$\min\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\} \leq P(A) \leq \max\{P(A|B_1), \dots, P(A|B_n)\}$$

مثال ۸۷: فرض کنید B و C دو پیامد ناسازگار باشند و $P(A|B) \leq P(A|C)$. ثابت کنید:

$$P(A|B) \leq P(A|(B \cup C)) \leq P(A|C)$$

مثال ۸۸: امیر و بابک عضو تیم ده نفره والیبال مدرسه اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال این که امیر بلندترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال این که امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

مثال ۸۹: علی و مازیار هر کدام به ترتیب، با احتمال های $0/3$ و $0/4$ برای دیدن یک مسابقه ورزشی به ورزشگاه می روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال $0/08$ به ورزشگاه می رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال ۹۰: خانم ها اکبری ، برنا و چمنی نسخه خوان های یک موسسه انتشاراتی اند که به ترتیب ۲۰ و ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه خوانی انجام می دهند . احتمال این که این سه نفر صفحه ای که به آن ها سپرده شده را بی غلط تصحیح کنند به ترتیب $0/90$ و $0/95$ و $0/99$ است. صفحه ای نسخه خوانی شده ، ولی هنوز غلط دارد. احتمال این که مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد، چقدر است؟

مثال ۹۱: در یک آزمون از دو کلاس A و B ، ۴۰ درصد دانش آموزان کلاس A و ۶۰ درصد دانش آموزان کلاس B قبول شده اند. اگر تعداد داوطلبین در کلاس A ، دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین قبول شدگان انتخاب شود ، تقریبا با کدام احتمال ، این فرد از کلاس A است؟

مثال ۹۲: فرض کنید از بین چهار کارت با شماره های ۱ تا ۴ کاردی را به تصادف انتخاب می کنیم و سپس سکه ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می کنیم . اگر ۲ بار رو بیاید ، احتمال این که شماره کارت خارج شده ۳ باشد ، چقدر است؟

مثال ۹۳: یک شرکت بیمه ، بیمه گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است. گروه (پرخطر) که در یک سال با احتمال $0/4$ تصادف می کنند و گروه (کم خطر) که احتمال تصادف کردن آن ها در یک سال $0/2$ است. می دانیم که ۳۰ درصد بیمه گزاران پرخطرند:

الف) احتمال این که یک بیمه گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد ، احتمال این که جز گروه پرخطر باشد چقدر است؟

تست ۱۴: در یک شرکت تولیدی، ۵۵ درصد از یک کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۵ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است، با کدام احتمال، این کالا، محصول دستگاه A است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

$$\frac{15}{26}(4)$$

$$\frac{7}{13}(3)$$

$$\frac{6}{13}(2)$$

$$\frac{11}{26}(1)$$

تمرین ۲۰: میزی دارای سه کتو است. در یکی از کتو ها یک مهره سفید و یک مهره زرد و در کتوی دیگر دو مهره سفید و در کتوی سوم دو مهره زرد می باشد. یکی از کتو ها را به تصادف باز می کنیم مهره ای از آن بر می داریم اگر این مهره سفید باشد احتمال این که مهره دیگر داخل این کتو زرد باشد چقدر است؟

تمرین ۲۱: سه صندوق سیب هر کدام شامل ۱۰۰ سیب داریم. سیب های صندوق اول سبز، سیب های صندوق دوم قرمز است، صندوق سوم شامل دو سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی را به تصادف انتخاب می کنیم فرض کنید دست در صندوق کنیم و سیبی را تصادفا در آوریم و ببینیم که سبز است احتمال این که همه سیب های صندوق سبز باشد چقدر است؟

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ۲۲: فرض کنید سه صندوق سیب از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ ها به ترتیب ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب ها لکه دارند یکی از صندوق ها را به تصادف انتخاب می کنیم و نمی دانیم که صندوق انتخابی متعلق به کدام باغ است سیبی را از آن صندوق خارج می کنیم و مشاهده می کنیم که لکه دار است در این صورت احتمال این که صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد چقدر است؟

تمرین ۲۳: در یک کارخانه شیر پاستوریزه وقتی خط تولید سالم است تنها ۲ درصد از پاکت ها کم تر از ۲۹۷ سی سی شیر دارد ولی وقتی یکی از قطعات اصلی خط تولید دچار عیب می شود این مقدار به ۱۰ درصد افزایش می یابد، تجربه نشان داده است که احتمال خراب شدن خط تولید که تقریباً همیشه ناشی از معیوب شدن آن قطعه است پس از یک ماه ۵ درصد است. ماه گذشته آخرین باری بوده است که مسئول فنی خط تولید را به طور کامل سرویس کرده است. مسئول کنترل کیفیت کارخانه به تصادف یک پاکت شیر را مورد بررسی قرار می دهد و مشاهده می کند که حاوی کم تر از ۲۹۷ سی سی شیر است در این صورت احتمال خراب بودن خط تولید چقدر است؟

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

پیشامد های مستقل و وابسته

دو پیشامد را مستقل گویند هرگاه وقوع یکی از آن ها در احتمال وقوع دیگری تاثیر نگذارد. به عبارت دیگر دو پیشامد را مستقل گویند هر گاه

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

نکته: اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

اگر برای دو پیشامد دلخواه A و B رابطه بالا برقرار نباشد، دو پیشامد را وابسته می نامند.

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

مثال ۹۴: دو تاس به رنگ های سیاه و سفید را روی میزی پرتاب می کنیم. پیشامدهای A و B را به صورت زیر معرفی می کنیم:

الف: پیشامد A: در تاس سفید عدد ۶ رو شده.

ب: پیشامد B: در تاس سیاه عدد ۶ رو شده.

پ: آیا A و B مستقل هستند؟

مثال ۹۵: اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه ای S باشند، آیا A و B می توانند مستقل باشند، برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

www.my-dars.ir

مثال ۹۶: اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل اند؟ چرا؟

مثال ۹۷: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشد، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل اند.

الف) A' و B

ب) A' و B'

مثال ۹۸: در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد عدد ۳ در تاس اول و B پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

مثال ۹۹: احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰ درصد احتمال قبولی ریحانه در این درس ۷۰ درصد است. احتمال این که حداقل یکی از آن‌ها در این درس قبول شود، را به دست آورید.

مثال ۱۰۰: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است، دو مهره به صورت پی در پی و بدون جایگزینی، بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهره اول و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد:

الف: احتمال این که هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟

ب: پیشامد های A و B مستقل اند یا وابسته؟

www.my-dars.ir

مثال ۱۰۱: در پرتاب دو تاس به طور پی در پی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اول باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

مثال ۱۰۲: از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ یک عضو انتخاب می کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

مثال ۱۰۳: احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار $0/6$ و روی بیمار دیگر $0/8$ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال این که:

(الف) روی هر دو بیمار موفقیت آمیز باشد.

(ب) روی هیچ کدام موفقیت آمیز نباشد.

(پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت آمیز باشد.

مثال ۱۰۴: یک سکه و دو تاس به طور همزمان پرتاب می شوند. احتمال این که سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

www.my-dars.ir

مثال ۱۰۵: در یک امتحان پنج گزینه ای، ۱۰ سوال مطرح شده است. اگر یک دانش آموز به تمام سوالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به دست آورید که:

(الف) به تمام سوال پاسخ داده باشد.

(ب) تنها به پنج سوال اول پاسخ صحیح داده باشد.

(پ) به نیمی از سوال ها پاسخ صحیح داده باشد.

مثال ۱۰۶: در یک جعبه که شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است. دو مهره به تصادف و با جای گذاری بیرون می آوریم. مطلوب است احتمال این که:

(الف) هر دو مهره قرمز باشند.

(ب) حداقل یک مهره آبی باشند.

(پ) هر دو مهره هم رنگ باشد.

مثال ۱۰۷: جعبه ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آن ها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که:

(الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

(ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

مثال ۱۰۸: احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، $\frac{9}{10}$ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال این که داروی ساخته روی همه افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

مثال ۱۰۹: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ و $P(A \cap B') = \frac{4}{10}$ ، حاصل $P(A \cup B')$ را به دست آورید.

مثال ۱۱۰: احتمال این که A در آزمون ورودی دانشگاه ها قبول شود برابر $\frac{3}{5}$ است و احتمال این که B در این آزمون قبول شود برابر $\frac{2}{3}$ است:

الف: احتمال این که هر دو در این آزمون قبول شوند چقدر است؟

ب: احتمال این که فقط B در این آزمون قبول شود چقدر است؟

پ: احتمال این که فقط یکی از این دو نفر در آزمون قبول شوند چقدر است؟

www.my-dars.ir

ت: احتمال این که هیچ یک در آزمون قبول نشوند چقدر است؟

مثال ۱۱۱: در کیسه ای ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی است. به تصادف متوالیا با جایگذاری مهره ای از کیسه خارج می کنیم. احتمال این که در چهار بار خروج مهره از کیسه فقط یک مهره قرمز وجود داشته باشد؟

مثال ۱۱۲: سکه ای را آن قدر پرتاب می کنیم تا برای چهارمین بار پشت ظاهر شود. احتمال این که در نهمین پرتاب به این هدف برسیم.

مثال ۱۱۳: شخصی آن قدر تیر اندازی می کند تا تیرش به هدف بخورد، اگر بدانیم وی به احتمال ۷۰ درصد تیرش به هدف می خورد مطلوبست احتمال این که حداقل سه شلیک انجام گیرد تا تیر به هدف بخورد؟

تست ۱۵: در دو پیشامد مستقل A و B اگر $P(A \cap B) = ۰/۱$ و $P(A \cup B) = ۰/۶$ و با فرض

$P(B') > P(B)$ احتمال وقوع پیشامد B کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۹)

$$\frac{۲۵}{۱۰۰} (۴)$$

$$\frac{۲}{۱۰} (۳)$$

$$\frac{۳}{۱۰} (۲)$$

$$\frac{۴}{۱۰} (۱)$$

تست ۱۶: در دو پیشامد مستقل A و B اگر $P(A \cap B) = 0/6$ و $P(A \cap B') = 0/2$ باشد، آن گاه $P(A \cup B')$ کدام است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۸)

$0/9(4)$

$0/85(3)$

$0/75(2)$

$0/7(1)$

تست ۱۷: دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه (رو) یا تاس ۶ ظاهر شود؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۶)

$\frac{7}{12}(4)$

$\frac{5}{12}(3)$

$\frac{5}{8}(2)$

$\frac{3}{8}(1)$

تست ۱۸: یک تاس را آن قدر پرتاب می کنیم تا برای اولین بار عدد مضرب ۳ ظاهر شود. با کدام احتمال حداکثر در پرتاب سوم این نتیجه حاصل می شود؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۵)

$\frac{19}{27}(4)$

$\frac{16}{27}(3)$

$\frac{5}{9}(2)$

$\frac{10}{27}(1)$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir