

فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات

بخش اول:

گزاره و ارزش آن

گزاره نما

ترکیب گزاره ها

سورها

بخش دوم:

مجموعه و زیرمجموعه ها

افراز یک مجموعه

اثبات به روش عضوگیری

چپر مجموعه ها

www.my-dars.ir

حاصل ضرب دکارتی

آشنایی با منطق ریاضی

منطق در لغت به معنای "آن چه به سخن درآمده" است و عمدتاً آن را به معنای بررسی استدلال‌ها (دلیل آوردن) تعبیر می‌کنند.

هدف ما در این درس کاربرد علم منطق در ریاضیات است که به آن منطق ریاضی می‌گوییم. منطق ریاضی به دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. منطق ریاضی به کمک قوانین خاص خود، روش درست استدلال کردن در ریاضی را به ما می‌آموزد.

استدلال

استدلال ساده زیر را در نظر بگیرید:

اگر فروش خودرو بیشتر شود، ترافیک بیشتر می‌شود.

امسال فروش خودرو بیشتر شد.

نتیجه: امسال ترافیک بیشتر می‌شود.

این استدلال از سه جمله خبری تشکیل شده است که به دو جمله اول مفروضات (مقدمه‌های) استدلال و به جمله خبری سوم نتیجه استدلال می‌گویند.

گزاره

هر جمله خبری که سلیقه و عواطف در آن دخیل نباشد را گزاره می‌گوییم، به عبارت دیگر جملات امری، پرسشی و عاطفی گزاره نیستند.

✓ گزاره‌ها را معمولاً با یکی از حروف لاتین مثل p, q, r, \dots نمایش می‌دهیم.

✓ هر گزاره دارای یک ارزش درستی یا نادرستی است که ارزش درستی را با "د" یا "T" و ارزش نادرستی را با "ن"

یا "F" نشان می‌دهیم، ارزش گزاره ممکن است در حال یا در آینده معلوم باشد.

جملات خبری ممکن است درست یا نادرست باشد، مثلاً جمله "۳ عددی فرد است" دارای ارزش درست است و جمله "۴ عددی اول است" دارای ارزش نادرست است. بعضی از جملات ممکن است ارزشی نامعلوم داشته باشند مثلاً جمله "عدد a زوج است" دارای ارزش نامعلوم است چون دقیقاً نمی‌دانیم a چه عددی (زوج یا فرد) است.

مثال ۱: کدام یک از جملات زیر گزاره می باشند؟ و ارزش هر یک از گزاره ها را مشخص کنید

الف: به چه غذای خوشمزه ای!

ب: درس ریاضی آسان است.

پ: پنجره را ببندید.

ت: محصولات ایرانی از محصولات آمریکایی بهتر اند.

ث: فردا هوا بارانی است.

ج: تخته کلاس سفید است.

چ: آیا ۲ عددی اول است؟

$$\text{ح: } \left(\frac{2}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

خ: مجموع دو عدد $1 + \sqrt{5}$ و $1 - \sqrt{5}$ عددی گویا است.

د: با فرض $n \in \mathbb{N}$ ، عدد $(-2)^n$ عددی مثبت است. ($n = 1, 2, 3, \dots$)

ذ: دهمین رقم عدد π برابر ۸ است.

گر کسی از تو بپرسد ره دانستن پی پاسخی ده که هنرمند تو را آموزد

خرد و دانش و آگاهی دانشمندان ره سرمنزله مقصود بما آموزد

ر: هر عدد فرد بزرگ تر از ۵ را می توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.

www.my-dars.ir

حدهس گلدباخ: هر عدد صحیح زوج بزرگ تر از ۲ را می توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

مثال ۲: از بین جمله های زیر گزاره ها را مشخص کنید و ارزش آن ها را تعیین کنید.

الف: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

ب: $2^4 - 3 \in \mathbb{Z}$

پ: به امید دیدار دو باره!

ت: حاصل جمع دو عدد اول نمی تواند عددی اول باشد.

ث: کتاب را با دقت بخوانید.

ج: $3^{10} + 4^{1000} \in \mathbb{N}$

جدول ارزش گذاری برای سه گزاره p و q و r را در زیر بررسی می کنیم.

یک گزاره
P
T
F
جدول ۲ حالت دارد زیرا 2^1

دو گزاره	
P	Q
T	T
T	F
F	T
F	F
جدول ۴ حالت دارد زیرا $2^2 = 4$	

سه گزاره		
P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F
جدول ۸ حالت دارد زیرا $2^3 = 8$		

نتیجه: اگر n تا گزاره دلخواه داشته باشیم، جدول ارزش گذاری آن ها دارای 2^n حالت (ردیف) خواهد بود.

مثال ۳: جدول ارزش گذاری مربوط به ۵ گزاره چند حالت دارد؟

مثال ۴: اگر جدول ارزشی تعدادی گزاره دارای ۱۰۲۴ سطر باشد، تعداد گزاره ها چقدر است؟

مثال ۵: جدول ارزش گذاری مربوط به تعدادی گزاره دارای ۲۵۶ ردیف است. تعداد گزاره ها چند تاست؟

مثال ۶: از جملات زیر کدامیک گزاره است، ارزش گزاره ها را مشخص کنید.

(الف) خیام پزشک ایرانی است. (ب) به امید کامیابی شما

(پ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. (ت) $\{1\} \in \{1, 2, 3, 4\}$

(ث) $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ (ج) تخته سیاه را پاک کن.

(چ) چه باران شدیدی می آید. (ح) افلاطون فیلسوف یونانی است.

(خ) عدد $8 + 5^9$ عددی اول است. (د) آمار مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

(ذ) $\emptyset \notin \mathbb{R}$ (ر) $3 + 5 > 6$

مثال ۷: در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره های حاصل دارای ارزش درست باشند.

(الف) $-7 \times \dots = -7$ (ب) $5 + \dots \notin \mathbb{Z}$ (پ) $7(\dots - 3) = 35$

(ت) $\{1\} \dots 1$ (ث) $\dots \times \sqrt{2} = 0$ (ج) $5 \times 3 \dots \frac{10 \times 9}{3}$

(چ) $5(\dots - 3) = 20$ (ح) $\frac{8 \times \dots}{4} \in \{2, \frac{1}{3}\}$

گزاره نما

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای گذاری مقادیر به جای متغیرها تبدیل به گزاره می شود، گزاره نما می نامیم.

به عنوان مثال عبارت (a عددی زوج است). یک گزاره ناماست چراکه داری متغیر a است که اگر هر عدد صحیحی

به جای a قرار دهیم به یک گزاره تبدیل می شود که ارزش آن ممکن است درست یا نادرست باشد.

نکته: گزاره و گزاره نما هر دو جمله هایی خبری هستند که ارزش گزاره را می توان مشخص کرد ولی ارزش گزاره نما را

نمی توانیم مشخص کنیم مگر آن که با قرار دادن مقادیر به جای متغیرها، ارزش گزاره حاصل را بررسی کنیم.

به عنوان مثال ۱: عبارت ($x \geq 0$) یک گزاره ناماست، چون ارزش آن را نمی توانیم تشخیص دهیم.

۲: عبارت (برای هر عدد حقیقی x داریم: $x < 0$) یک گزاره است زیرا می توانیم ارزش آن را مشخص کنیم، (که

ارزش آن نادرست است).

نکته: تمام جمله های ریاضی به صورت (برای هر X از مجموعه ای معین داریم) یا (X از مجموعه ای معین وجود دارد....) یا (برای برخی از مقادیر X از مجموعه معین داریم) همگی گزاره هستند.

مثال ۸: در هر یک از موارد زیر گزاره ها و گزاره نماها را مشخص کنید

الف: هر عدد زوج به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشته می شود.

ب: هر معادله درجه دوم حداکثر دو ریشه حقیقی دارد.

$$p: x^2 + 2x - 3 = 0$$

ت: در پرتاب تاس احتمال پیشامد A برابر $\frac{1}{6}$ است.

ث: هنوز مشخص نشده است که عدد $\pi\sqrt{2}$ گنگ است یا گویا.

ج: به ازای برخی از مقادیر حقیقی، \sqrt{x} تعریف می شود.

دامنه متغیر گزاره نما

در هر گزاره نما مجموعه مقادیری که می توان آن را به جای متغیر قرار داد تا گزاره نما تبدیل به گزاره شود، دامنه متغیر گزاره نما می گوئیم و آن را با D نمایش می دهیم.

به عنوان مثال در گزاره نما (مربع عدد n ، دو برابر آن عدد است.) چون n یک عدد است پس دامنه گزاره نما مجموعه اعداد حقیقی است.

مجموعه جواب گزاره نما

مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن ها، گزاره نما تبدیل به گزاره ای با ارزش درست می شود، مجموعه جواب گزاره نما می گوئیم.

در مثال فوق: گزاره به ازای دو عدد حقیقی $0, 2$ ، $n = 0$ درست است. اگر مجموعه جواب گزاره نما را با S نشان دهیم، آن گاه $S = \{0, 2\}$. پس S زیر مجموعه ای از D است که به ازای اعضای آن گزاره درست است.

مثال ۹: دامنه و مجموعه جواب هر یک از گزاره نماهای زیر را مشخص کنید.

N عددی زوج است. :الف

X مضرب ۵ است. ب:

$$\text{پ: } 5x^2 + 7x - 12 = 0$$

مثال ۱۰: دامنه متغیر هر یک از گزاره‌های زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.
الف) X مربع کامل است.

$$\text{ب) } \frac{2x+1}{3} \leq -1$$

$$\text{پ) } \{n(n+1) = 0 \mid n \in W\}$$

ت) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

مثال ۱۱: دامنه و مجموعه جواب هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

$$۱: \frac{1}{x-1} < 1$$

$$۲: \sqrt{x} = ۸$$

$$۳: \{2k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

www.my-dars.ir

۴: X عددی مضرب ۳ به اضافه یک است. (3X + 1)

مربع عدد حقیقی n با قرینه آن برابر است: ۵:

$$۶: ۲^n \leq n!$$

در پرتاب تاس احتمال پیشامد A برابر $\frac{1}{۳}$ است. ۷:

حاصل ضرب دو عدد برابر ۱۲ است: ۸:

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی برای ساخت گزاره‌های مرکب، کافی است دو یا چند گزاره ساده را با رابط‌های منطقی ترکیب کنیم.

پنج نوع رابط وجود دارد که آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱: رابط ناقص با نماد " \sim ": رابط \sim گزاره p را نقیض می‌کند.

۲: رابط فاصل با نماد " \vee ": p و q دو گزاره هستند. گزاره مرکب $p \vee q$ را ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم.

گزاره $p \vee q$ به صورت (p یا q) خوانده می‌شود.

۳: رابط عاطف یا نماد " \wedge ": p و q دو گزاره هستند. گزاره مرکب $p \wedge q$ را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم.

گزاره $p \wedge q$ به صورت (p و q) خوانده می‌شود.

۴: رابط شرط با نماد " \Rightarrow ": p و q دو گزاره هستند. گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم.

گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت‌های «اگر p آن‌گاه q »، « p شرط کافی برای q » (یعنی p برای رسیدن به q کفایت می‌کند)، « q شرط لازم برای p » (یعنی اگر q نباشد p هم نیست) خوانده می‌شود.

در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، p را مقدم و q را تالی می‌نامیم.

۵: رابط دو شرطی با نماد " \Leftrightarrow ": p و q دو گزاره هستند. گزاره مرکب $p \Leftrightarrow q$ را ترکیب دو شرطی دو گزاره می‌گوییم.

گزاره $p \Leftrightarrow q$ به صورت های « اگر p آن‌گاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q »، « p اگر و تنها اگر q » خوانده می‌شود.

چون هر گزاره مرکب از ترکیب چند گزاره ساده تشکیل شده است بنابراین خودش هم یک گزاره است. مثلاً « عدد ۲ زوج است و عدد ۱۵ مضرب ۳ است» یک گزاره است.

ارزش گزاره های مرکب به ارزش گزاره های ساده تشکیل دهنده آن‌ها و رابط های منطقی به کار رفته بین آن‌ها بستگی دارد.

۱- نقیض یک گزاره

از آن جایی که هر جمله خبری یک فعل دارد، برای یافتن نقیض یک گزاره کافی است فعل گزاره را منفی کنیم در این صورت اگر گزاره p درست (نادرست) باشد، گزاره نقیض p نادرست (درست) است.

نقیض گزاره p را به صورت $\sim p$ نوشته و آن را به صورت "نقیض p " می‌خوانیم.

✓ به جای روش بالا می‌توانیم در ابتدای گزاره عبارت "چنین نیست که" اضافه کنیم تا گزاره نقیض شود.

مثال ۱۲: نقیض گزاره "۳ عددی زوج است" را بنویسید.

جواب: ۳ عددی زوج نیست. یا چنین نیست که ۳ عددی زوج باشد.

تست ۱: کدام گزاره زیر، نقیض گزاره "X عددی مثبت است." نمی‌باشد؟

(۱) X عددی مثبت نیست. (۲) چنین نیست که X عددی مثبت باشد. (۳) X عددی منفی است. (۴) $x \leq 0$

نکته:

مثبت	$x > 0$
منفی	$x < 0$
نامنفی	$x \geq 0$
نامثبت	$x \leq 0$

www.my-dars.ir

✓ جدول ارزش گذاری برای نقیض گزاره دلخواه p که تمام حالت های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می گیرد، به صورت زیر است:

نقیض گزاره	
P	$\sim p$
د	ن
ن	د

نقیض گزاره : ← ۱- فعل را منفی کنیم.

← ۲- چنین نیست که در ابتدای جمله بیاید.

برای مثال : ارزش گزاره زیر را مشخص کنید.
اگر $x \in \mathbb{R}$ ، $\sim [(x \leq 2) \vee (x \leq 3)]$.

گزاره های هم ارز

دو گزاره را که جدول ارزش یکسانی داشته باشند یعنی هر دو گزاره درست یا هر دو گزاره نادرست باشند را دو گزاره هم ارز می نامند، دو گزاره هم ارز p و q را به صورت $p \equiv q$ نمایش می دهند.

مثال ۱۳: جدول ارزش گذاری $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت با ارزش گزاره p مقایسه کنید . چه نتیجه ای می گیرید؟
حل:

نقیض نقیض گزاره		
P	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

نتیجه: دو گزاره $\sim(\sim p)$ و p در هر حالت دارای ارزش یکسانی هستند، بنابر این $\sim(\sim p) \equiv p$.

مثال ۱۴: گزاره های زیر را دو بار نقیض کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

الف: π عددی گنگ است .

ب: $\frac{2}{5} < \frac{5}{8}$

تست ۲: گزاره $(\sim(\sim(2 \notin \mathbb{Z})) \sim$ با کدام گزاره هم ارز است؟

(۱) $4^2 \geq 2^4$

(۲) مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت است.

(۳) برد تابع $f(x) = 4$ کل اعداد حقیقی است. (دامنه را \mathbb{R} فرض می کنیم.)

(۴) طول راس سهمی $y = -x^2 - 4x + 3$ برابر $x = -2$ است.

حل:

تست ۳: ارزش کدام گزاره درست است؟

(۴) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(۳) $(\frac{1}{2})^3 \leq (\frac{1}{2})^5$

(۲) $3^{10} + 4^{1000} \in \mathbb{N}$

(۱) $\frac{-3 \times 6}{2} \in \{1, 9\}$

۲- ترکیب فصلی دو گزاره

هر گاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $p \vee q$ را ترکیب فصلی دو گزاره می گوئیم. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با

توجه به جدول زیر مشخص می شود:

ترکیب فصلی		
P	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

گزاره «مداد زهرا آبی است یا قرمز» را در نظر بگیرید: اگر مداد زهرا آبی باشد و قرمز نباشد گزاره بیان شده درست است، اگر مداد زهرا قرمز باشد و آبی نباشد گزاره بیان شده درست است، اگر مداد زهرا هم آبی باشد و هم قرمز بازهم گزاره بیان شده درست است.

بنابراین

نکته: ترکیب فصلی دو گزاره زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

مثال ۱۵: ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید

الف: ۶ یک عدد اول است یا ۶ یک عدد مرکب است.

ب: $(-3 \in \mathbb{Z}) \vee \left(\frac{5}{1} \in \mathbb{N}\right)$.

پ: $(3^0 \neq 1) \vee (-10 > -20)$.

ت: $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است یا ۳ عددی مرکب است.

ث: ۲ فرد است یا $7 > 5$.

تست ۴: در گزاره فصلی « P یا 55830 عددی فرد است.» گزاره P کدام گزاره باشد تا ارزش کل گزاره درست باشد؟

۱) $f(x) = 2x$ تابعی ثابت است.

۲) مربع هر عدد حقیقی بزرگتر از آن عدد است.

۳) همه اعداد اول فردند بجز عدد ۲.

۴) رابطه $f = \{(1, 2), (0, 2), (1, 8)\}$ یک تابع است.

۳- ترکیب عطفی دو گزاره

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

P: ۵ عددی فرد است.

Q: ۲ عددی اول است.

گزاره مرکب « ۵ عددی فرد است و ۲ عددی اول است.» که از ترکیب دو گزاره ساده P و Q با رابط منطقی «و» تشکیل شده است، ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. هر گاه P و Q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «P و Q» را به صورت $p \wedge q$ می‌نویسند و آن را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم.

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره به صورت جدول زیر مشخص می‌شود:

ترکیب عطفی		
P	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

نکته: از جدول بالا به دست می‌آوریم که «ترکیب عطفی دو گزاره زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشند.»

مثال ۱۶: ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف: $\sqrt{2}$ عددی گویا و $\sqrt{7}$ عددی گنگ است.

ب: $\left(\frac{4}{16} = \frac{1}{4}\right) \wedge \left(\frac{5}{3} < \frac{7}{8}\right)$.

پ: X عددی زوج است و بغداد پایتخت عراق است.

ت: $(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}) \wedge [(-2)^4 \geq (-4)^2]$.

ث: معادله $\frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+1}{2x-4}$ دو ریشه قابل قبول دارد و نمودار خط $y = 1$ افقی است.

نکته: هر گاه در سوالی کلمه < ولی > ذکر شد منظور همان ترکیب عطفی دو گزاره یعنی < \wedge > است.

مثال ۱۷: با کامل کردن جدول ارزش گذاری زیر نشان دهید که گزاره $(p \vee q) \sim (\sim p \wedge \sim q)$ با گزاره $(\sim p \wedge \sim q)$ هم ارز است.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F				
T	F	F				
F	T					
F	F					

مثال ۱۸: با رسم جدول ارزش گذاری نشان دهید $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

مثال ۱۹: هر یک از موارد زیر را با رسم جدول ارزش گذاری ثابت کنید.

الف: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ب: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

پ: $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$\text{ت: } p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$

$$\text{ث: } p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

$$\text{ج: } p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$\text{چ: } p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

خواص اصلی ترکیب عطفی و فصلی

برای حل سریع تر تست ها می توانید به جای رسم جدول ارزش گذاری (که وقت گیر است) از فرمول های زیر استفاده کنید:

P و q را دو گزاره دلخواه و T را گزاره همیشه درست و F را گزاره همیشه نادرست در نظر بگیرید.

ردیف	نام فرمول	فرمول های ترکیب فصلی	فرمول های ترکیب عطفی
۱	خود نمایی	$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$
۲	جابه جایی	$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
۳	همانی	$p \vee T \equiv T \vee p \equiv T$ $p \vee F \equiv F \vee p \equiv p$	$p \wedge T \equiv T \wedge p \equiv p$ $p \wedge F \equiv F \wedge p \equiv F$
۴	متمم گیری	$p \vee \sim p \equiv T$	$p \wedge \sim p \equiv F$
۵	شرکت پذیری	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
۶	توزیع پذیری (پخشی)	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
۷	دمورگان	$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$	$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
۸	جذب	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
۹	شبه جذب	$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ $\sim p \vee (p \wedge q) \equiv \sim p \vee q$	$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ $\sim p \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge q$

نکته: نقیض ترکیب عطفی و فصلی دو گزاره با توجه به قوانین دمورگان به دست می آید.

۴- ترکیب شرطی دو گزاره

هر گاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. ارزش ترکیب شرطی دو گزاره با توجه به جدول زیر مشخص می‌شود:

ترکیب شرطی		
P	Q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

در گزاره شرطی به گزاره اول (p) مقدم و به گزاره دوم (q) تالی می‌گویند.

در دو ردیف آخر جدول ارزش گذاری فوق که مقدم نادرست است اما نتیجه درست حاصل شده می‌گوییم گزاره شرطی به انتفای مقدم، درست است.

گزاره «اگر شهرداری هزینه جشن ولادت را بپردازد آن گاه مسجد جامع اصفهان جشن برگزار می‌کند.» را در نظر بگیرید:
اگر شهرداری هزینه را بپردازد و مسجد جشن برگزار کند که کار درستی انجام شده (سطر اول)

اگر شهرداری هزینه بپردازد ولی مسجد جشن برگزار نکند کار اشتباهی صورت گرفته است (سطر دوم)

اگر شهرداری هزینه ندهد ولی مسجد جشن را برگزار کند کار درستی است چراکه با کمک بانی جشن برگزار شده (سطر سوم)

اگر شهرداری هزینه پرداخت نکند و مسجد هم جشن برگزار نکند درست است چراکه طبق شرط کار منطقی صورت گرفته است (سطر چهارم)

بنابراین

نکته: ترکیب شرطی دو گزاره زمانی نادرست است که از یک گزاره درست یک گزاره نادرست نتیجه شود.

www.mty-dars.ir

نکته: می توانیم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ را به صورت های زیر بیان کنیم:

۱: اگر p آن گاه q ۲- p نتیجه می دهد q را .

۳- p شرط کافی برای q است. ۴- q شرط لازم برای p است.

نکته (مهم): در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ گاهی اوقات p و q به هم وابسته هستند، یعنی نمی توانیم آن ها را به طور مستقل

ارزش یابی کنیم. در این گونه مواقع ارزش گزاره P را درست فرض می کنیم و سپس گزاره q را بررسی می کنیم تا درستی یا نادرستی آن معلوم شود. مثلا در گزاره $(x + 1)$ عددی اول است. $\Rightarrow x$ عددی اول است. فرض می کنیم x عددی اول باشد بنابراین $x+1$ نمی تواند عددی اول باشد.

نکته: در ترکیب شرطی به دوسطر آخر که مقدم نادرست است و نتیجه درست، می گوییم گزاره شرطی به انتفای مقدم درست است. (به عبارت دیگر در ترکیب شرطی اگر مقدم درست باشد بدون توجه به تالی ارزش گزاره شرطی درست خواهد بود.)

مثال ۲۰: ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف: اگر $۳^۲ = ۶$ ، آن گاه ۵ عددی اول است.

ب: اگر $-۲۰ \geq -۱۲$ آن گاه رابطه $f = \{(۱, ۶), (۶, ۱)\}$ تابع نیست.

پ: $(\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}) \Rightarrow (\emptyset \subseteq \mathbb{R})$

ت: اگر ۳ مربع کامل باشد آن گاه ۲ زوج است.

ث: اگر مجموعه $\{\emptyset\}$ تهی باشد آن گاه $\{۰, ۱, ۲, ۳\} \subseteq \mathbb{N}$.

مثال ۲۱: با رسم جدول ارزش گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) $(p \Rightarrow q) \wedge r$

www.my-dars.ir

ب) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$

پ) $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$

ت) $\sim p \Rightarrow (\sim q \wedge r)$

نکته مهم: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ همواره برقرار است. \square

بنابراین برای به دست آوردن نقیض گزاره شرطی با استفاده از هم ارزی فوق خواهیم داشت:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

یعنی گزاره اول به همان صورت و گزاره دوم را نقیض کرده و ترکیب عطفی می‌کنیم.

به عنوان مثال نقیض گزاره << اگر تو به کوه بروی آن گاه من هم با تو خواهیم آمد >> گزاره << تو به کوه می‌روی و من با تو نمی‌آیم >> خواهد بود.

✓ با توجه به اینکه هر گزاره با عکس و نقیض خود هم ارز است بنابراین برای اثبات گزاره‌هایی که به صورت گزاره شرطی هستند می‌توان عکس نقیض آن را ثابت کرد.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

www.my-dars.ir

مثال ۲۲: اگر n^2 زوج باشد، ثابت کنید n نیز زوج است.

مثال ۲۳: اگر n^2 فرد باشد، ثابت کنید n نیز فرد است.

مثال ۲۴: ثابت کنید (اگر n عددی طبیعی و $3n + 2$ عددی فرد باشد، آن گاه n نیز عددی فرد است).

مثال ۲۵: ثابت کنید (اگر n عددی طبیعی و $5n + 2$ عددی زوج باشد، آن گاه n عددی فرد است).

مثال ۲۶: ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۳ است.

مثال ۲۷: ثابت کنید که اگر n^2 مضرب ۵ باشد، n نیز مضرب ۵ است.

www.my-dars.ir

تست ۵: کدام یک از گزاره های زیر، هم ارز منطقی گزاره $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q)$ است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۹)

$p \Rightarrow q$ (۴)

$p \wedge q$ (۳)

q (۲)

P (۱)

تست ۶: گزاره $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (p \wedge r)$ با کدام گزاره زیر هم ارزش است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۸)

$r \Rightarrow (p \vee q)$ (۴)

$r \Rightarrow (p \wedge q)$ (۳)

$p \wedge (q \vee r)$ (۲)

$p \vee (q \wedge r)$ (۱)

تست ۷: هم ارز گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ ، کدام است؟ (کنکور انسانی خارج کشور ۹۹)

$\sim q$ (۴)

q (۳)

p (۲)

$\sim p$ (۱)

۵- ترکیب دوشروطی دو گزاره

هر گاه p و q دو گزاره باشند ، گزاره مرکب $p \Leftrightarrow q$ را ترکیب دو شرطی دو گزاره می گوئیم . ارزش ترکیب دوشروطی دو گزاره با توجه به جدول زیر مشخص می شود:

ترکیب دو شرطی		
P	Q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

بنابراین

نکته: ترکیب دو شرطی دو گزاره زمانی درست است که هر دو گزاره p و q همزمان با هم درست یا نادرست باشند.

نکته: می توانیم گزاره شرطی $p \Leftrightarrow q$ را به صورت های زیر بیان کنیم:

۱: p اگر و تنها اگر q

۲- اگر آن گاه q و برعکس.

۳- p شرط کافی برای q است.

۴- q شرط لازم برای p است.

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \begin{cases} \sim p \Leftrightarrow q \\ \text{یا} \\ p \Leftrightarrow \sim q \end{cases}$$

مثال ۲۸: ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید.

الف: اگر دو عدد فرد باشد، آن گاه حاصل ضرب آن ها زوج است و برعکس.

ب: $3 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ (مجموع دو عدد $2 - \sqrt{7}$ و $2 + \sqrt{7}$ گویا است.)

پ: (معادله $x^2 - 5x - 6 = 0$ ، ۲ ریشه متمایز دارد.) \Leftrightarrow (دامنه تابع $y = \frac{2x+5}{x^2+1}$ برابر \mathbb{R} است.)

ت: دو عدد مساوی هستند اگر و تنها اگر مربع هایشان هم با هم برابر باشد.

نکته: هم ارزی $p \Leftrightarrow q \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ برقرار است. (ثابت کنید.)

نکته: با استفاده از هم ارزی فوق برای گزاره $p \Leftrightarrow q$ خواهیم داشت:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

مثال ۲۹*: با استفاده از جدول ارزش گذاری نشان دهید که گزاره های زیر همواره درست است.

الف) $p \wedge q \Rightarrow p$

(قانون حذف عاطف)

ب) $p \Rightarrow p \vee q$

(قانون ادخال فاصل)

حواسمان باشد این دو قانون در اثبات بسیاری از سوالات استفاده می شود .

مثال ۳۰: با استفاده از قوانین ترکیب گزاره ها (بدون استفاده از جدول ارزش گذاری) حاصل هر یک از هم ارزی های زیر را به دست آورید.

الف) $(\sim p \vee T) \wedge (F \vee \sim p) \equiv$

ب) $q \vee \sim (p \vee \sim q) \equiv$

پ) $(\sim p \vee F) \wedge (p \vee q) \equiv$

ت) $\sim (p \vee \sim p) \wedge \sim (q \wedge \sim q) \equiv$

ث) $(p \Rightarrow q) \vee (\sim q \wedge p) \equiv$

ج) $p \wedge (\sim p \wedge q) \equiv F$

چ) $p \vee (\sim p \vee q) \equiv T$

مثال ۳۱: با استفاده از قوانین ترکیب گزاره ها (بدون استفاده از جدول ارزش گذاری) حاصل هر یک از هم ارزی های زیر را به دست آورید.

الف) $(\sim p \vee T) \wedge (F \vee \sim p) \equiv$

ب) $q \vee \sim (p \vee \sim q) \equiv$

$$\text{پ) } (\sim p \vee F) \wedge (p \vee q) \equiv$$

$$\text{ت) } \sim (p \vee \sim p) \wedge \sim (q \wedge \sim q) \equiv$$

$$(\sim p \vee q) \wedge p \equiv ?$$

تست ۸: اگر $p \wedge q \equiv F$ باشد، حاصل هم ارزی مقابل چیست؟

$$F(۴)$$

$$T(۳)$$

$$\sim q(۲)$$

$$p(۱)$$

تست ۹: اگر $(p \Rightarrow q) \equiv (q \Rightarrow p)$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$q \equiv T(۴)$$

$$p \equiv T(۳)$$

$$p \equiv \sim q(۲)$$

$$p \equiv q(۱)$$

تست ۱۰: هم ارزی منطقی گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ کدام است؟

$$p \vee q \Rightarrow r(۴)$$

$$p \wedge q \Rightarrow r(۳)$$

$$p \Rightarrow r(۲)$$

$$q \Rightarrow r(۱)$$

تست ۱۱: گزاره های (هوا آفتابی است: p) و (هوا ابری است: q) را در نظر بگیرید. کدام گزینه گزاره (هوا آفتابی نیست ولی ابری است) را به زبان نمادها نشان می دهد؟

$$\sim p \wedge \sim q(۴)$$

$$\sim p \wedge q(۳)$$

$$\sim p \vee \sim q(۲)$$

$$\sim p \vee q(۱)$$

www.my-dars.ir

تست ۱۲: مقدم گزاره > در مثلث متساوی الساقین ABC، زوایای مجاور به دو ساق برابرند (AB= AC) کدام است؟



(۱) مثلث ABC متساوی الساقین است.

(۲) $AB=AC$

(۳) شکلی مثلث باشد.

(۴) زوایای مجاور به دو ساق

تست ۱۳: کدام یک از گزاره های زیر، هم ارز منطقی گزاره $p \Leftrightarrow q$ است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۹)

(۱) $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

(۲) $(p \vee q) \vee \sim (p \wedge q)$

(۳) $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

(۴) $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$

تست ۱۴: گزاره $\sim (p \Rightarrow q)$ با کدام گزاره زیر هم ارزش است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۸)

(۱) $\sim p \vee q$ (۲) $p \vee \sim q$ (۳) $\sim p \wedge q$ (۴) $p \wedge \sim q$

تست ۱۵: گزاره $\sim p \Rightarrow ((p \Leftrightarrow q) \wedge p)$ در کدام حالت نادرست است؟ (کنکور سراسری انسانی ۹۹)

(۱) p و $q \sim$ درست. (۲) p و q درست. (۳) $\sim p$ و $q \sim$ درست. (۴) $\sim p$ و q درست.

نکته: جمع بندی نقیض ترکیب گزاره ها:

$$۱) \sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

هر دو گزاره نقض می شود و علامت مابین شان به یا تبدیل می شود.

$$۲) \sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

هر دو گزاره نقض می شود و علامت مابین شان به و تبدیل می شود.

$$۳) \sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

اولی را خودش را می نویسیم و دومی را نقض می کنیم بین آن ها و می آوریم. (حتما دقت شود در نقض کردن گزاره شرطی اگر و آن گاه حذف شود.)

$$۴) \sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \text{ یا } p \Leftrightarrow \sim q$$

برای نقض کردن گزاره دو شرطی دو روش وجود دارد:

روش اول: گزاره اول را نقض کرده و گزاره دوم را بدون تغییر می نویسیم و بین شان اگر و تنها اگر می گذاریم.

روش دوم: گزاره اول را بدون تغییر می نویسیم و گزاره دوم را نقض می کنیم و بین شان اگر و تنها اگر می گذاریم.

مثال ۳۲: نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

ب) اگر ۳ زوج باشد، آن گاه ۲ فرد است.

پ) خورشید به دور زمین می چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

$$ت) ۳ \leq ۴$$

$$ث) a \in \{b, c, d\}$$

ج) اگر a زوج باشد، آن گاه $a+1$ فرد است.

مثال ۳۳: ارزش گزاره های مرکب زیر را تعیین کنید.

$$الف) (۲ < ۳) \wedge (۴ + ۳ = ۱۰)$$

ب) اگر $a \in \{b\}$ آن گاه $a = b$ و برعکس.

پ) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن گاه ۴ مربع کامل است.

ت) در لوزی مفروض دو قطر باهم برابرند.

$$ث) -۳ < -۲ \Leftrightarrow ۲ > ۳$$

$$ج) (۵ > ۳) \vee ((-۱)^2 + ۱ = ۰)$$

مثال ۳۴: جدول ارزش های هر یک از گزاره های زیر را رسم کنید.

الف) $p \wedge \sim q$

ت) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

ب) $\sim p \wedge p$

پ) $\sim p \vee p$

ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$

ج) $(p \vee p) \wedge \sim p$

مثال ۳۵: با استفاده از جدول ارزش ها، درستی هر یک از گزاره های زیر را ثابت کنید.

الف) $p \Rightarrow p \equiv T$

ب) $p \vee F \equiv p$

پ) $p \wedge T \equiv T$

ت) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

ث) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$

مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \quad (\text{ج})$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r \quad (\text{ج})$$

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \quad (\text{ح})$$

مثال ۳۶: با استفاده از جدول ارزش گذاری هر یک از گزاره های زیر را ثابت کنید.

الف: $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

ب: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

پ) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p) \Leftrightarrow q \equiv T$

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سورها

سور کلمه ای عربی است به معنای حصار و دیواری دور شهر.

سورها در ریاضی به دو دسته تقسیم می شوند :

{ به ازای هر X می نویسیم : $\forall x$: سور عمومی
به ازای بعضی مقادیر x می نویسیم : $\exists x$: سور وجودی

این سور ها می توانند قبل از گزاره نماها قرار بگیرند و به این وسیله گزاره هایی با ارزش درست یا نادرست

ایجاد کنند. به عنوان مثال $x^2 \geq 0 : \forall x \in \mathbb{R}$.

گزاره های با سور عمومی و سور وجودی

گزاره هایی مانند (هر مستطیلی یک مربع است.) و (به ازای هر عدد حقیقی x ، x از قرینه خودش بزرگ تر است.) را گزاره هایی با سور عمومی می نامیم.

گزاره هایی مانند (وجود دارد عدد اولی که فرد نباشد.) و (مثلث متساوی الاضلاعی وجود دارد که دو ضلع آن برابر نیستند.) را گزاره هایی با سور وجودی می نامیم.

نکته: برای تعیین ارزش درستی یا نادرستی سورهای عمومی و وجودی به صورت زیر عمل می کنیم:

سور عمومی: اگر برای تمام اعداد دامنه درست باشد، ارزش گزاره درست است. (کافی است برای یک عدد نادرست باشد که همان مثال نقض است، در این صورت ارزش گزاره نادرست خواهد بود.)

سور وجودی: اگر به ازای یک عدد درست باشد، ارزش گزاره درست است و در غیر این صورت نادرست.

مثال ۳۷: گزاره های زیر را به زبان ریاضی تبدیل کرده و ارزش هر یک را مشخص کنید.

الف: هر عدد حقیقی بزرگ تر از صفر است.

ب: مربع برخی از اعداد حقیقی از خودش کوچک تر است.

پ: به ازای بعضی از اعداد طبیعی n ، n زوج و اول است.

ت: همه اعداد حسابی طبیعی هستند.

ث: نصف هر عدد صحیح از خود آن عدد کوچک تر است.

ج: مجذور هر عدد حقیقی منفی، منفی است.

چ: *هیچ کدام از اعداد گویا گنگ نیستند.

ح: از مربع هر عدد حقیقی x ، یک واحد کم کنیم برابر صفر است.

خ: مجذور بعضی از اعداد صحیح با خود آن عدد صحیح مساوی است.

د: مربع هر عدد حقیقی مثبت بزرگ تر از صفر است.

ذ: به ازای هر عدد حقیقی x حاصل ضرب تانژانت و کتانژانت x برابر ۱ است.

مثال ۳۸: گزاره های زیر را به زبان فارسی بنویسید و ارزش آن ها را تعیین کنید.

الف: $\forall x \in \mathbb{N} : (x)(x+1)(x+2) = 3k, (k \in \mathbb{N})$

ب: $\exists n \in \mathbb{N} : 2^n > 1000$

پ: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$

ت: $\forall x \in \mathbb{R} : x > -x$

ث: $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = 1$

ج: $\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y > |x - y|$

چ: $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 \notin \mathbb{Q}$

ح: $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x < y, x > y$

نقیض گزاره ها با سور عمومی و سور وجودی

www.my-dars.ir

برای نقض کردن گزاره های سوری

۱: سور وجودی را به سور عمومی و برعکس تبدیل می کنیم.

۲: فعل گزاره را نفی می کنیم. (گزاره را نقض می کنیم).

$$\sim (\forall x : p(x)) \equiv \exists x : \sim p(x)$$

نقیض سور وجودی

$$\sim (\exists x : p(x)) \equiv \forall x : \sim p(x)$$

مثال ۳۹: نقیض هر یک از گزاره های زیر را بنویسید و ارزش هر یک از گزاره های اولیه را مشخص کنید.

الف: $\exists x \in A : x = ۱$

ب: $\forall x \in \mathbb{R} : (x \in \mathbb{N}) \vee (x < ۰)$

پ: $\forall x \in \mathbb{R} : x > ۰ \Rightarrow x^2 > ۰$

ت: مربع هر عدد حقیقی مثبت است.

ث: وجود دارد عدد حقیقی ناصفر که معکوس آن مثبت است.

ج: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$

چ: $\exists x \in \mathbb{Z} : \left(\frac{x-1}{2} = ۰\right) \wedge (x^2 = ۱)$

ح: $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 2 = ۰$

خ: $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1$

د: $\forall n \in \mathbb{Z} : n(n+1) = 2k$

ذ: $\forall n \in \mathbb{N} : (n = 2k) \vee (n \in P)$

ط: هر مثلث متساوی الاضلاع مثلثی متساوی الساقین است.

www.my-dars.ir

مثال ۴۰: گزاره های زیر را با استفاده از \exists و \forall بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^3 = x$

ب) هر عدد طبیعی، زوج یا فرد است.

پ) همه اعداد اول فردند.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $1 - 2x > 5$.

ث) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم: $a^2 < 0$.

ج) به ازای همه مقادیر حقیقی x داریم: $x^2 \geq x$.

چ) به ازای همه مقادیر صحیح x داریم: $x(x+1) = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

ح) هر عدد زوج غیر اول است.

خ) هر عدد اول فرد است.

د) در فضای نمونه S ، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که: $P(A) > 1$.

ج) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

مثال ۴۱: هر گاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x \in A : x + 4 = 10$

ب) $\forall x \in A : x + 2 \leq 9$

پ) $\forall x \in A : x + 1 \geq 6$

ت) $\exists x \in A : x + 3 \leq 4$

مثال ۴۲: ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R} : \tan x \times \cot x = 1$

ب) $\exists x \in \mathbb{Z} : |x| - 1 < 0$

پ) $\exists x \in P : x = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

ت) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$

ث) $\exists x \in \mathbb{N} : 2x^2 + 3x + 1 = 0$

ج) $\exists x \in \mathbb{Z} : 2x^2 + 3x + 1 = 0$

چ) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

ح) $\exists y \in \mathbb{R} : y < 0 \wedge y^2 \leq 1$

خ) $\exists y \in \mathbb{R} : \frac{y-2}{5} = 0$

د) $\forall x \in (-\infty, 0) : x - \frac{1}{x} \leq -2$

ذ) $\forall n \in \mathbb{N} : (2^n + 1) \in P$

ر) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$

مثال ۴۳: نقیض گزاره های زیر را مشخص کنید. ارزش نقیض کدام گزاره نادرست است؟
الف: هر مثلث، مربع است.

ب: اگر چهارضلعی مربع باشد، لوزی هم هست.

پ: $5 \geq \sqrt{2} + 3$.

ت: نصف هر عدد صحیح از خود آن عدد کوچک تر است.

تست ۱۶: گزاره سوری $p(x, y) : \forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}$ با کدام گزاره نمای $P(x, y)$ دارای ارزش درست است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۸)

$xy=6$ (۴)

$x+y=6$ (۳)

$x-y=6$ (۲)

$y-x=6$ (۱)

تست ۱۷: کدام گزاره سوری زیر، دارای ارزش درست است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۸)

$\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} = x$ (۲)

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 > 2x$ (۱)

$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$ (۴)

$\exists x \in \mathbb{R} : \left| x + \frac{1}{x} \right| < 2$ (۳)

تست ۱۸: فرض کنید p گزاره ' $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$ ' و q گزاره ' $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$ ' کدام گزاره درست است؟

$p \wedge \sim q$ (۴)

$p \vee q$ (۳)

$p \wedge q$ (۲)

$p \Rightarrow q$ (۱)

تست ۱۹: کدام گزاره درست است؟

$\forall x \in \mathbb{R} : \tan x \cos x = \sin x$ (۲)

$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x}{x} = x + 1$ (۱)

$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x}{x^2+1} = x$ (۴)

$\forall x \in \mathbb{R} : [-x] = -[-x]$ (۳)

www.my-dars.ir

مجموعه

به دسته ای از اشیاء ، اعداد یا افراد کاملا مشخص و دو به دو متمایز گفته می شود که هر شیء نسبت به آن یکی از دو حالت زیر را داشته باشد :

۱- جزء آن باشد.

۲- جزء آن نباشد.

اعضای مجموعه

عنصری که یک مجموعه را تشکیل می دهد ، عضوهای مجموعه می نامیم.

اگر a عضوی متعلق به مجموعه A باشد آن را به صورت $a \in A$ و اگر b به مجموعه A متعلق نباشد آن را به صورت $b \notin A$ نشان می دهیم.

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

مثال ۴۴: چهار عدد طبیعی زوج متوالی یک رقمی را در نظر بگیرید :

$$2 \in A, \quad 7 \notin A$$

که در آن

نکته : مجموعه ها را با حروف بزرگ انگلیسی و اعضا را با حروف کوچک انگلیسی می نویسیم .

مجموعه تهی

مجموعه ای است که فاقد عضو است و آن را با $\{\}$ و یا \emptyset نشان می دهند.

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 1\}$$

مثال ۴۵ : کدام یک از گزینه های زیر درست نیست ؟

$$1 \in A \quad (۴)$$

$$\{1\} \in A \quad (۳)$$

$$\{\emptyset\} \in A \quad (۲)$$

$$\emptyset \in A \quad (۱)$$

مای درس

مجموعه مرجع یا جهانی

مجموعه ای است که مجموعه های مورد مطالعه در یک مسئله زیر مجموعه آن باشد . مجموعه مرجع را با M یا U نشان می دهند.

www.my-dars.ir

زیر مجموعه

مجموعه A را زیر مجموعه ، مجموعه B گویند هرگاه تمام عضو A در B باشد.

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \{\forall x \in A \Rightarrow x \in B\}$$

چنان چه عضوی در A وجود داشته باشد به طوری که آن عضو در مجموعه B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می نویسیم $A \not\subseteq B$.

نکته: تعداد زیر مجموعه های، یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$2^n = \text{تعداد زیر مجموعه ها}$$

مثال ۴۶: اگر تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ۵۱۲ باشد، مجموعه چند عضوی است؟

مثال ۴۷: تعداد زیر مجموعه های مجموعه $k + 4$ عضوی، ۱۲۰ واحد بیشتر از زیر مجموعه های مجموعه k عضوی است، k کدام است؟

زیر مجموعه ی محض (سره)

اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$ آن گاه A زیر مجموعه سره (محض) B نامیده می شود و آن را به صورت $A \subset B$ نشان می دهیم.

نکته: تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه برابر $2^n - 1$.

مثال ۴۸: تعداد زیر مجموعه های محض یک مجموعه $2k + 3$ عضوی، ۶۳ واحد از تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه $k + 4$ عضوی بیشتر است، k کدام است؟

مثال ۴۹: مجموعه های زیر را که شامل شکل های هندسی در صفحه هستند ، در نظر بگیرید:

$$A = \{x \mid x \text{ یک چهار ضلعی است.}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ یک مستطیل است.}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ یک لوزی است.}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ یک مربع است.}\}$$

کدامیک از روابط زیر درست است؟ (با ذکر دلیل)

$$A \subseteq B \text{ (پ) } \quad B \subseteq D \text{ (ب) } \quad D \subseteq C \text{ (الف)}$$

$$D \subseteq A \text{ (ت)}$$

مثال ۵۰: فرض کنید

$$E = \{3, 5\} \text{ و } D = \{3, 4, 5\} \text{ و } C = \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ و } B = \{2, 4, 6, 8\} \text{ و } A = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$$

در هر یک از حالت های زیر مشخص کنید : X می تواند کدامیک از این مجموعه ها باشد؟

$$\text{الف) } X \text{ و } B \text{ عضو مشترکی ندارند.} \quad \text{ب) } X \subseteq A \text{ ولی } X \not\subseteq C$$

$$\text{پ) } X \subseteq D \text{ ولی } X \not\subseteq B \quad \text{ت) } X \subseteq C \text{ ولی } X \not\subseteq A$$

مثال ۵۱: درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

$$\text{الف) } \emptyset = \{\emptyset\} \quad \text{ب) } \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$$

$$\text{پ) } \emptyset \notin \{\emptyset\} \quad \text{ت) } \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

مثال ۵۲: از گزاره های زیر کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$\text{الف) } \{3, 4\} \in \{3, 4, \{1, 0\}\}$$

$$\text{ب) } \emptyset \in \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\text{پ) } \{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2\}\}$$

$$\text{ت) } \{m, n\} \subseteq \{n, m\}$$

$$\text{ث) } x \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

$$\text{ج) } \{x\} \subseteq \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

$$\text{چ) } \{1, x, 2\} \subseteq \{1, 2, x\}$$

$$\text{ح) } \{a, b\} \subseteq \{b, a\}$$

$$\text{خ) } \{x\} \in \{x\}$$

مثال ۵۳: اگر $A = \{1, \{2\}\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

$$\{1\} \subseteq A \text{ (۴)}$$

$$\{2\} \subseteq A \text{ (۳)}$$

$$1 \subseteq A \text{ (۲)}$$

$$\{1\} \in A \text{ (۱)}$$

مثال ۵۴: اگر و عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود، مجموعه A چند زیر مجموعه دارد؟

مثال ۵۵: اگر سه عضو به مجموعه متناهی A اضافه کنیم تعداد زیر مجموعه های آن ۴۴۸ واحد اضافه می شود، مجموعه A چند عضوی است؟

مثال ۵۶: مجموعه متناهی A را در نظر بگیرید، اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیر مجموعه های آن ۴۸ واحد افزایش می یابد، مشخص کنید A چند عضوی است؟

مای درسی

گروه آموزشی عصر

نکته: دو مجموعه A و B زمانی با هم مساوی اند که دو شرط زیر را دارا باشند:

(۱) تعداد عضو های برابر داشته باشند.

(۲) عضو های هر دو مجموعه یکی باشند.

www.my-dars.ir

مثال ۵۷: اگر $A = \{2, +2y, 4\}$ و $B = \{4, 5, x - y\}$ و $A = B$ در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

مثال ۵۸: کدام یک از مجموعه های زیر با هم مساوی اند؟

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq 2y\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\}$$

$$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 + 2m = 3m^2\}$$

مثال ۵۹: مجموعه A، ۴ عضو بیشتر از مجموعه B و هم چنین ۱۲۰ زیرمجموعه بیش تر از مجموعه B دارد. مجموعه A چند زیر مجموعه دو عضوی دارد؟

مثال ۶۰: مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی چند زیر مجموعه ۴ عضوی دارد؟

مثال ۶۱: مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی چند زیر مجموعه فرد عضوی دارد؟

مجموعه توانی

هر گاه A یک مجموعه باشد، به مجموعه ای که شامل تمام زیر مجموعه های A باشد، مجموعه توانی A گویند که آن را با $P(A)$ نمایش می دهند. (به بیان ساده تر اگر تمام زیر مجموعه های یک مجموعه را در یک آکولاد قرار دهیم به آکولاد حاصل مجموعه توانی آن مجموعه می گویند.)

مثال ۶۲: برای مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ ، $P(A)$ را به دست آورید.

www.my-dars.ir

نکته: تعداد عضو های مجموعه توانی A برابر است با :

$$n(P(A)) = 2^{n(A)} = \text{تعداد عضوهای مجموعه توانی}$$

که $n(A)$ تعداد عضو های مجموعه A است .

$$n(PP\dots P(A)) = 2^{2^{\dots 2^{n(A)}}}$$

نکته : (K تا ۲)

مثال ۶۳: اگر مجموعه توانی A دارای ۲۵۶ زیر مجموعه باشد ، مجموعه A چند عضوی است ؟

مثال ۶۴: اگر مجموعه A سه عضوی باشد ، $PPP(A)$ چند عضوی است ؟

مثال ۶۵: از گزاره های زیر کدام یک درست و کدام یک نادرست است.

الف) $\emptyset = \{\emptyset\}$

ب) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

پ) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

ت) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

ث) $x \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$

ج) $\{x\} \subseteq \{\{x\}, \{x, y\}\}$

چ) $\{1, x, 2\} \subseteq \{1, 2, x\}$

ح) $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$

خ) $\{x\} \in \{x\}$

مثال ۶۶: از گزاره های زیر کدام یک درست و کدام یک نادرست است ؟

www.my-dars.ir

الف) $\{1, 5, \{3\}\} \in \{1, 5\}$ (ب) $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$

ج) $(a, a), (b, b) = (a, b)$ (د) $\{x\} \subseteq \{\{x\}, \{x, y\}\}$

افراز یک مجموعه

هرگاه مجموعه A را به زیر مجموعه های A_1, A_2, \dots, A_n و ... به قسمی تقسیم کنیم که :

اولا هیچ یک از زیر مجموعه هاتهی نباشد .

ثانیا دو به دو اشتراک نداشته باشند .

ثالثا از اجتماع آن ها مجموعه اولیه به دست آید در این صورت مجموعه A به مجموعه های A_1, A_2, \dots, A_n افراز شده

است .

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \quad A_i \neq \emptyset \\ \forall i, j \quad A_i \cap A_j = \emptyset \\ \bigcup_{i=1}^n A_i = A \end{array} \right.$$

در این صورت A_1, A_2, \dots, A_n را یک افراز A می نامند .

مثال ۶۷: مجموعه $\{a, b, c\}$ را افراز کنید.

تست ۲۰: کدام یک از اشکال زیر یک افراز برای مجموعه $A = \{1, 2, 5\}$ می باشد؟

$$\{1\}, \{2\} \quad (۱) \quad \{1\}, \{2, 5\}, \{\}$$

$$\{1\}, \{1, 5\} \quad (۴) \quad \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 5\} \quad (۳)$$

مثال ۶۸: فرض کنید: $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ کدام یک از حالت های زیر یک افراز برای X است؟

الف) $\{d, g\}$ و $\{b\}$ و $\{a, c, e\}$ ب) $\{b, e, f\}$ و $\{c, d\}$ و $\{a, e, g\}$

پ) $\{d, f\}$ و $\{c\}$ و $\{a, b, e, g\}$ ت) $\{a, b, c, d, e, f, g\}$

ث) $\{e\}$ و $\{f, g\}$ و $\{d\}$ و $\{b, c\}$ و $\{a\}$

نکته : تعداد افراز ۲ مجموعه ای یک مجموعه n عضوی از رابطه بازگشتی زیر محاسبه می شود :

$$s(n, r) = s(n-1, r-1) + r \cdot s(n-1, r)$$

باتوجه به این که می دانیم :

$$s(n, n) = 1, s(n, 1) = 1$$

مثال ۶۹: مطلوب است تعداد افراز ۳ عضوی از مجموعه $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ؟

مثال ۷۰: مجموع تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $(n+2)$ و یک مجموعه $2n$ عضوی برابر ۹۶ است . عدد طبیعی n را به دست آورید.

مثلت بل

مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال ۷۱: تمام افراز های یک مجموعه ۴ عضوی را بنویسید.

مثال ۷۲: یک مجموعه ۵ عضوی را به چند طریق می توان به دو زیر مجموعه افراز کرد؟

مثال ۷۳: مجموعه ۷ عضوی را به چند طریق می توان به سه زیر مجموعه تک عضوی و دو زیر مجموعه و عضوی افراز کرد؟

مثال ۷۴: یک مجموعه ۲۰ عضوی را به چند طریق می توان به سه زیر مجموعه ۵ و ۷ و ۸ عضوی افراز کرد؟

مثال ۷۵: یک مجموعه ۳۰ عضوی را به چند طریق می توان به ۶ زیر مجموعه که سه تایی آن ها ۴ عضوی، دوتایی آن ها

۵ عضوی و یکی ۸ عضوی افراز کرد؟

www.my-dars.ir

اثبات به روش عضوگیری

در این روش بایستی با استفاده از تعریف عضوگیری قضایا و قوانین را اثبات کنیم.

زیر مجموعه با استفاده از عضوگیری

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x \in A \wedge x \notin B)$$

برای اثبات $A \subseteq B$ با توجه به اینکه اعضای مجموعه A و B را نداریم کافی است عضوی دلخواه مانند x از A در نظر بگیریم سپس با استفاده از مفروضات مسئله نشان می دهیم که x در مجموعه B وجود دارد.

قضیه ۱: فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مجموعه مرجع U باشد به طوری که

$$A \subseteq B \quad \text{و} \quad B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C$$

اثبات:

متمم یک مجموعه

فرض کنید A مجموعه ای از مجموعه مرجع U باشد متمم مجموعه A برابر مجموعه اعضای U که متعلق به مجموعه A نباشد یعنی

$$A' = \{x \in U | x \notin A\}$$

قضیه ۲: فرض کنید A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند، اگر $A \subseteq B$ آن گاه $B' \subseteq A'$

اثبات:

قضیه ۳: برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید: $\emptyset \subseteq A$.

اثبات:

اعمال بین مجموعه ها به کمک عضوگیری

ویژگی ۱: اجتماع دو مجموعه A و B :

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \subseteq A \cup B$$

مثال ۷۶: برای مجموعه های A و B با مجموعه مرجع U ثابت کنید که

مثال ۷۷: فرض کنید A و B و C و D چهار مجموعه با مجموعه مرجع U باشند ثابت کنید

$$A \subseteq B \text{ و } C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$$

مثال ۷۸: فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مجموعه مرجع U باشند، ثابت کنید

$$A \subseteq C \text{ و } B \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$$

ویژگی ۲: اشتراک دو مجموعه A و B :

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

ویژگی ۳: تفاضل دو مجموعه A و B :

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

دو مجموعه مساوی :

فرض کنید A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند $A = B$ به طوری که :

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

مثال ۷۹: اگر دو مجموعه A و B دو مجموعه با مجموعه مرجع U باشند ثابت کنید:

$$A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$$

مای دررس

نکته: برای اثبات به روش عضوگیری ابتدا باید تعریف زیر خوب به خاطر داشته باشیم و طبق تعریف ها به اثبات می پردازیم:

$$۱) A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$۲) A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x \in A \wedge x \notin B)$$

$$۳) A' = \{x \in U | x \notin A\}$$

$$۴) A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$۵) A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$۶) A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

$$۷) A \wedge B \Rightarrow A \quad \text{حذف عاطف}$$

$$۸) A \Rightarrow A \vee B \quad \text{ادخال فاصل}$$

$$۹) A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

مثال ۸۰: ثابت کنید برای مجموعه ای A و B با مجموعه مرجع U داریم: $A - B \subseteq A$.

مثال ۸۱: فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آن گاه:

$$A \cap C \subseteq B \cup C \quad \text{الف)} \quad A \cup C \subseteq B \cup C \quad \text{ب)}$$

مای دررس

مثال ۸۲: مجموعه های A و B و C و D با مجموعه U را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن گاه:

$$A \cap C \subseteq B \cap D \quad \text{الف)} \quad A \cup C \subseteq B \cup D \quad \text{ب)}$$

www.my-dars.ir

مثال ۸۳: الف) فرض کنید: $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید: $A = \emptyset$. ب) فرض کنید: $U \subseteq A$ ثابت کنید: $A = U$.

مثال ۸۴: هر گاه A و B دو مجموعه باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید:

الف) $B - A = B$ ب) $B \subseteq A'$

مثال ۸۵: با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابجایی، شرکت پذیری و توزیع پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره ها هریک از تساوی های زیر را ثابت کنید. (با استفاده از روش عضوگیری)

الف) $A \cap B = B \cap A$

ب) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

پ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

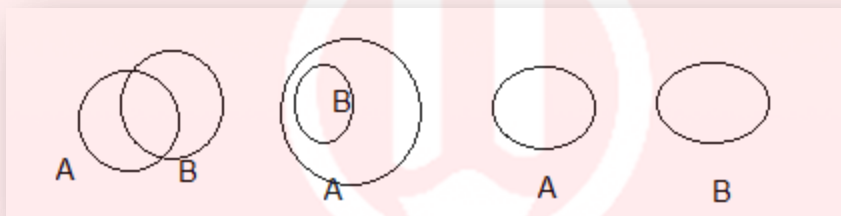
جبر مجموعه ها

۱- اجتماع دو مجموعه :

اگر A و B دو مجموعه باشد، اجتماع A و B مجموعه ای است که به مجموعه A یا به مجموعه B تعلق داشته باشد. به عبارت دیگر $A \cup B$ یعنی تمام عضوهای A و B را در نظر بگیریم و فقط مشترک ها را یک بار بنویسیم. به زبان ریاضی یعنی :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

مثال ۸۶: در شکل های زیر $A \cup B$ را با هاشور مشخص کنید.



مثال ۸۷: اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 < 5\}$ و $B = \{2^x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 4\}$ باشد، $A \cup B$ را بیابید.

مثال ۸۹: اجتماع دو مجموعه $B = \{a, \emptyset\}$ و $A = \{\emptyset, \{a\}, a\}$ چند عضو دارد؟

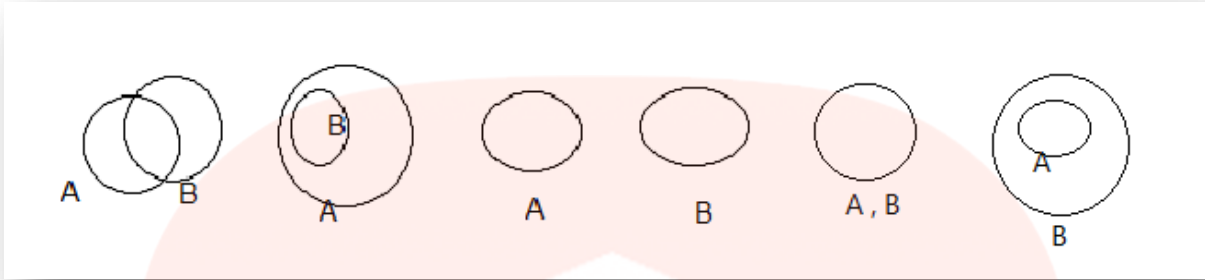
گروه آموزشی عصر

۲- اشتراک دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشد $A \cap B$ مجموعه ای است که عضوهای آن به مجموعه A تعلق دارد. و به مجموعه B تعلق دارد و یا به عبارت دیگر عضوهای مشترک بین دو مجموعه A و B را $A \cap B$ گویند.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

مثال ۹۰: در شکل زیر $A \cap B$ را هاشور بزنید.



مثال ۹۱: اگر $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x^2 < 50\}$ و $B = \{2^x | x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 4\}$ باشد، $A \cap B$ را به دست آورید.

اجتماع و اشتراک تعمیم یافته

در جبر مجموعه ها اجتماع و اشتراک بین چندین مجموعه به صورت زیر تعریف می شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{i=1}^n A_i \\ \bigcap_{i=1}^n A_i \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{اجتماع تعمیم یافته} \\ \text{اشتراک تعمیم یافته} \end{array}$$

قضایا

قضیه ۱: احکام زیر معادل اند: www.my-dars.ir

$$A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

قضیه ۲:

$$A \cup A = A \quad -۱$$

$$A \cup \emptyset = A \quad -۲$$

$$A \cup B = B \cup A \quad -۳ \text{ (جابه جایی اجتماع)}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad -۴ \text{ (شرکت پذیری اجتماع)}$$

قضیه ۳:

$$A \cap A = A \quad -۱$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad -۲$$

$$A \cap B = B \cap A \quad -۳ \text{ (جابه جایی اشتراک)}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad -۴ \text{ (شرکت پذیری اشتراک)}$$

قضیه ۴: خاصیت پخشی یا توزیع پذیری

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad -۱$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad -۲$$

قوانین جذب:

$$A \cup (A \cap B) = A \quad -۱$$

$$A \cap (A \cup B) = A \quad -۲$$

قوانین شبه جذب

$$\begin{cases} A \cup (A' \cap B) = A \cup B \\ A' \cup (A \cap B) = A' \cup B \end{cases}$$

۳-تفاضل دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، $A - B$ مجموعه ای است که عضوهای آن به A تعلق دارد یا به B تعلق ندارد.

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

www.my-dars.ir

تست ۲۱: اگر $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x = 3x\}$ ، آن گاه تعداد زیر مجموعه های سره و غیر تهی مجموعه $A - B$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱۴(۴)

۶(۳)

۴(۲)

۲(۱)

۴- متمم مجموعه

اگر M مجموعه مرجع و A یک مجموعه باشد، A' متمم A مجموعه ای است که تشکیل شده از عضوهای M که به A تعلق ندارد.

$$A' = M - A$$

$$\hat{A} = \{x | x \in M, x \notin A\}$$

مثال ۹۲: اگر $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ و $A = \{2, 5, 7\}$ باشد؛ A' کدام است؟

قانون دوگان

اگر A, B دو مجموعه از مجموعه مرجع باشند، و رابطه زیر برقرار است:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

تست ۲۲: اگر $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ و $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}, \{2\}\}$ باشند تعداد زیرمجموعه های $A \cap B'$ کدام است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۸)

۳۲(۴)

۱۶(۳)

۸(۲)

۴(۱)

www.my-dars.ir

تست ۲۳: مجموعه A دارای ۵۱۲ زیر مجموعه است. مجموعه $A \cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیر مجموعه های $(B \cup A)'$ کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۸)

۶۴(۴)

۴۸(۳)

۳۲(۲)

۱۶(۱)

تست ۲۴: چند زیر مجموعه از مجموعه $\{a, b, \{b, a\}, \{a, b\}\}$ عضو $\{a, b\}$ را ندارد؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۱)

۱۲(۴)

۸(۳)

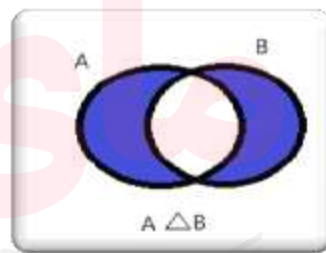
۶(۲)

۴(۱)

۵-تفاضل متقارن

اگر A و B دو مجموعه باشند تفاضل متقارن A, B که با نماد $A \Delta B$ نشان می دهند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



www.my-dars.ir

جمع بندی جبر مجموعه:

$$1- A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

$$2- \begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$$

$$3- \begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{cases}$$

$$4- \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

$$5- \begin{cases} A \cap \emptyset = \emptyset \\ A \cup \emptyset = A \\ A \cap M = A \end{cases}$$

$$6- (A) = M - A$$

$$(A')' = A$$

$$7- \begin{cases} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = M \end{cases}$$

$$8- \begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$$

$$9- \begin{cases} A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \\ A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \end{cases}$$

$$10- \begin{cases} A - B = A \cap B' \\ A - B = A - A \cap B \end{cases}$$

$$11- \begin{cases} A \cup (B \cap A) = A \\ A \cap (B \cup A) = A \\ A' \cap (B \cup A') = A' \\ A' \cup (B \cap A') = A' \end{cases}$$

$$12- \begin{cases} A \cup (A' \cap B) = A \cup B \\ A' \cup (A \cap B) = A' \cup B \\ A \cap (A' \cup B) = A \cap B \\ A' \cap (A \cup B) = A' \cap B \end{cases}$$

مثال ۹۳: با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید :

$$\text{الف) } A \cap (B - C) = (A \cap B) - (B \cap C)$$

$$\text{ب) } [A \cap (A' \cup B)] \cup [B \cap (A' \cup B')] = B$$

$$\text{پ) } (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$

$$\text{ت) } (A \cup B) = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

$$\text{ث) } (A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$$

$$\text{ج) } (A - C) - (B - C) = (A - B) - C$$

$$\text{چ) } (B - A) \cup (A \cap B) = B$$

$$\text{ح) } (A \cup B) - A = B - A$$

$$\text{خ) } B \subset A \Rightarrow A' \subset B'$$

مای دارس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$د) (A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$$

$$ذ) A - B = B' - A'$$

$$ر) (C \cap A \cap B) \cup (A - C) \cup (A - B) = A$$

$$ز) (A - B) \cap (B - A) = \emptyset$$

$$ژ) A - B = A - (A \cap B)$$

$$س) A - (A - B) = A \cap B$$

$$ش) (A - B) \cup (A \cup B)' = B'$$

$$ص) A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

مثال ۹۴: درستی هر یک از تساوی های زیر را ثابت کنید:

$$الف) (A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$$

$$\text{ب) } (A' \cap B') \cap A = \emptyset$$

$$\text{پ) } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$$

$$\text{ت) } A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$$

مثال ۹۵: هر یک از عبارت های زیر را ساده کنید:

$$\text{الف) } (A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$$

$$\text{ب) } (A \cup B) - B$$

$$\text{پ) } [(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$$

مای درسی
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مثال ۹۶: درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید:

$$\text{الف) } (A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$$

$$\text{ب) } (A - B) \cup (A \cap B) = A$$

$$\text{پ) } (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$$

$$\text{ت) } (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\text{ث) } (A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$$

$$\text{ج) } [(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$$

مای دارس

تست ۲۵: مجموعه $(A - B) \cup ((B \cap C)' \cap ((B' \cup A) - B))$ ، با کدام مجموعه برابر است؟ (کنکور سراسری

ریاضی ۹۹)

B' (۴)

A (۳)

$A \cap B'$ (۲)

$A \cup B'$ (۱)

www.my-dars.ir

تست ۲۶: اگر A و B دو مجموعه غیر تهی با شرط $A \subset B$ باشد آن گاه کدام رابطه نادرست است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۹)

(۱) $B - A' = A$ (۲) $A - B' = A$ (۳) $A \cap B' = \emptyset$ (۴) $B \cap A' = \emptyset$

تست ۲۷: فرض کنید A و B دو مجموعه غیر تهی و جدا از هم با یک مجموعه مرجع باشند، کدام رابطه نادرست است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۸)

(۱) $A \subset B'$ (۲) $A - B' = \emptyset$ (۳) $A \cap B' = A$ (۴) $(A \cup B)' = \emptyset$

تست ۲۸: مجموعه $[A - (A \cap B')] \cup [B \cap (A \cap B)']$ با کدام مجموعه برابر است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۸)

(۱) A (۲) B (۳) A' (۴) B'

مثال ۹۷: اگر $A = \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$ و $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ مطلوب است $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$

مای درس

مثال ۹۸: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ و $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ و $C = \{3, 4, 5, 6\}$ مطلوب است:

الف) A' ب) $(A \cap C)'$ www.maydars.ir

پ) $B - C$ ت) $(A \cup B)'$

مثال ۹۹: اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} | -n \leq m, 2^m \leq n\}$ و A_1, A_2, A_3, A_4 را تعیین کنید چه رابطه ای بین A_1 و A_2 و A_3 و A_4 وجود دارد؟

مثال ۱۰۰: اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{2n-1}{n}\right)$ مطلوب است A_1 و A_2 و A_3 سپس اجتماع و اشتراک آنها را بدست آورید؟

مثال ۱۰۱: اگر $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ و $A_i = [-i, 10 - i]$ و A_1, A_2, \dots را حساب کنید. سپس $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

زوج مرتب

هر دو شیء که جابه جا شدن آن ها یک حالت جدید به حساب آید را زوج مرتب گویند. زوج مرتب متشکل از دو عضو a و b را با نماد (a, b) نمایش می دهند؛ a را مولفه اول و b را مولفه دوم می نامند.
نکته: زوج مرتب را نمی توان به صورت $\{a, b\}$ نوشت زیرا:

$$\{a, b\} = \{b, a\} \quad \text{اما} \quad (a, b) \neq (b, a)$$

و هم چنین:

$$\{a, a\} = \{a\} \quad \text{اما} \quad (a, a) \neq (a)$$

دو زوج مرتب مساوی :

دو زوج مرتب را مساوی گویند هرگاه مولفه های اول با هم و مولفه های دوم با هم برابر باشند:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases},$$

مثال ۱۰۲: x و y را طوری بیابید که دو زوج مرتب $(x + y, ۲۵) = (۷, x^۲ + y^۲)$ با هم برابر باشند.

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه

مجموعه ای است از زوج های مرتب به قسمی که مولفه اول هر زوج به مجموعه اول و مولفه دوم هر زوج به مجموعه دوم متعلق باشد:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

مثال ۱۰۳: اگر $A = \{۱, ۲\}$ و $B = \{۴, ۵, ۶\}$ مطلوب است :

الف) $A \times B =$

ب) $B \times A =$

ج) $A \times A =$

د) $B \times A^۲ =$

مثال ۱۰۴: اگر $A = \{۲x + ۱ | x \in \mathbb{Z}, -۱ \leq x < ۲\}$ و $B = \{۲^x - ۱ | x \in \mathbb{Z}, -۱ < x \leq ۳\}$ مطلوب است: $B \times A$

www.my-dars.ir

نمودار مختصاتی حاصل ضرب دکارتی

هر گاه برای هر زوج از حاصل ضرب دکارتی یک نقطه از صفحه مختصات در نظر بگیریم به مجموعه این نقاط ، نمودار مختصاتی حاصل ضرب دکارتی می گویند .

مثال ۱۰۵ : نمودار مختصاتی $A \times B$ را رسم کنید در صورتی که $A = \{۲, ۳, ۵\}$ و $B = \{۴, ۶, ۷\}$ باشد.

مثال ۱۰۶ : نمودار مختصاتی $A \times B$ را رسم کنید در صورتی که $B = \{۲, ۴, ۷\}$ و $A = \{-۱, ۰, ۱\}$ را داشته باشیم .

نکته : حاصل ضرب دکارتی خاصیت جابه جایی ندارد مگر اینکه دو مجموعه مساوی باشند.

$$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$$

مثال ۱۰۷ : اگر $A = \{۱, x + y\}$ و $B = \{۳, x - y\}$ باشد x و y را طوری بیابید که $A \times B = B \times A$

نکته : تعداد اعضای حاصل ضرب دکارتی و مجموعه برابر است با تعداد عضو های مجموعه اول \times تعداد عضو های مجموعه

دوم

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

مثال ۱۰۸: اگر $A = \{2, 3, m-1\}$ و $B = \{4, 5\}$ را چنان بیابید که $A \times B$ مجموعه ای ۴ عضوی باشد.

مثال ۱۰۹: اگر $A = [-1, 3]$ و $B = [2, 5]$ باشد مطلوب است:

الف) $A \times B$

ب) $B \times A$

مثال ۱۱۰: $B \times A$ و $A \times B$ برای موارد زیر به دست آورید.

الف) $B = (1, 2)$ و $A = [-\infty, 1]$

مای درس

ب) $B = [2, 4]$ و $A = \{1, 5\}$

گروه آموزشی عصر

پ) $B = [-2, 3]$ و $A = \mathbb{N}$ www.my-dars.ir

$A = [1, 2)$ و $B = \mathbb{Z}$ (ت)

$A = \{-1, 3\}$ و $B = \mathbb{R}$ (ث)

مثال ۱۱۱: مجموعه های $A = \{2^k | k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2\}$ و $B = \{k | k^2 \leq 2, k \in \mathbb{Z}\}$ را در نظر بگیرید:
الف) مجموعه های A و B را نوشتن اعضا مشخص کنید.

ب) $(A \times B) \cap B^2$

پ) $(B \times A) - A^2$

مثال ۱۱۲: اگر $A = \{y + 2, 5, z\}$ و $B = \{x + 1, 4, -2\}$ در این صورت $A \times B = B \times A$ بیش ترین مقدار برای $(x + y + z)$ را بیابید.

مای درس
گروه آموزشی عصر

مثال ۱۱۳: با توجه به مجموعه های داده شده ، نمودار هر یک از حاصل ضرب های $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.

www.my-dars.ir

الف) $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$

ب) $A = [2, 6]$, $B = [3, 8]$

پ) $A = \mathbb{R}$, $B = \{2, 3\}$

ت) $A = \{3, 4\}$, $B = (1, 5]$

ث) $A = \mathbb{N}$, $B = [1, 4]$

تست ۲۹: اگر $A = [1, 4]$ و $B = (-1, 3]$ باشند، مساحت نمودار $A \times A - B \times B$ در صفحه مختصات، کدام است؟ (کنکور ریاضی خارج کشور ۹۹)

۶(۴)

۷(۳)

۵(۲)

۴(۱)

تست ۳۰: در مجموعه های چهار عضوی $A = \{x + 2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t - 1\}$ فرض کنید $A \times B = B \times A$ باشد، تعداد مجموعه ها به صورت $\{(x, y), (z, t)\}$ ، کدام است؟ (کنکور سراسری ریاضی ۹۹)

۶(۴)

۴(۳)

۳(۲)

۲(۱)

مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir