بنام خدا

جزوه هندسه ۲

(یازدهم ریاضی)

تهیه و تنظیم از :

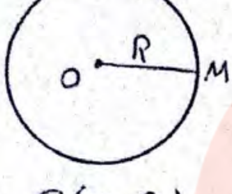
امیر حسین مطلّبی دبیر ریاضی

❋ هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ❋

التماس دعا

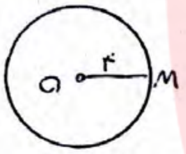
دایره :

دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت بنام مرکز برابر مقدار ثابتی باشد که این مقدار ثابت را شعاع دایره می‌نامیم. دایره به مرکز O و شعاع R را با علامت $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.



$C(O,R)$

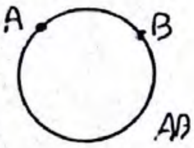
مثال) نقطه ثابت O در صفحه داده شده است. اگر نقاط متحرکی مثل M در صفحه طوری قرار گیرند که همواره فاصله‌شان تا O برابر ۴ باشد محیط منحنی را که این نقاط طی می‌کنند بیابید.



حل: مکان دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OM=R=4$ است.

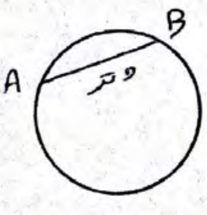
محیط دایره $= 2\pi R = 2\pi(4) = 8\pi$

کمان : قسمتی از محیط دایره که بین دو نقطه متمایز قرار داشته باشد کمان دایره نامیده می‌شود.



کمان AB $= \widehat{AB}$

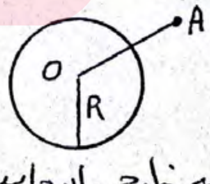
وتر : پاره خطی که دو سر کمان را بهم وصل می‌کند وتر نامیده می‌شود. وتری که از مرکز دایره می‌گذرد قطر دایره نامیده می‌شود. بزرگترین وتر دایره قطر دایره نامیده می‌شود.



اوضاع نسبی نقطه و دایره :

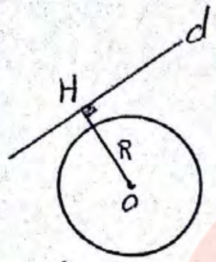
نقطه داخل دایره است
$OA<R$

نقطه روی دایره است
$OA=R$



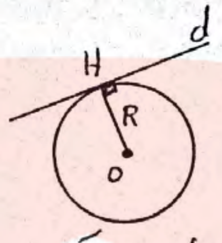
نقطه خارج دایره است
$OA>R$

اوضاع نسبی خط و دایره:



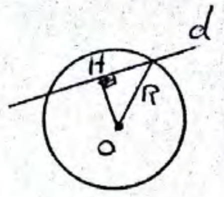
خط و دایره هیچ نقطه مشترکی ندارند

$OH > R$



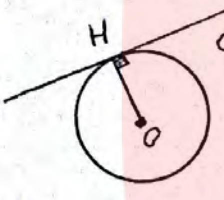
خط و دایره در یک نقطه مشترک اند

$OH = R$



خط و دایره در دو نقطه مشترک اند

$OH < R$

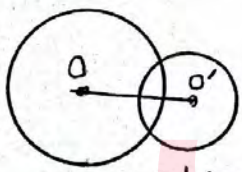


مماس بر دایره:

اگر نقطه‌ای مانند H روی دایره باشد خطی را که از نقطه H می‌گذرد و بر شعاعی از دایره که از H عبور می‌کند، عمود باشد مماس بر دایره در نقطه H می‌گوئیم. شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

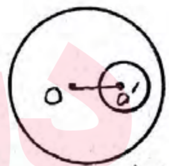
وضعیت دو دایره نسبت بهم:

خط المرکزین $= d = OO' =$ فاصله مراکز دو دایره



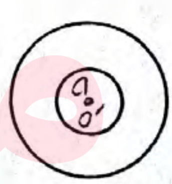
متقاطع

$r - r' < d < r + r'$



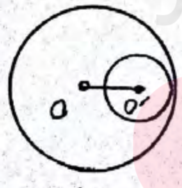
متداخل

$d < r - r'$



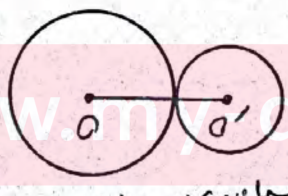
هم مرکز

$d = 0$



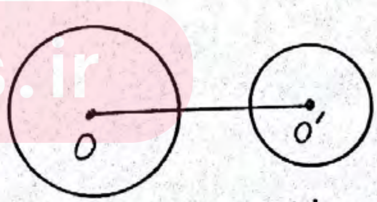
مماس داخل

$d = r - r'$



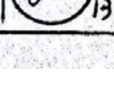
مماس بیرون

$d = r + r'$



متخارج

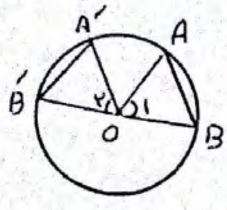
$d > r + r'$



$\hat{AOB} = \widehat{AB}$

زاویه مرکزی: زاویه‌ای که راس آن مرکز دایره و دو ضلع آن شعاع دایره باشد.

قضیه: ثابت کنید در یک دایره کمانهای نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس.



$$\begin{array}{c|l} AB = A'B' & \text{فرض} \\ \hline \widehat{AB} = \widehat{A'B'} & \text{حکم} \end{array}$$

اثبات: دو مثلث $O\hat{A}B$ و $O\hat{A'}B'$ را تشکیل می‌دهیم:

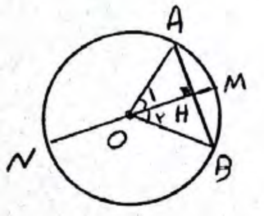
$$\left.\begin{array}{ll} AB = A'B' & \text{فرض مسئله} \\ OA = OA' = R & \\ OB = OB' = R & \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\hat{A}B \cong O\hat{A'}B' \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$

عکس قضیه:

$$\begin{array}{c|l} \widehat{AB} = \widehat{A'B'} & \text{فرض} \\ \hline AB = A'B' & \text{حکم} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{A'B'} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OA' = R \\ OB = OB' = R \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\hat{A}B \cong O\hat{A'}B' \Rightarrow AB = A'B'$$

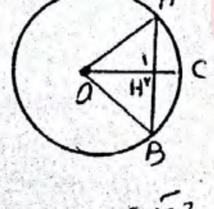
قضیه: ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند.



$$\begin{array}{c|l} MN \perp AB & \text{فرض} \\ \hline \widehat{AM} = \widehat{MB} \text{ و } AH = BH & \text{حکم} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} OA = OB = R & \\ OH = OH & \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ضلع}]{\text{وتر و یک}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \Rightarrow \begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} \\ AH = BH \end{cases}$$

قضیه: ثابت کنید در هر دایره خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.

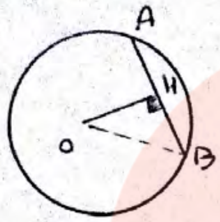


$$\begin{array}{c|l} AH = BH & \text{فرض} \\ \hline OC \perp AB & \text{حکم} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} OA = OB = R & \\ OH = OH & \text{مشترک} \\ AH = BH & \text{فرض} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\hat{A}H \cong O\hat{B}H \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \end{array}\right. \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AB$$

قضیه: ثابت کنید فاصله وتر به طول L در دایره‌ای به شعاع R تا مرکز دایره برابر است با:

$$OH=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}$$



اثبات: $OH \perp AB$ و $AB=L$

$$OB^2=OH^2+BH^2 \Rightarrow R^2=OH^2+\left(\frac{1}{2}L\right)^2 \Rightarrow R^2=OH^2+\frac{1}{4}L^2$$

$$\Rightarrow OH^2=R^2-\frac{1}{4}L^2 \Rightarrow OH^2=\frac{4R^2-L^2}{4} \Rightarrow OH=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}$$

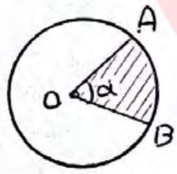
تست: فاصله مرکز دایره $C(O,5)$ از وتری به طول ۸ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ب

$R=5$
$L=8$

$$OH=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-L^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4(5)^2-8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{100-64}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=\frac{6}{2}=3$$



قطاع دایره:
ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره می‌نامند.

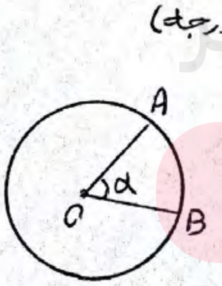
قضیه: اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ برحسب درجه مساوی α باشد نشان دهید طول کمان AB برابر است با:

$$L=\frac{\pi R}{180^\circ}\alpha$$

و مساحت قطاع برابر است با:

$$S=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}$$

(α برحسب درجه)



اثبات: در دایره $C(O,R)$، α زاویه مرکزی روبرو به کمان $AB=L$ است. داریم:

$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{L}{2\pi R} \Rightarrow L=\frac{\alpha \cdot 2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L=\frac{\pi R}{360^\circ}\alpha$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{S_{\text{قطاع}}}{\pi R^2} \Rightarrow S_{\text{قطاع}}=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}$$

مثال ۱: طول کمان روبه‌رو به زاویه 30° در دایره‌ای به شعاع $30\,cm$ را برحسب متر بیابید.

$R = 30 \div 100 = \frac{3}{10}\,m$

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} = \frac{\pi \times \frac{3}{10} \times 30^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{60} \Rightarrow l = \frac{\pi}{20}\,m$$

مثال ۲: اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه 240° در دایره $C(O,R)$ برابر 4π باشد محیط و مساحت دایره را بیابید.

$\alpha = 240^\circ$

$l = 4\pi$

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} \Rightarrow 4\pi = \frac{\pi R \times 240^\circ}{180^\circ} \Rightarrow 4R = 12 \Rightarrow R = 3$$

$$\text{محیط} = P = 2\pi R = 2\pi \times 3 = 6\pi$$

$$\text{مساحت} = S = \pi R^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

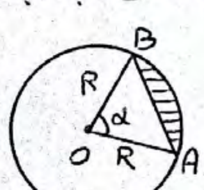
مثال ۳: قطاعی با زاویه 60° در دایره $C(O,R)$ در نظر می‌گیریم. اگر مساحت این قطاع $\frac{50\pi}{3}$ باشد شعاع دایره را بیابید.

$S = \frac{50\pi}{3}$

$\alpha = 60^\circ$

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{50\pi}{3} = \frac{\pi R^2 \times 60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow R^2 = 100 \Rightarrow R = 10$$

مثال ۴: مطابق شکل در دایره $C(O,R)$ دو شعاع با زاویه بین α برحسب درجه نسبت به هم رسم شده‌اند. قسمت رنگی را که محدود به وتر AB و دایره است قطعه‌ای از دایره می‌نامیم. مساحت این قطعه را برحسب α و R بیابید.



$$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع } OAB} - S_{O\hat{A}B}$$

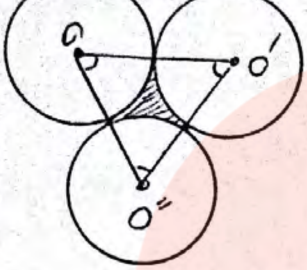
$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{1}{2}(OA \times OB \times \sin\alpha)$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha \Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{4} R^2 \left(\frac{\pi\alpha}{180^\circ} - \sin\alpha\right)$$

اگر زاویه مرکزی قطاع برحسب رادیان باشد مساحت قطعه از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin\alpha) \quad (\alpha \text{ برحسب رادیان})$$

مثال ۵: شعاع هر سه دایره برابر R است. مساحت قسمت هاشورخورده را حساب کنید.

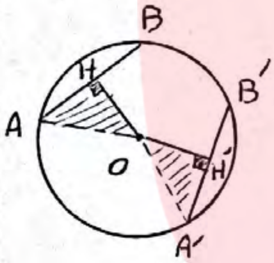


$$OO' = OO'' = O'O'' = 2R$$

$$\overset{\triangle}{OO'O''} \ \text{متساوی الاضلاع} \Rightarrow S_{\triangle OO'O''} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = R^2\sqrt{3}$$

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\triangle OO'O''} - \underbrace{S_{\text{۳ قطاع}}}_{\text{نصف دایره}} = R^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi R^2 = R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

قضیه: ثابت کنید اگر در دایره دو وتر مساوی باشند آنگاه فاصله آنها تا مرکز دایره مساوی است و برعکس.



فرض	$AB = A'B'$
حکم	$OH = OH'$

اثبات: O را به A و A′ وصل می کنیم؛ می دانیم قطر یا شعاع عمود بر وتر، وتر را نصف می کند:

$$AB = A'B' \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{A'B'}{2} \Rightarrow AH = A'H'$$

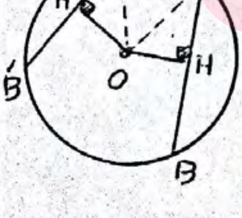
$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' = R \ \text{وتر} \\ AH = A'H' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ضلع}]{\text{وتر و یک}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OA'H'} \Rightarrow OH = OH'$$

عکس قضیه:

فرض	$OH = OH'$
حکم	$AB = A'B'$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OA' = R \\ OH = OH' \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ضلع}]{\text{وتر و یک}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OA'H'} \Rightarrow AH = A'H' \Rightarrow 2AH = 2A'H' \Rightarrow AB = A'B'$$

قضیه: در دایره از دو وتر نابرابر آنکه بزرگتر است به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس:



فرض	$AB > A'B'$
حکم	$OH < OH'$

اثبات: می دانیم شعاع عمود بر وتر، وتر را نصف می کند.

$$AH = \frac{AB}{2} \quad , \quad A'H' = \frac{A'B'}{2} \quad , \quad AB > A'B' \Rightarrow AH > A'H'$$

$$\left.\begin{aligned}\overset{\triangle}{OAH}&: OA^2 = OH^2 + AH^2\\ \overset{\triangle}{OA'H'}&: OA'^2 = OH'^2 + A'H'^2\end{aligned}\right\} \xrightarrow{OA=OA'=R} OH^2 + AH^2 = OH'^2 + A'H'^2 \Rightarrow AH^2 - A'H'^2 = OH'^2 - OH^2$$

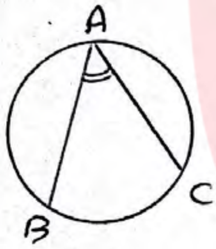
$$\xrightarrow{AH>A'H'} OH'^2 - OH^2 > 0 \Rightarrow OH'^2 > OH^2 \xRightarrow{\text{جذر}} OH' > OH$$

عکس قضیه:

فرض	$OH < OH'$
حکم	$AB > A'B'$

$$\left.\begin{aligned}&OH' > OH \Rightarrow OH'^2 > OH^2 \Rightarrow OH'^2 - OH^2 > 0\\ &\text{از طرفی}\quad AH^2 - A'H'^2 = OH'^2 - OH^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow AH^2 - A'H'^2 > 0 \Rightarrow AH^2 > A'H'^2 \Rightarrow AH > A'H'$$

$$\Rightarrow 2AH > 2A'H' \Rightarrow AB > A'B'$$



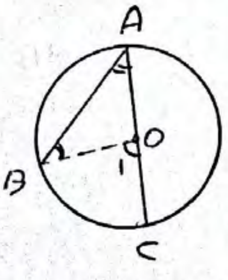
زاویه محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره باشند زاویه محاطی نامیده می‌شود.

قضیه: ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی برابر نصف کمان روبروست.

فرض	$\hat{A}$ محاطی
حکم	$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

سه حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: یک ضلع زاویه، قطر دایره باشد.



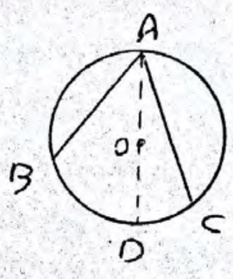
$OA = OB = R \Rightarrow \overset{\triangle}{OAB}$ متساوی الساقین $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$

خارجی $\hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{B} \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{O}_1 = \hat{A} + \hat{A} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}_1}{2}$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

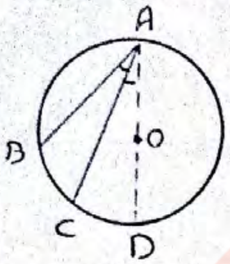
حالت دوم: دو ضلع زاویه در دو طرف مرکز دایره باشند.

قطر AD را رسم می‌کنیم طبق حالت اول داریم:



$$\left.\begin{aligned}B\hat{A}D &= \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}\\ D\hat{A}C &= \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow B\hat{A}D + D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \Rightarrow B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

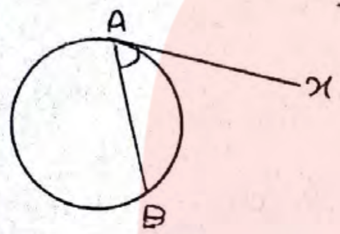
$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$



حالت سوم: دو ضلع در یک طرف مرکز باشند.

قطر AD را رسم می‌کنیم طبق حالت الف داریم:

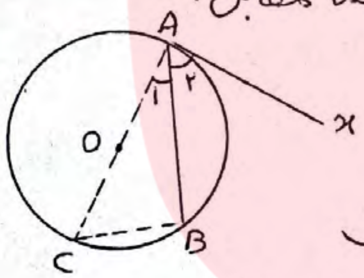
$$\hat{BAC} = \hat{BAD} - \hat{CAD} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \hat{BAC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$



زاویه ظلّی:

زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و یک ضلع آن وتری از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره باشد زاویه ظلّی نامیده می‌شود.

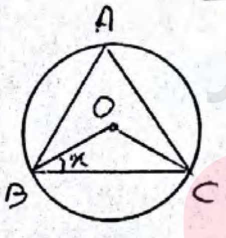
قضیه: اندازه هر زاویه ظلّی برابر است با نصف کمان مقابل:



فرض	$\hat{A}_2$ ظلّی
حکم	$\hat{A}_2 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

اثبات: قطر AC را رسم می‌کنیم $\hat{B}$ محاطی و روبروی قطر AC است پس: $\hat{B} = 90°$ از طرفی می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است پس: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90°$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = 90° \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{C} = 90° \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{A}_2 = \hat{C} \\ \text{محاطی } \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$



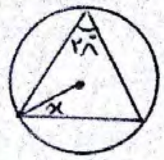
تمرین: ثابت کنید در شکل مقابل: $\hat{x} = 90° - \hat{A}$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{O} = \overset{\frown}{BC} \\ \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{O}}{2} \Rightarrow \hat{O} = 2\hat{A}$$

$$\overset{\triangle}{OBC}: OB = OC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \hat{x}$$

$$\overset{\triangle}{OBC}: \hat{B} + \hat{C} + \hat{O} = 180° \Rightarrow \hat{x} + \hat{x} + 2\hat{A} = 180° \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{A} = 180°$$

$$\Rightarrow 2\hat{x} = 180° - 2\hat{A} \Rightarrow \hat{x} = \frac{180° - 2\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{x} = 90° - \hat{A}$$

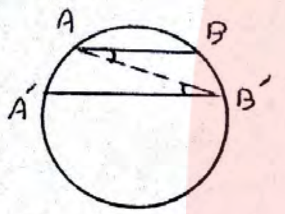


تست: مقدار $\hat{x}$ کدام است؟

۱) ۵۶° ب) ۲۸° ج) ۶۲° د) ۴۲°

$$\hat{x} = 90° - \hat{A} = 90° - 28° = 62°$$

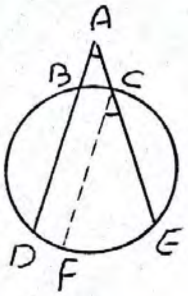
قضیه: ثابت کنید در دایره، کمانهای محصور بین دو وتر موازی، باهم برابرند و بر عکس.



فرض	$AB \parallel A'B'$
حکم	$\overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'}$

اثبات: A را به B' وصل می‌کنیم:

$(AB \parallel A'B'$ و AB' مورب$) \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B'} \Leftrightarrow \frac{\overset{\frown}{BB'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AA'}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BB'} = \overset{\frown}{AA'}$



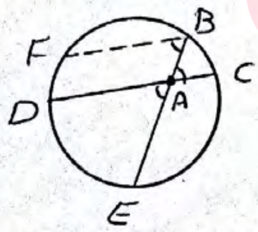
قضیه: ثابت کنید: $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}}{2}$

اثبات: از نقطه C، خط CF را موازی BD رسم می‌کنیم:

$BD \parallel CF \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DF}$

$AD \parallel CF$ و AE مورب $\Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EF}$

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EF} \Rightarrow \hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{DF}) \xrightarrow{\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DF}} \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC}}{2}$$



قضیه: ثابت کنید: $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{BC}}{2}$

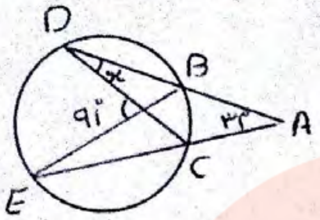
اثبات: از نقطه B، BF را موازی CD رسم می‌کنیم.

$CD \parallel BF \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{FD}$

$BF \parallel CD$ ، BE مورب $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EF}$

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FD} + \overset{\frown}{ED}) \xrightarrow{\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{FD}} \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}}{2}$$

تمرین: درشکل مقابل اندازه $\hat{x}$ را بیابید.



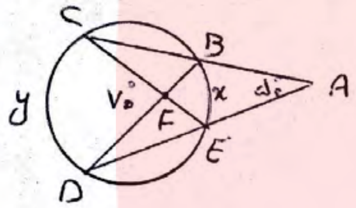
$$31^\circ = \frac{\widehat{DE}-\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{DE}-\widehat{BC} = 62^\circ$$

$$91^\circ = \frac{\widehat{DE}+\widehat{BC}}{2} \Rightarrow \widehat{DE}+\widehat{BC} = 182$$

$$2\widehat{DE} = 244^\circ \Rightarrow \widehat{DE} = 122^\circ$$

$$31^\circ = \frac{122^\circ - \widehat{BC}}{2} \Rightarrow 62^\circ = 122^\circ - \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ \Rightarrow \hat{x} = \frac{60}{2} \Rightarrow \hat{x} = 30^\circ$$

تمرین: درشکل مقابل مقادیر x و y را بیابید.

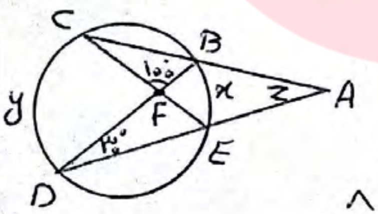


$$70^\circ = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 140^\circ$$

$$50^\circ = \frac{y-x}{2} \Rightarrow y-x = 100$$

$$\begin{cases} y+x = 140 \\ y-x = 100 \end{cases} + \Rightarrow 2y = 240^\circ \Rightarrow y = 120^\circ \text{ و } x = 20^\circ$$

تمرین: درشکل روبرو مطلوبست تعیین x و y و z



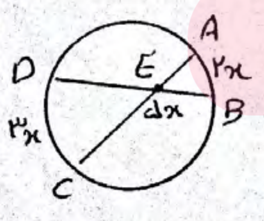
$$\text{محاطی } \hat{D} = \frac{\widehat{BE}}{2} \Rightarrow 30^\circ = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 60^\circ$$

$$\widehat{CFD} = 180 - 100^\circ = 80$$

$$80^\circ = \frac{y+x}{2} \Rightarrow 160^\circ = y + 60 \Rightarrow y = 100^\circ$$

$$z = \frac{y-x}{2} \Rightarrow z = \frac{100-60}{2} \Rightarrow z = 20^\circ$$

تمرین: درشکل روبرو مقدار x را بیابید.



$$\widehat{DEC} = 180^\circ - 5x$$

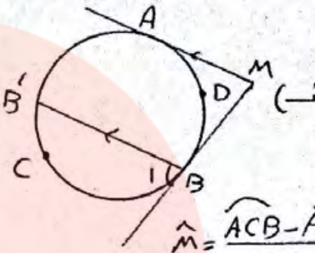
$$180^\circ - 5x = \frac{2x+3x}{2} \Rightarrow 360^\circ - 10x = 5x \Rightarrow 360^\circ = 15x$$

$$\Rightarrow x = \frac{360}{15} \Rightarrow x = 24^\circ$$

«حل تمرینات ص ۱۷ کتاب»

۱) در شکل های زیر ثابت کنید: (راهنمایی: از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید)

الف)



$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$

از B خطی به موازات AM رسم می کنیم

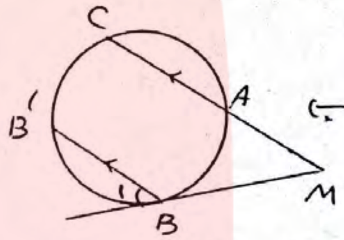
$(BB' \parallel AM$ ، مورب $AB) \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1$

ظلی $\hat{B}_1 = \frac{\widehat{BB'}}{2}$

$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BB'}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB'}}{2}$

$\xrightarrow{\widehat{AB'} = \widehat{ADB}} \hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$

ب)



$M = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$

از B خطی به موازات MC رسم می کنیم:

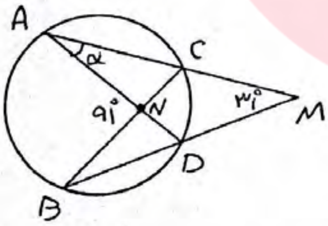
$(BB' \parallel AM$ ، مورّب $MB) \Rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1$

ظلّی $\hat{B}_1 = \frac{\widehat{BB'}}{2}$

$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BB'}}{2}$

$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{B'C}}{2} \xrightarrow{\widehat{B'C} = \widehat{AB}} M = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$

۲) در شکل مقابل اندازه زاویه α را بدست آورید.



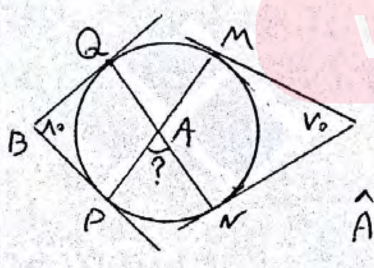
$\hat{M} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 31^\circ = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} - \widehat{CD} = 62^\circ$

$\hat{N} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 91^\circ = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{CD} = 182^\circ$

$$\begin{cases} \widehat{AB} - \cancel{\widehat{CD}} = 62^\circ \\ \widehat{AB} + \cancel{\widehat{CD}} = 182^\circ \end{cases} +$$

$2\widehat{AB} = 244^\circ \Rightarrow \boxed{\widehat{AB} = 122^\circ} \Rightarrow \boxed{\widehat{CD} = 60^\circ} \Rightarrow$ محاطی $\alpha = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

۳) در شکل اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟

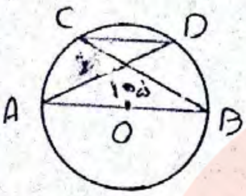


$70^\circ = \frac{(360^\circ - \widehat{MN}) - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow 140^\circ = 360^\circ - 2\widehat{MN} \Rightarrow \widehat{MN} = 110^\circ$

$80^\circ = \frac{(360^\circ - \widehat{PQ}) - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 160^\circ = 360^\circ - 2\widehat{PQ} \Rightarrow \widehat{PQ} = 100^\circ$

$\hat{A} = \frac{\widehat{MQ} + \widehat{PN}}{2} = \frac{360^\circ - (\widehat{MN} + \widehat{PQ})}{2} = \frac{360^\circ - (110^\circ + 100^\circ)}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$

۴) در دایره رسم شده شکل مقابل $CD \parallel AB$ اندازه کمان CD را بدست آورید.



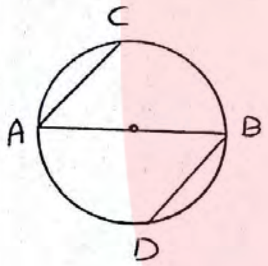
$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$ ①

$75^\circ = \dfrac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \Rightarrow 150^\circ = \widehat{AC} + \widehat{BD}$ ②

①,② $\Rightarrow 150^\circ = 2\widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AC} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{BD} = 75^\circ$

$\widehat{CD} = 180^\circ - (\widehat{AC} + \widehat{BD}) = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$

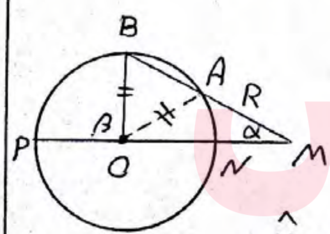
۵) در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند.
ثابت کنید: $AC = BD$



$AC \parallel BD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{BD} = 180^\circ - \widehat{AC}$

$\Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$

۶) دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$ نشان دهید: $\beta = 3\alpha$



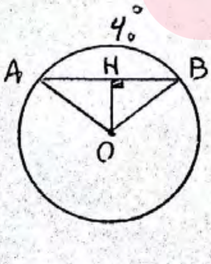
$OA = MA = R \Rightarrow$ مثلث متساوی الساقین $\overset{\triangle}{OAM} \Rightarrow A\hat{O}M = \hat{M} = \alpha$

مرکزی $A\hat{O}M = \widehat{AN} = \alpha$

$\hat{M} = \dfrac{\widehat{BP} - \widehat{AN}}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\widehat{BP} - \alpha}{2} \Rightarrow 3\alpha = \widehat{BP}$

از طرفی $\widehat{BP} = \beta$ $\Rightarrow \beta = 3\alpha$

۷) در دایره $C(O,R)$، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$، فاصله O از وتر AB را بدست آورید



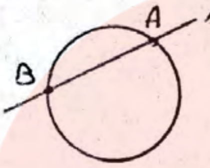
مرکزی $A\hat{O}B = 60^\circ$

$OA = OB = R$ $\Rightarrow$ مثلث متساوی الاضلاع $\overset{\triangle}{OAB} \Rightarrow OB = 10,\ \hat{B} = 60^\circ$

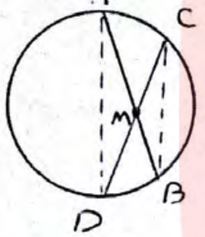
$\overset{\triangle}{OBH}: \sin\hat{B} = \dfrac{OH}{OB} \Rightarrow \sin 60^\circ = \dfrac{OH}{10} \Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 10 \Rightarrow OH = 5\sqrt{3}$

روابط طولی در دایره:

قاطع بر دایره: خط راستی که دایره را در دو نقطه قطع کند قاطع بر دایره یا به طور خلاصه قاطع نامیده می‌شود.



قضیه: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M درون دایره، یکدیگر را قطع کنند آنگاه:



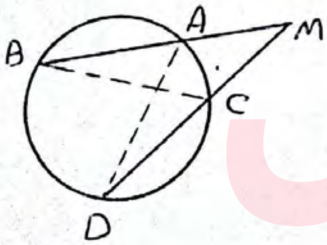
$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

اثبات: C را به B وصل می‌کنیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2}\\[2mm] \hat{B}=\hat{D}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{حالت زز}} \overset{\triangle}{ADM} \sim \overset{\triangle}{MCB} \Rightarrow \frac{MD}{MB}=\frac{MA}{MC}=\frac{AD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{MB}=\frac{MA}{MC} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

قضیه: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M بیرون دایره، یکدیگر را قطع کنند، آنگاه:

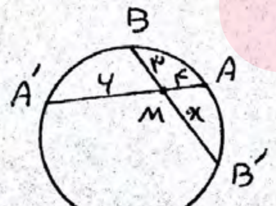


$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{D}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}\\[2mm] \hat{M}=\hat{M}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{حالت زز}} \overset{\triangle}{MBC} \sim \overset{\triangle}{MAD} \Rightarrow \frac{BC}{AD}=\frac{MC}{MA}=\frac{MB}{MD}$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MA}=\frac{MB}{MD} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

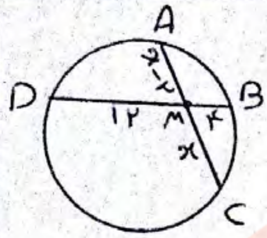
تمرین: در شکل مقابل طول وتر BB' را بیابید.



$$MA \cdot MA' = MB \cdot MB' \Rightarrow 4 \times 6 = 3 \times x \Rightarrow x = 8$$

$$BB' = 3 + x = 3 + 8 = 11$$

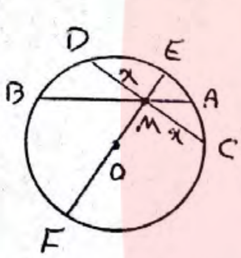
تمرین: در شکل روبرو مقدار x را بیابید.



$$MA.MC = MB.MD \Rightarrow x(x-2) = 4\times 12 \Rightarrow x^2-2x=48$$

$$\Rightarrow x^2-2x-48=0 \Rightarrow (x-8)(x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 & \text{ق ق} \\ x=-6 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

تمرین: نقطه M روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره (C) چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M را بیابید.



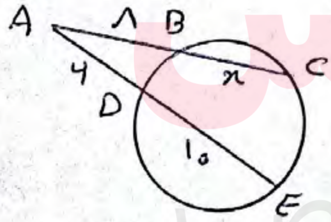
حل: مطابق شکل ابتدا وتر AB را در دایره C رسم می‌کنیم برای رسم کوتاه‌ترین وتر گذرنده از M ابتدا M را به O مرکز دایره وصل کرده از دو طرف امتداد دهیم تا قطر EF رسم شود سپس از M بر EF عمود می‌کنیم تا وتر DC رسم شود می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند پس: $DM=DC=x$

$$AB=9 \Rightarrow MA=3 \quad \text{و} \quad MB=6 \quad (\text{نسبت ۱ به ۲})$$

$$MD.MC=MA.MB \Rightarrow x.x=3\times 6 \Rightarrow x^2=18 \Rightarrow x=\sqrt{18} \Rightarrow x=3\sqrt{2}$$

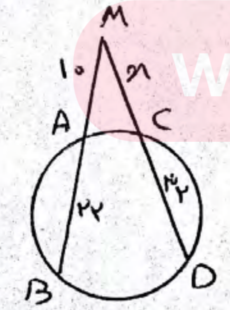
$$DC=2x=6\sqrt{2}$$

تمرین: در شکل‌های زیر مقادیر x را تعیین کنید:



$$AB.AC=AD.AE \Rightarrow 8(8+x)=6(6+10)$$

$$\Rightarrow 64+8x=96 \Rightarrow 8x=32 \Rightarrow x=4$$



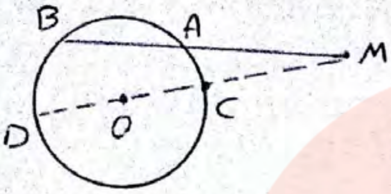
$$MA.MB=MC.MD$$

$$10(10+22)=x(x+32) \Rightarrow 320=x^2+32x$$

$$\Rightarrow x^2+32x-320=0 \Rightarrow (x+40)(x-8)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-40 & \text{غ ق ق} \\ x=8 & \text{ق ق} \end{cases}$$

تمرین: مطابق شکل $AB=3$ و $MA=5$ است اگر محیط دایره برابر 8π باشد فاصله M از مرکز دایره را بیابید.



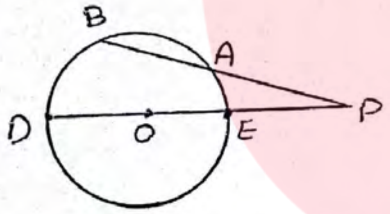
حل: M را به نقطه O مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم:

$$\text{محیط} = 2\pi R = 8\pi \Rightarrow R=4$$

$$MA\cdot MB = MC\cdot MD \Rightarrow MA\cdot MB = (MO-\overset{R}{\overbrace{OC}})(MO+\overset{R}{\overbrace{OD}})$$

$$\Rightarrow MA\cdot MB = MO^2 - R^2 \Rightarrow 5(5+3) = MO^2 - 4^2 \Rightarrow MO^2 = 56 \Rightarrow MO=\sqrt{56}$$

تمرین: نقطه P خارج دایره $C(O,R)$ است. اگر فاصله این نقطه تا مرکز دایره برابر d باشد، ثابت کنید حاصلضرب طول قطعات هر قاطعی که از P بر دایره رسم می‌شود مقدار ثابت d^2-R^2 است که این مقدار ثابت را قوت نقطه P نسبت به دایره (C) می‌گوئیم.



فرض	$PO=d$
حکم	$PA\cdot PB = d^2-R^2$

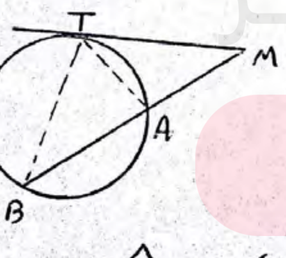
حل: نقطه P را به مرکز دایره وصل کرده و امتدادی دهیم:

$$PA\cdot PB = PE\cdot PD \Rightarrow PA\cdot PB = (\underbrace{PO}_{d}-\underbrace{OE}_{R})(PO+\underbrace{OD}_{R}) \Rightarrow PA\times PB = d^2-R^2$$

قضیه: اگر از یک نقطه خارج دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به آن دایره رسم کنیم، مربع طول مماس برابر است با حاصلضرب دو قطعه قاطع.

فرض	MT مماس و MAB قاطع
حکم	$MT^2 = MA\cdot MB$

اثبات:

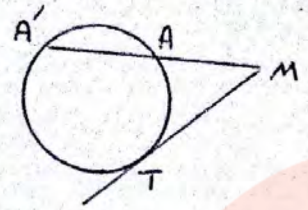


T را به A و B وصل می‌کنیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{MTA} = \dfrac{\overset{\frown}{AT}}{2} \\ \widehat{MBT} = \dfrac{\overset{\frown}{AT}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{MTA} = \widehat{MBT}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{MTA} = \widehat{MBT} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\} \overset{\text{زز}}{\Longrightarrow} \overset{\triangle}{MTB} \sim \overset{\triangle}{MTA} \Rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{AT}{BT} = \frac{MT}{MB}$$

$$\Rightarrow \boxed{MT^2 = MA\cdot MB}$$



تمرین: در شکل روبرو از نقطه M بر دایره مماس و قاطعی رسم شده است:

الف) اگر $MA=4$ و $AA'=5$ باشد طول MT را بیابید.

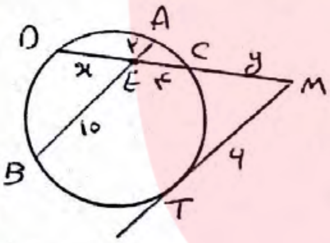
ب) اگر $MA'=18$ و $MT=12$ باشد طول وتر AA' را پیدا کنید.

الف) $MT^2 = MA \cdot MA' \Rightarrow MT^2 = MA\cdot(MA+AA') \Rightarrow MT^2 = 4(4+5)$

$\Rightarrow MT^2 = 36 \Rightarrow MT = 6$

ب) $MT^2 = MA \cdot MA' \Rightarrow 12^2 = MA \times 18 \Rightarrow MA = 8$

$AA' = MA' - MA = 18 - 8 = 10$

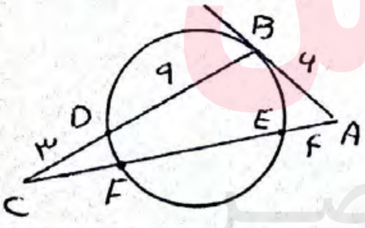


تمرین: با توجه به شکل مطلوب است محاسبه مقادیر x و y:

$EA \cdot EB = ED \cdot EC \Rightarrow 2 \times 10 = x \times 4 \Rightarrow \boxed{x=5}$

$MT^2 = MC \cdot MD \Rightarrow 6^2 = y(y+9) \Rightarrow y^2 + 9y - 36 = 0$

$\Rightarrow (y+12)(y-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=-12 & \text{غ‌ق‌ق} \\ y=3 & \text{ق‌ق} \end{cases}$



تمرین: در شکل روبرو AB بر دایره مماس است. محیط مثلث $\hat{ABC}$ را بیابید.

$AB^2 = AE \cdot AF \Rightarrow 6^2 = 4 \times AF \Rightarrow AF = 9$

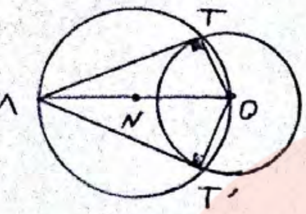
$\Rightarrow EF = AF - AE = 9 - 4 = 5$

$CD \cdot CB = CF \cdot CE \Rightarrow 3(3+9) = CF(CF+FE) \Rightarrow 36 = CF(CF+5)$

$\Rightarrow CF^2 + 5CF - 36 = 0 \Rightarrow (CF+9)(CF-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} CF=-9 & \text{غ‌ق‌ق} \\ CF=4 & \text{ق‌ق} \end{cases}$

محیط $\hat{ABC} = AB + AC + BC = AB + (AE+EF+FC) + (CD+DB) = 6 + (4+5+4) + (3+9) = 31$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره:



برای رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره مانند M، بصورت زیر عمل می کنیم:

۱) نقطه M را به مرکز دایره وصل می کنیم.

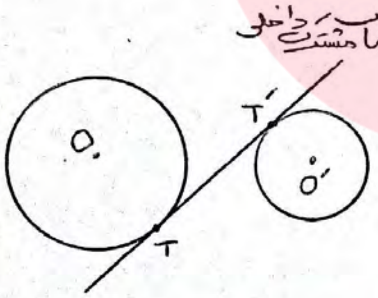
۲) وسط MO را نقطه N می نامیم.

۳) از نقطه N دایره‌ای به شعاع MN رسم می کنیم محل تلاقی را T و T' می نامیم MT و MT' دو مماس هستند و $MT = MT'$ زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} OT = OT' \ \text{شعاع} \\ MO = MO \ \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ضلع}]{\text{وتر و یک}} \widehat{MOT} \cong \widehat{MOT'} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} MT = MT' \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \Rightarrow MO \ \text{نیمساز} \ T\hat{M}T' \end{array}\right.$$

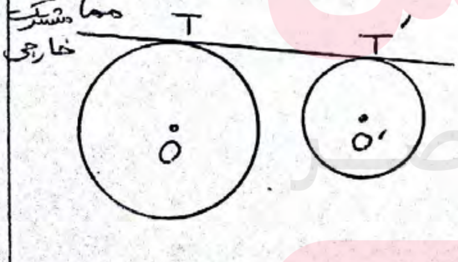
مماس مشترک دو دایره:

مماس مشترک دو دایره، خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره، بر دو نوع است:



۱) مماس مشترک داخلی:

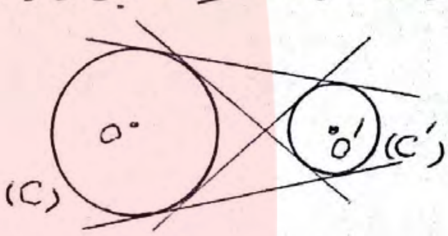
اگر دو دایره در طرفین خط مماس باشند، خط مماس را مماس مشترک داخلی می گوئیم.



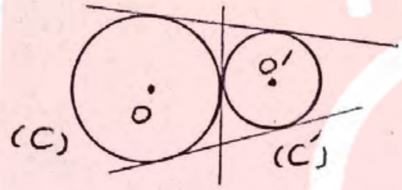
۲) اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، خط مماس را مماس مشترک خارجی می گوئیم.

تمرین: دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با طول خط المرکزین d مفروض اند با در نظر گرفتن اوضاع نسبی این دو دایره، در هر حالت مماس های مشترک داخلی و خارجی این دو دایره را رسم کنید.

۱) دو دایره متخارج هستند
دو مماس مشترک داخلی و دو مماس مشترک خارجی دارند

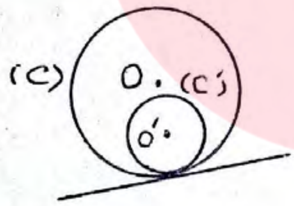


۲) دو دایره مماس بیرونی اند
دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی دارند.

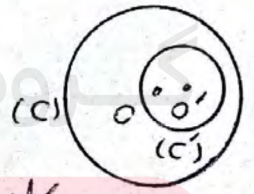


۳) دو دایره متقاطع اند.
فقط دو مماس مشترک خارجی دارند

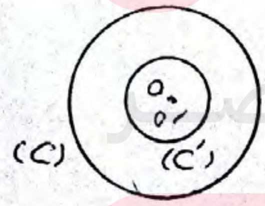
۴) دو دایره مماس درونی اند.
فقط یک مماس مشترک خارجی دارند.



۵) دو دایره متداخل اند
هیچ مماس مشترکی ندارند



۶) دو دایره هم مرکزند
هیچ مماس مشترکی ندارند

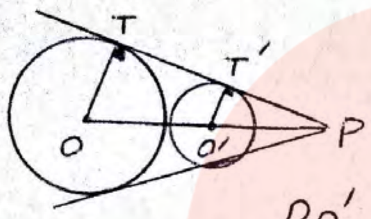


مثال) دو دایره $C(O,3)$ و $C'(O',2)$ مفروض اند. مرکز این دو دایره نقاط $O(m-1,2)$ و $O'(3,-2)$ هستند اگر این دو دایره در کل سه مماس مشترک داشته باشند مقدار m را بیابید.

$OO'=R+R' \Rightarrow \sqrt{(m-1-3)^2+(2-(-2))^2}=3+2 \Rightarrow \sqrt{(m-4)^2+16}=5$

$\Rightarrow (m-4)^2+16=25 \Rightarrow (m-4)^2=9 \Rightarrow m-4=\pm 3 \Rightarrow m=1$ یا 7

مثال) دو دایره به شعاع های ۲ و ۳ مماس خارج اند. مماس مشترک خارجی آنها یکدیگر را در نقطه P قطع کرده اند. فاصله P تا مرکز دایره بزرگتر بیابید.



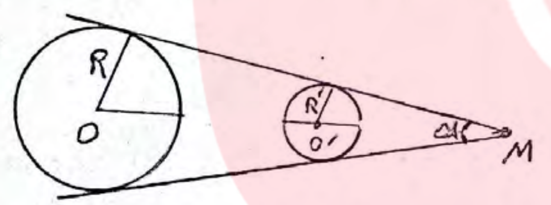
حل: مطابق شکل، شعاع بر خط مماس عمود است

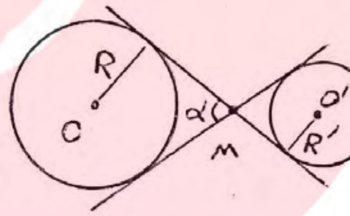
پس: $OT \parallel O'T'$ طبق قضیه تالس:

$$\frac{PO'}{PO}=\frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{PO'}{PO'+OO'}=\frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{PO'}{PO'+(2+3)}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3PO'=2PO'+10 \Rightarrow PO'=10 \Rightarrow PO=PO'+OO'=10+(2+3)=15$$

فرمول محاسبه زاویه بین مماس های مشترک خارجی و داخلی:





$\alpha =$ زاویه بین مماسهای مشترک خارجی

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{|R-R'|}{d}$$

$\alpha =$ زاویه بین مماسهای مشترک داخلی

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R+R'}{d}$$

مثال: شعاع دو دایره متخارج ۲۵ و ۷/۵ است. اگر طول خط المرکزین این دو دایره برابر ۶۵ باشد زاویه بین دو مماس مشترک داخلی دو دایره را بیابید.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R+R'}{d} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{25+7/5}{65} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{32/5}{65} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2}=30^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha=60^\circ}$$

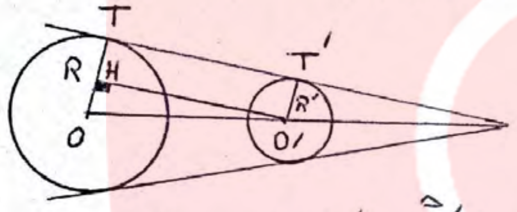
مثال) زاویه بین مماس های مشترک خارجی دو دایره متخارج 90° است. اگر طول خط المرکزین این دو دایره $10\sqrt{2}$ بوده و شعاع یکی از دایره ها سه برابر شعاع دایره دیگر باشد، مساحت دایره بزرگتر را بیابید.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|R-R'|}{d} \Rightarrow \sin\frac{90^\circ}{2} = \frac{|R-3R|}{10\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{2R}{10\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2R}{10\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow \boxed{R=5} \Rightarrow$ شعاع دایره بزرگ $= 3R = 3\times 5 = 15$

$S_{\text{بزرگ}} = \pi(15)^2 = 225\pi$

قضیه: در دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ اگر TT' طول مماس خارجی باشد و $OO'=d$ ثابت کنید: $TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2}$



اثبات: از O' عمود $O'H$ را بر OT رسم می‌کنیم چهارضلعی $TT'O'H$ مستطیل است

طبق رابطه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $OO'H$ داریم:

$(OO')^2 = O'H^2 + OH^2 \Rightarrow d^2 = TT'^2 + (R-R')^2 \Rightarrow TT'^2 = d^2 - (R-R')^2$

$$\Rightarrow \boxed{TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2}}$$

مثال ۱: دو دایره $C(O,7)$ و $C'(O',1)$ مفروضند. اگر طول خط المرکزین این دو دایره ۱۰ باشد طول مماس مشترک خارجی این دو دایره را بیابید.

$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2} = \sqrt{10^2-(7-1)^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$

مثال ۲: طول مماس مشترک خارجی دو دایره متقاطع به شعاع های ۱۲ و ۶ برابر ۸ است. طول خط المرکزین این دو دایره را بیابید.

$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{d^2-(12-6)^2} \Rightarrow 8 = \sqrt{d^2-36} \Rightarrow 64 = d^2-36$

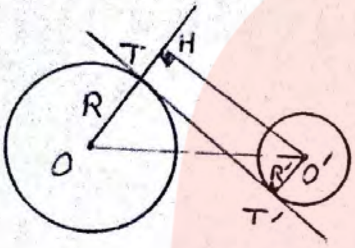
$\Rightarrow d^2 = 100 \Rightarrow \boxed{d=10}$

مثال ۳: مقدار a را چنان تعیین کنید که طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های ۳ و ۸ و طول خط المرکزین ۱۳، برابر $(5a-3)$ باشد.

$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2} \Rightarrow 5a-3 = \sqrt{13^2-(3-8)^2} \Rightarrow 5a-3 = \sqrt{144} \Rightarrow 5a-3=12 \Rightarrow \boxed{a=3}$

قضیه: در دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ ، TT' طول مماس داخل است. با فرض $OO'=d$ ثابت کنید:

$$TT'_{\text{داخلی}}=\sqrt{d^2-(R+R')^2}$$



اثبات: از O' عمود $O'H$ را بر امتداد OT رسم می‌کنیم چهارضلعی $HO'T'T$ مستطیل است در مثلث قائم‌الزاویه $O\hat{H}O'$ طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$(OO')^2=OH^2+O'H^2 \Rightarrow d^2=(R+R')^2+TT'^2 \Rightarrow TT'^2=d^2-(R+R')^2$$

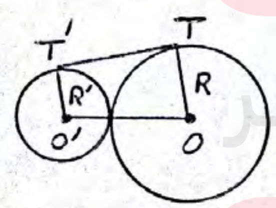
$$\Rightarrow \boxed{TT'_{\text{داخلی}}=\sqrt{d^2-(R+R')^2}}$$

تست: فاصله مراکز دو دایره برابر 41 cm و شعاع دایره کوچک 4 cm و شعاع دایره بزرگتر 5 cm است. طول مماس مشترک داخلی دو دایره چند سانتیمتر است؟

۱) 41　۲) 39　۳) 39.8　۴) 40

$$TT'_{\text{داخلی}}=\sqrt{d^2-(R+R')^2}=\sqrt{41^2-(5+4)^2}=\sqrt{1681-81}=\sqrt{1600}=40$$

قضیه: ثابت کنید طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس بیرونی برابر است با: $TT'=2\sqrt{RR'}$



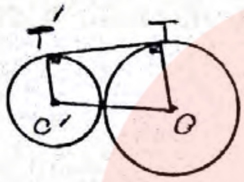
اثبات: چون دو دایره مماس بیرون هستند پس:

$$OO'=d=R+R'$$

$$TT'_{\text{خارجی}}=\sqrt{d^2-(R-R')^2}=\sqrt{(R+R')^2-(R-R')^2}=\sqrt{(R^2+R'^2+2RR')-(R^2+R'^2-2RR')}$$

$$=\sqrt{4RR'} \Rightarrow \boxed{TT'_{\text{خارجی}}=2\sqrt{RR'}}$$

مثال) مطابق شکل دایره‌ها به شعاع ۲ و ۸ بوده و مماس خارج‌اند. محیط و مساحت چهارضلعی $T'TOO'$ را مشخص کنید. (TT' مماس مشترک خارجی دو دایره است)



$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{8\times 2} = 2\times 4 = 8$$

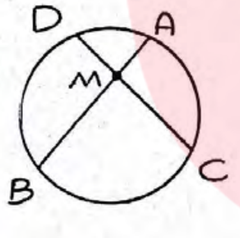
چهارضلعی $T'TOO'$ ذوزنقه قائم‌الزاویه است.

مساحت $= S = \frac{(8+2)\times 8}{2} = 40$

محیط $= P = 8+2+10+8 = 28$

تمرین ص ۲۳

۱) در دایره $C(O,R)$ وتر AB، وتر CD به طول ۹ سانتیمتر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11\,cm$ آنگاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



$$\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{DM+MC} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow \frac{DM}{CD} = \frac{1}{3}$$

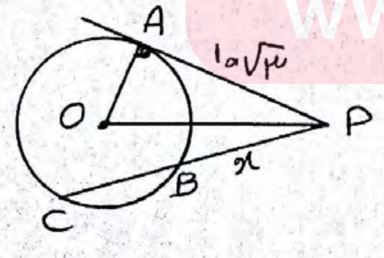
$$\Rightarrow \frac{DM}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{DM = 3} \Rightarrow MC = 9-3 = 6$$

$AM = x \Rightarrow MB = 11-x$ $\qquad AM\cdot MB = DM\cdot MC \Rightarrow x(11-x) = 3\times 6 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$AM = 2$ و $MB = 11-2 = 9$

---

۲) از نقطه P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است) همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC=20$، طول‌های PB و PC را به دست آورید.



$$AP^2 = PB\cdot PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(20+x)$$

$$\Rightarrow 300 = 20x + x^2 \Rightarrow x^2 + 20x - 300 \Rightarrow (x-10)(x+30) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -30 & \text{غ ق ق} \\ x = 10 \Rightarrow BP = 10 \Rightarrow PC = 10+20 = 30 \end{cases}$$

۱۳) در شکل مقابل دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگتر، برهم عمودند اگر $AM=16$ و $ND=10$ شعاع های دو دایره را پیدا کنید.

حل: می دانیم قطر عمود بر هر وتر، وتر و کمان نظیرش را نصف می کند پس $ON=ON'$

$AM=16$ و $OM=x$ و $ON=ON'=y$ و $ND=10$

در دایره کوچکتر دو وتر درداخل دایره متقاطعند پس داریم:

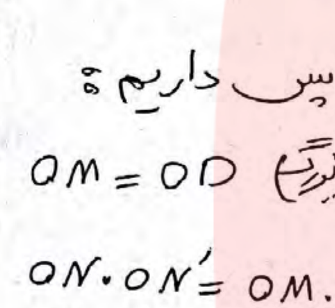
$OM = OD$ (شعاع دایره بزرگ) $\Rightarrow 16+x = y+10 \Rightarrow y = 6+x$

$$ON \cdot ON' = OM \cdot OB \Rightarrow y\cdot y = x(16+x) \xrightarrow{y=6+x} (6+x)^2 = x(16+x)$$

$$\Rightarrow x^2+12x+36 = 16x+x^2 \Rightarrow 36 = 4x \Rightarrow \boxed{x=9}$$

شعاع دایره بزرگ $=16+9=25$ 　 قطر دایره کوچک $=25+9=34 \Rightarrow$ شعاع دایره کوچک $=\frac{34}{2}=17$

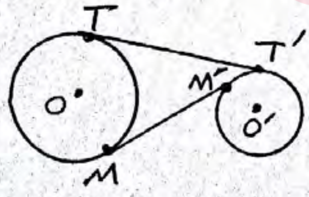
۱۴) مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس اند. از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم ثابت کنید:



$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$

حل: می دانیم دو مماسی که از نقطه‌ای خارج دایره برآن رسم شود باهم برابرند از نقطه M دو مماس بر دایره رسم شده پس $MT = MT_1$ در دایره کوچکتر از نقطه M نیز دو مماس برآن رسم شده پس $MT = MT_3$ به همین ترتیب: $MT = MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$

۱۵) طول شعاع های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی 8 واحد است.

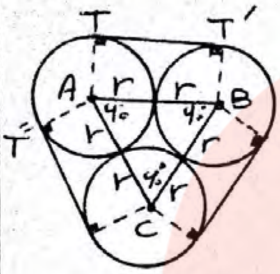


$OO' = 8$ 　 $TT' = 3\sqrt{7} = \sqrt{63}$ 　 $MM' = \sqrt{15}$

$$TT'^2 = OO'^2 - (R-R')^2 \Rightarrow 63 = 64 - (R-R')^2 \Rightarrow R-R' = 1$$

$$MM'^2 = OO'^2 - (R+R')^2 \Rightarrow 15 = 64 - (R+R')^2 \Rightarrow R+R' = 7$$

$$\begin{cases} R-R'=1 \\ R+R'=7 \end{cases} \Rightarrow 2R=8 \Rightarrow \boxed{R=4}\ ,\ \boxed{R'=3}$$



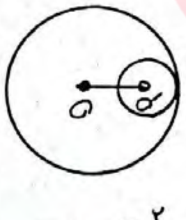
۶) سه دایره به شعاع های برابر r دو به دو برهم مماس اند مطابق شکل مقابل، این سه دایره به وسیله نخی بسته شده اند، نشان دهید طول این نخ برابر $6r+2\pi r$ است همچنین نشان دهید مساحت ناحیه محدود به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$ است.

$TT'=2r$ $\qquad \widehat{TAT''}=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+60^\circ)=120^\circ$ $\qquad \overset{\frown}{TT''}=\frac{120}{360}(2\pi r)=\frac{2}{3}\pi r$

$$\text{طول نخ}=3(2r)+3(\tfrac{2}{3}\pi r)=6r+2\pi r$$

$$S_{\text{محدود}}=S_{\overset{\triangle}{ABC}}-S_{\text{نیم دایره}}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2-\frac{1}{2}\pi r^2=r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$$

۷) طول خط المرکزین دو دایره متداخل مساوی 2cm و مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتیمتر مربع است. طول شعاع های دو دایره را بدست آورید.



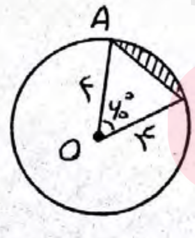
$$OO'=R-R'=2$$

$$S_{\text{محصور}}=S_{\text{دایره بزرگ}}-S_{\text{دایره کوچک}} \Rightarrow 16\pi=\pi R^2-\pi R'^2=\pi(R^2-R'^2)$$

$$\Rightarrow R^2-R'^2=16 \Rightarrow (R-R')(R+R')=16 \Rightarrow 2(R+R')=16 \Rightarrow R+R'=8$$

$$\begin{cases} R-R'=2 \\ R+R'=8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{R=5}\ \boxed{R'=3}$$

۸) مطابق شکل در دایره به شعاع ۴ مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام دارد.



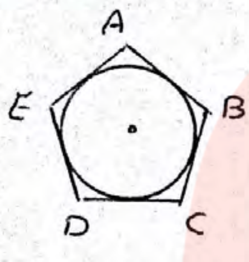
$$S_{\overset{\triangle}{OAB}}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin\hat{O}=\frac{1}{2}(4)(4)\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$$

$$S_{\text{قطاع } OAB}=\frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}=\frac{\pi(4)^2(60^\circ)}{360^\circ}=\frac{16\pi}{6}=\frac{8\pi}{3}$$

$$S_{\text{هاشورزده}}=S_{\text{قطاع}}-S_{\text{مثلث}}=\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}$$

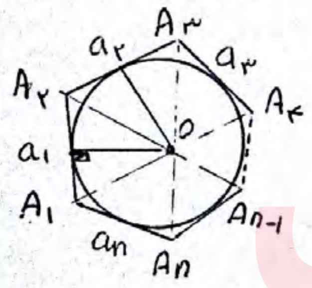
چند ضلعی های محیطی و محاطی:

تعریف ۱: یک چند ضلعی را محیطی می‌گوئیم اگر و فقط اگر دایره ای در صفحه چند ضلعی وجود داشته باشد که بر تمام اضلاع آن مماس باشد. دایره گفته شده را دایره محاطی چند ضلعی می‌گوئیم. در شکل روبرو ABCDE یک پنج ضلعی محیطی است.



تعریف ۲: یک چند ضلعی را محیطی می‌گوئیم اگر و فقط اگر نیمساز داخلی تمام زاویه‌هایش در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

مثال) اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط $2P$ شعاع دایره محاطی برابر r باشد ثابت کنید: $r=\frac{S}{P}$ یا $S=rP$



فرض	$A_1A_2\ldots A_n$ یک n ضلعی محیطی با محیط $2P$ و مساحت S است
حکم	$r=\frac{S}{P}$ (شعاع دایره محاطی)

اثبات: مطابق شکل مرکز دایره محاطی یعنی نقطه O را به رئوس n ضلعی محیطی $A_1A_2\cdots A_n$ وصل می‌کنیم. در اینصورت این n ضلعی به n مثلث تقسیم می‌شود که مساحت کل n ضلعی با جمع مساحت این n مثلث مساوی است.

$$S=S_{\triangle OA_1A_2}+S_{\triangle OA_2A_3}+\cdots+S_{\triangle OA_nA_1}$$

$$=\frac{a_1r}{2}+\frac{a_2r}{2}+\cdots+\frac{a_nr}{2}=\frac{r}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{r}{2}\times 2P$$

$$\Rightarrow \boxed{S=rP} \quad \text{یا} \quad \boxed{r=\frac{S}{P}}$$

مثال) یک n ضلعی محیطی با مساحت ۲۰ و محیط ۱۰ مفروض است مساحت دایره محاطی این n ضلعی را بیابید.

$S=20$

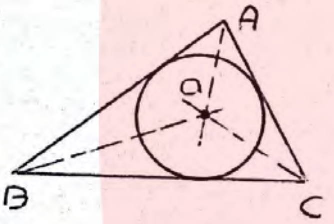
$2P=10 \Rightarrow P=5$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{20}{5}\Rightarrow \boxed{r=4}$$

$$S_{\text{دایره محاطی}}=\pi r^2=\pi(4)^2=16\pi$$

دایره محاطی مثلث:

مرکز دایره محاطی هر مثلث، محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث است.



r = شعاع دایره محاطی

S = مساحت مثلث

2P = محیط مثلث

$$r=\frac{S}{P}$$

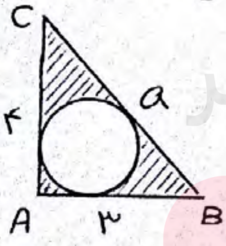
مثال) شعاع دایره محاطی مثلثی با اضلاعی به طول ۵ و ۱۲ و ۱۳ را بیابید.

$13^2=12^2+5^2 \Rightarrow$ رابطه فیثاغورس برقرار است $\Rightarrow$ مثلث قائم الزاویه

$S=\frac{5\times 12}{2}=30$ $\qquad 2P=5+12+13=30 \Rightarrow P=15$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{30}{15}=2$$

مثال) مساحت محصور به مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائم ۳ و ۴ و دایره محاطی آن را بیابید.

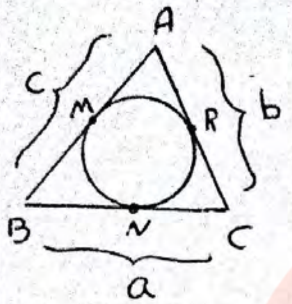


$a^2=3^2+4^2=9+16=25 \Rightarrow a=5$

$S=\frac{3\times 4}{2}=6$ $\qquad P=\frac{3+4+5}{2}=6$

$r=\frac{S}{P}=\frac{6}{6}=1 \Rightarrow S_{\text{دایره محاطی}}=\pi r^2=\pi(1)^2=3.14$

$S_{\text{رنگی}}=6-3.14=2.86$



مثال) مطابق شکل دایره محاطی مثلث ABC به محیط $2P$ رسم شده و نقاط M و N و R محل تماس این دایره با اضلاع مثلث هستند ثابت کنید:

$AM = AR = P - a$ $\quad BM = BN = P - b$ $\quad CR = CN = P - c$

اثبات: می‌دانیم طول مماس‌های مرسوم از یک نقطه خارج دایره بر دایره باهم مساوی‌اند نیز

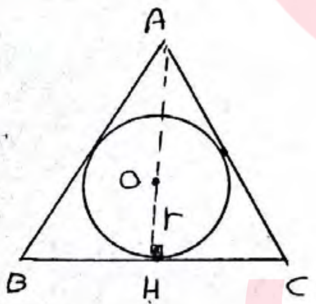
$AM = AR \qquad BM = BN \qquad CN = CR$

$$2P = AB + AC + BC = (AM + BM) + (AR + CR) + (BN + CN)$$

$$\Rightarrow 2P = 2AM + 2BN + 2CN \Rightarrow P = AM + \underbrace{BN + CN}_{a} \Rightarrow \boxed{AM = P - a}$$

دو حالت دیگر بهمین ترتیب ثابت می‌شود.

مثال) مثلث متساوی الاضلاع ABC بر دایره‌ای به شعاع r محیط است. محیط و مساحت این مثلث را برحسب r بیابید.



حل: می‌دانیم مرکز دایره محاطی مثلث محل برخورد نیمسازهای داخلی آن است از طرفی در مثلث متساوی الاضلاع میانه‌ها و نیمسازها برهم منطبق هستند در نتیجه مرکز دایره محاطی مثلث همان محل برخورد میانه‌های این مثلث است و می‌دانیم محل برخورد میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند.

$$OA = 2OH \Rightarrow OA = 2r \Rightarrow AH = OA + OH = 2r + r = 3r$$

$$\left.\begin{array}{l} AH = 3r \\ AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{2} = 3r \Rightarrow a = \frac{6r}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 2r\sqrt{3}$$

$$\text{محیط} = 2P = 3a = 3(2r\sqrt{3}) = 6r\sqrt{3}$$

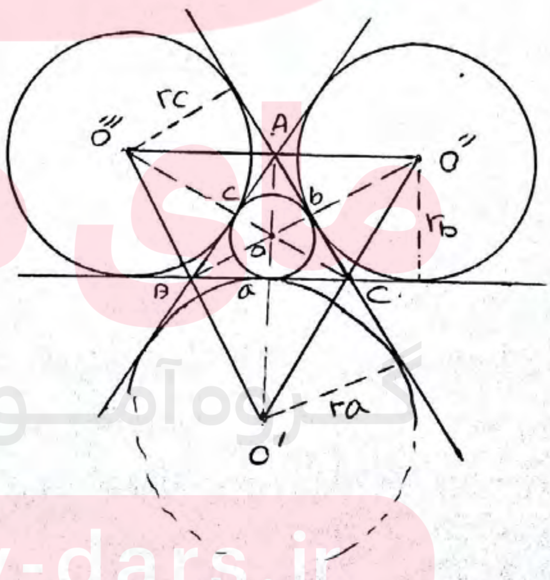
$$\text{مساحت} = S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}\,r^2$$

دایره محاطی خارجی مثلث :

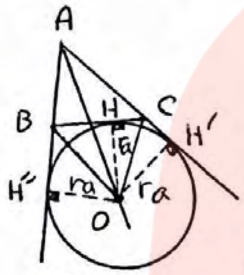
با توجه به این که نیمساز داخلی یکی از زاویه‌های داخلی هر مثلث با دو نیمساز خارجی زاویه‌های دیگر، در یک نقطه همرس‌اند، پس این نقطه از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث به یک فاصله است.

مطابق شکل (۱) نیمساز داخلی $\hat{A}$ با نیمسازهای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نقطه O' متقاطع است. فاصله نقطه O' از ضلع $BC=a$ و امتداد دو ضلع $AC=b$ و $AB=c$ یکسان است. بنابراین به مرکز O' و شعاعی معادل فاصله O' تا ضلع BC می‌توان دایره‌ای رسم کرد که بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC مماس باشد. به این دایره، دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌گوئیم. شعاع دایره محاطی خارجی نظیر راس A را با r_a نشان می‌دهیم

مطابق شکل (۲) هر مثلث دارای سه دایره محاطی خارجی است. در مثلث ABC، شعاع سه دایره محاطی خارجی عبارتست از: r_a، r_b، r_c



قضیه: ثابت کنید در مثلث $A\hat{B}C$ با طول اضلاع a و b و c، شعاع دایره‌های محاطی خارجی برابر است با: $r_a=\frac{S}{P-a}$ و $r_b=\frac{S}{P-b}$ و $r_C=\frac{S}{P-C}$ که در این فرمول‌ها P نصف محیط مثلث است.



اثبات: مطابق شکل، دایره محاطی خارجی نظیر یک رأس مثلاً رأس A را رسم می‌کنیم و از مرکز این دایره بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC عمود می‌کنیم:

$$S_{A\overset{\triangle}{B}C}=S_{O\overset{\triangle}{A}B}+S_{O\overset{\triangle}{A}C}-S_{O\overset{\triangle}{B}C}$$

$$\Rightarrow S=\frac{OH''\times AB}{2}+\frac{OH'\times AC}{2}-\frac{OH\times BC}{2}=\frac{r_a.c}{2}+\frac{r_a.b}{2}-\frac{r_a.a}{2}$$

$$\Rightarrow S=\frac{r_a}{2}(b+c-a)$$

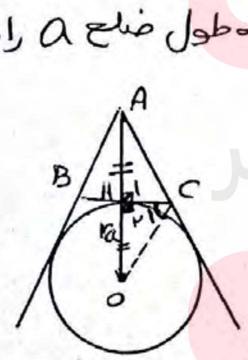
می دانیم: محیط $=2P=a+b+c$

$$S=\frac{r_a}{2}(b+c+a-2a)\Rightarrow S=\frac{r_a}{2}(2P-2a)\Rightarrow S=\frac{r_a}{2}\times 2(P-a)$$

$$\Rightarrow S=r_a(P-a)\Rightarrow \boxed{r_a=\frac{S}{P-a}}$$

بهمین ترتیب ثابت می‌شود: $r_b=\frac{S}{P-b}$ و $r_C=\frac{S}{P-C}$

مثال) شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a را بدست آورید.



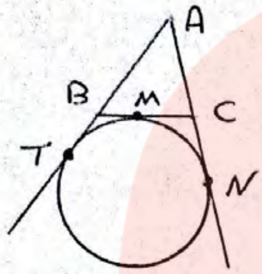
مطابق شکل نیمساز داخلی A (ارتفاع مثلث) و نیمساز خارجی $\hat{C}$ در نقطه O همدیگر را قطع کرده‌اند

$$\text{داخلی}\ \hat{C}=60^\circ \Rightarrow \text{خارجی}\ \hat{C}=120^\circ \Rightarrow \hat{C}_1=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ\\ \text{مشترک}\ CH=CH\\ \hat{C}_1=\hat{C}=60^\circ\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{زض ز}} A\overset{\triangle}{C}H\cong O\overset{\triangle}{C}H\Rightarrow OH=AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow r_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

نتیجه: شعاع دایره‌های محاطی خارجی در مثلث متساوی‌الاضلاع باهم برابرند

مثال) مطابق شکل طول اضلاع مثلث ABC عبارتست از: $a=3$ و $b=5$ و $c=7$ اگر دایره محاطی خارجی این مثلث نظیر رأس A رسم شده باشد حاصل $\frac{BM}{MC}$ را بیابید.



$$AT=AN \Rightarrow AB+BT=AC+CN \Rightarrow c+BM=b+MC$$

$$\Rightarrow 7+BM=5+MC \Rightarrow \boxed{BM-MC=-2} \quad (1)$$

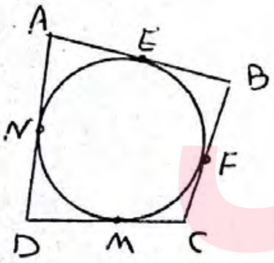
$$BM+MC=BC=a \Rightarrow \boxed{BM+MC=3} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} BM-MC=-2 \\ BM+MC=3 \end{cases} + \Rightarrow 2BM=1 \Rightarrow BM=0.5 \Rightarrow MC=2.5$$

$$\frac{BM}{MC}=\frac{0.5}{2.5}=\frac{1}{5}$$

چهار ضلعی محیطی:

قضیه: یک چهار ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع طول دو ضلع مقابلش برابر مجموع طول دو ضلع مقابل دیگر باشد.

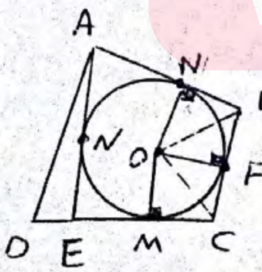


اثبات: فرض کنیم $ABCD$ چهارضلعی محیطی باشد

ثابت می‌کنیم: $AB+DC=AD+BC$

$$\left.\begin{aligned} AE&=AN \\ BE&=BF \;+ \\ CM&=CF \;+ \\ DM&=DN \end{aligned}\right\} \xrightarrow{+} (AE+BE)+(CM+DM)=(AN+DN)+(BF+CF)$$

$$\Rightarrow \boxed{AB+CD=AD+BC}$$



عکس قضیه: فرض کنیم $AB+DC=AD+BC$ ثابت می‌کنیم $ABCD$ چهارضلعی محیطی است.

مطابق شکل نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نقطه O همرس‌اند

$$\left.\begin{aligned} &O \text{ روی نیمساز } B \Rightarrow ON=OF \\ &O \text{ روی نیمساز } C \Rightarrow OF=OM \end{aligned}\right\} \Rightarrow ON=OF=OM=R$$

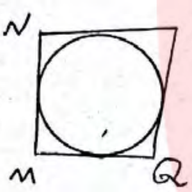
دایره‌ای به مرکز O و شعاع R رسم می‌کنیم دایره بر سه ضلع AB و BC و CD مماس است اگر بر AD هم مماس باشد حکم ثابت شده است

فرض کنیم این دایره بر AD مماس نباشد (فرض خلف) از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند:

$$\left.\begin{aligned} AE + BC &= AB + EC \\ AD + BC &= AB + DC \quad \text{فرض} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

E همان D است ⇐ دایره بر AD نیز مماس است.

مثال: اگر $MN = x+4$ و $NP = 4x+5$ و $PQ = 3x+8$ و $QM = x+6$ اضلاع متوالی یک چهارضلعی محیطی باشند مقدار x را بیابید

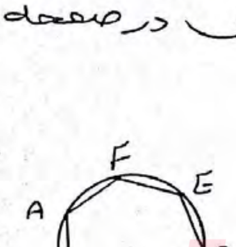


$$MN + PQ = NP + MQ$$

$$x+4+3x+8 = 4x+5+x+6 \Rightarrow x = 1$$

چند ضلعی محاطی:

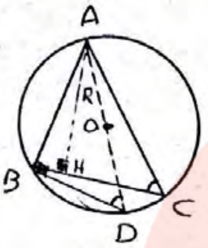
تعریف ۱: یک چند ضلعی را محاطی می‌گوئیم اگر و فقط اگر دایره‌ای در صفحه آن چند ضلعی وجود داشته باشد که از تمام رئوس آن چند ضلعی بگذرد. دایره گفته شده را دایره محیطی چند ضلعی می‌گوئیم. در شکل روبرو ABCDEF یک شش ضلعی محاطی است.



تعریف ۲: یک چند ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف تمام اضلاعش، در یک نقطه همرس باشند. این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.

نکته ریاضی: مرکز دایره محیطی مثلث، محل برخورد عمود منصف‌های آن است.

قضیه: ثابت کنید در مثلثی به اضلاع a و b و c و مساحت S، شعاع دایره محیطی از دستور $R=\frac{abc}{4S}$ بدست می‌آید.



فرض	شعاع دایره محیطی $R=\triangle ABC$
حکم	$R=\frac{abc}{4S}$

اثبات: ارتفاع نظیر ضلع BC (یعنی AH) را رسم می‌کنیم و از نقطه A به مرکز دایره (نقطه O) وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. B را به D وصل می‌کنیم زاویه B محاطی روبرو قطر و در نتیجه قائمه است.

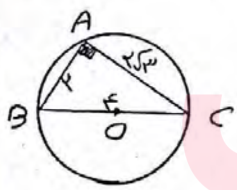
$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\hat{C}=\frac{\widehat{AB}}{2}\\ \hat{H}=\hat{B}=90\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زز}} \triangle ABD \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AB}{AH}=\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{HC}$$

$$\Rightarrow AH\cdot AD = AB\cdot AC \Rightarrow AH\cdot 2R = c\cdot b$$

$$\Rightarrow AH=\frac{bc}{2R}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH \Rightarrow S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{bc}{2R}\Rightarrow S=\frac{abc}{4R}\Rightarrow \boxed{R=\frac{abc}{4S}}$$

مثال) در مثلثی به طول اضلاع ۲√۳ و ۲ و ۴، شعاع دایره محیطی مثلث را بدست آورید.

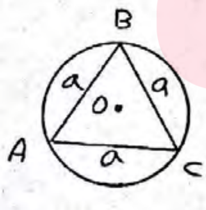


$$2^2+(2\sqrt{3})^2=4^2 \Rightarrow \text{مثلث قائم الزاویه}$$

$$S=\frac{2\times2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3} \Rightarrow R=\frac{abc}{4S}=\frac{4\times2\times2\sqrt{3}}{4\times2\sqrt{3}}\Rightarrow \boxed{R=2}$$

نتیجه: شعاع دایره محیطی مثلث قائم الزاویه برابر نصف وتر است.

مثال) شعاع و مساحت دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a را بیابید.

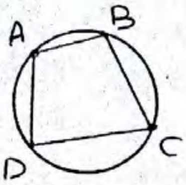


$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{a^3}{4(\frac{a^2\sqrt{3}}{4})}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \boxed{R=\frac{a\sqrt{3}}{3}}$$

$$S=\pi R^2=\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2\Rightarrow \boxed{S=\frac{\pi a^2}{3}}$$

چهارضلعی محاطی:

قضیه: یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویهٔ مقابلش مکمل یکدیگر باشند.

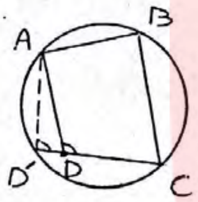


فرض	$ABCD$ یک چهارضلعی محاطی
حکم	$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی } \hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2} \\ \text{محاطی } \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BAD}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}+\frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD}}{2}=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

به همین ترتیب ثابت می شود: $\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$



عکس قضیه:

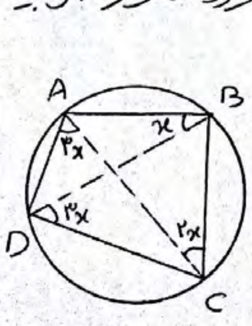
فرض	$\hat{A}+\hat{C}=\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$
حکم	$ABCD$ یک چهارضلعی محاطی

اثبات: می دانیم از سه نقطهٔ غیر واقع بر راس یک دایره می گذرد. دایره‌ای رسم می کنیم که از A و B و C بگذرد اگر دایره از D هم بگذرد حکم تمام است. فرض کنیم دایره از D نگذرد پس نقطه D' را روی دایره در نظر می گیریم $D\neq D'$ (فرض خلف) چهارضلعی $ABCD'$ محاطی است.

$$\left.\begin{array}{l} B+D'=180^\circ \\ \text{فرض } B+D=180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow B+D=B+D' \Rightarrow D=D'$$

و این تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال) در شکل روبرو از راس های چهارضلعی $ABCD$، یک دایره می گذرد مقدار x را بیابید.



$$\text{محاطی } D\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \Rightarrow 3x=\frac{\overset{\frown}{DC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{DC}=6x$$

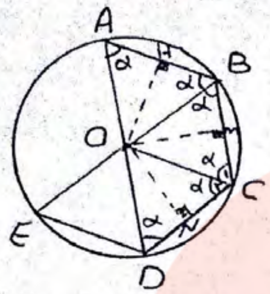
$$\text{محاطی } A\hat{B}D=\frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Rightarrow x=\frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=2x$$

$$\text{محاطی } A\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=4x$$

$$\text{محاطی } B\hat{D}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow 3x=\frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=6x$$

$$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AD}=360^\circ \Rightarrow 18x=360^\circ \Rightarrow \boxed{x=20^\circ}$$

قضیه: ثابت کنید هر n ضلعی منتظم محاطی است.



اثبات: عمود منصف AB و BC را رسم می کنیم

OH و OM همدیگر را در نقطه O قطع می کنند O روی

عمود منصف AB و BC است پس: ① $OA=OB=OC$

O را به D وصل می کنیم

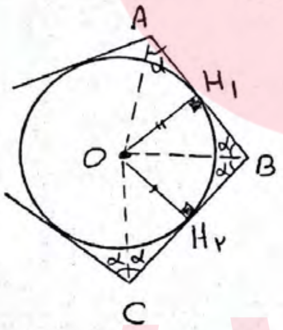
$$\left.\begin{aligned} BC&=CD \\ \hat{C}_1&=\hat{C}_2=\alpha \\ OC&=OC \quad \text{مشترک} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{OBC} \cong \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow OB=OD \quad ②$$

$$OA=OB=OC=OD \Leftarrow ①,②$$

بهمین ترتیب ثابت می شود $OA=OB=OC=OD=\dots=R$

پس رئوس n ضلعی روی این دایره هستند و n ضلعی منتظم محاطی است

قضیه: ثابت کنید هر n ضلعی منتظم محیطی است.



اثبات: نیمساز های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را رسم می کنیم تا

همدیگر را در O قطع کنند

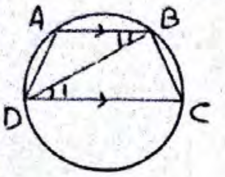
$$\left.\begin{aligned} \hat{A}_1&=\hat{B}_1=\alpha \\ AB&=BC \\ B_2&=C_1=\alpha \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OBC} \Rightarrow OH_1=OH_2=R$$

بهمین ترتیب ثابت می شود: $OH_1=OH_2=OH_3=\dots=R$ پس

دایره بر تمام اضلاع n ضلعی مماس است و n ضلعی منتظم محیطی است

تمرینات صفحه ۲۹ و صفحه ۳۰ و صفحه ۳۱ کتاب درسی

۱) ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.



فرض | ذوزنقه متساوی الساقین
حکم | ذوزنقه محاطی

$$\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A}+\hat{C}=180^\circ$$
$$\hat{A}+\hat{D}=180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B}+\hat{D}=180^\circ$$
$\Rightarrow$ ذوزنقه $ABCD$ محاطی است

فرض | ذوزنقه محاطی
حکم | ذوزنقه متساوی الساقین

$(AB \parallel CD$, مورب $BD) \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1 \Rightarrow \frac{\widehat{BC}}{2}=\frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{BC}=\widehat{AD} \Rightarrow AD=BC \Rightarrow$
$ABCD$ متساوی الساقین

۲) مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را بدست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

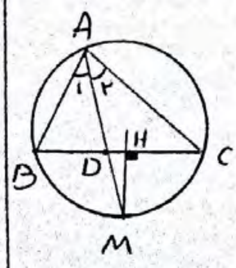
حل: می دانیم نقطه تقاطع عمود منصف ها در هر مثلث، مرکز دایره محیطی است پس AH عمود منصف است
و چون مثلث متساوی الاضلاع است عمود منصف ها میانه هم هستند و میانه ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می کنند

$$2OH=OA \Rightarrow 2OH=R \Rightarrow OH=\frac{R}{2} \qquad AH=R+\frac{R}{2}=\frac{3R}{2}$$

$$\overset{\triangle}{ACH}: \; AH^2=AC^2-CH^2 \Rightarrow \left(\frac{3R}{2}\right)^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{9R^2}{4}=\frac{3}{4}a^2 \Rightarrow a=\sqrt{3}R$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(\sqrt{3}R)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

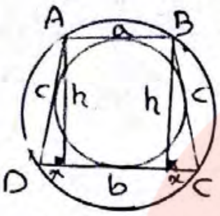
۳) ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند.



$BH=CH \qquad$ نیمساز $AD \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2 \Rightarrow \widehat{BM}=\widehat{MC}$

می دانیم مرکز دایره محیطی، روی عمود منصف قرار دارد و قطری که عمود بر وتر باشد وتر و کمان آنرا نصف می کند
پس امتداد عمود منصف روی امتداد نیمساز یعنی M دایره محیطی را قطع می کند.

۴) یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی، ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها



حل: ذوزنقه $ABCD$ محاطی است پس متساوی الساقین است (تمرین ۱) یعنی $AD=BC=c$ همچنین محیطی است پس: $a+b=c+c \Rightarrow c=\frac{a+b}{2}$

$$b=a+2x \Rightarrow x=\frac{b-a}{2}$$

$$h^2=c^2-x^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2-b^2+2ab-a^2}{4}=\frac{4ab}{4}=ab \Rightarrow h=\sqrt{ab}$$

$$S=\frac{(AB+CD)\times h}{2}=\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}=\underbrace{\frac{1}{2}(a+b)}_{\text{میانگین حسابی}}\times\underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{میانگین هندسی}}$$

---

۵) اگر r_a و r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد نشان دهید:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a و h_b و h_c اندازه های سه ارتفاع باشند نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

حل: اثبات قسمت اول: $S=Pr \Rightarrow r=\frac{S}{P} \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{P}{S}$

$r_a=\frac{S}{P-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a}=\frac{P-a}{S} \Rightarrow$ به همین ترتیب: $\frac{1}{r_b}=\frac{P-b}{S}$ و $\frac{1}{r_c}=\frac{P-c}{S}$

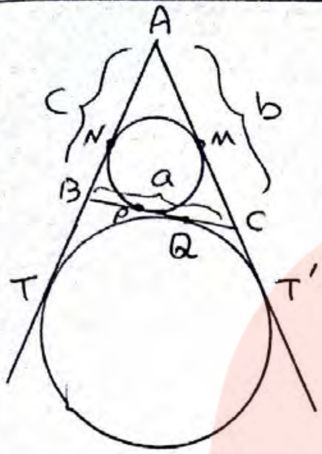
$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}=\frac{3P-(a+b+c)}{S}=\frac{3P-2P}{S}=\frac{P}{S}=\frac{1}{r}$$

اثبات قسمت دوم:

$$S=Pr \Rightarrow r=\frac{S}{P} \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{P}{S}$$

$S=\frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a=\frac{2S}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S} \xrightarrow[\text{ترتیب}]{\text{بهمین}} \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}$ و $\frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{2P}{2S}=\frac{P}{S}=\frac{1}{r}$$



۱۶) اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث $A\hat{B}C$ با اضلاع، M و N و P باشند و T و T' نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خطهای شامل دو ضلع باشند نشان دهید:

$$AM = AN = P - a$$
$$BN = BP = P - b \qquad , \quad AT = AT' = P$$
$$CM = CP = P - c$$

(P = نصف محیط)

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{AN + NB + AM + MC + BP + PC}{2} = \frac{2AN + 2PB + 2PC}{2}$$

$$\Rightarrow P = AN + \underbrace{PB + PC}_{a} \Rightarrow AN = AM = P - a$$

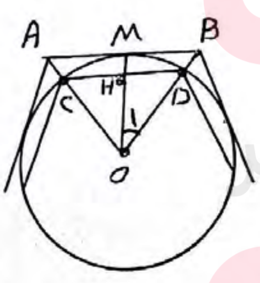
به همین ترتیب ثابت می شود:

$$BN = PB = P - b \qquad , \qquad CM = CP = P - c$$

$$\left.\begin{array}{l} AT = c + BT \\ AT' = b + CT' \end{array}\right\} \Rightarrow AT + AT' = c + b + (BT + CT') \xrightarrow[BT = BQ,\ CT' = CQ]{AT = AT'} 2AT = c + b + (BQ + CQ)$$

$$\Rightarrow 2AT = c + b + a \Rightarrow 2AT = 2P \Rightarrow AT = P$$

۱۷) یک دایره به شعاع r و n ضلعی های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه های ضلع های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند آنگاه:



$$AB = 2r\tan\frac{180}{n}$$

$$CD = 2r\sin\frac{180}{n}$$

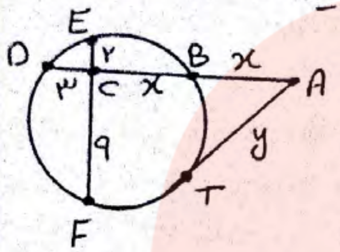
حل: $\hat{O} = \frac{360}{n} \Rightarrow \hat{O}_1 = \frac{\hat{O}}{2} = \frac{\frac{360}{n}}{2} = \frac{360}{2n} = \frac{180}{n}$

$$\overset{\triangle}{OHD}: \quad \sin\hat{O}_1 = \frac{HD}{r} \Rightarrow HD = r\sin\frac{180}{n} \Rightarrow CD = 2HD = 2r\sin\frac{180}{n}$$

$$\overset{\triangle}{OMB}: \quad tg\,\hat{O}_1 = \frac{MB}{OM} \Rightarrow MB = OM\, tg\hat{O}_1 = r\, tg\frac{180}{n} \Rightarrow AB = 2MB = 2r\, tg\frac{180}{n}$$

«تمرینات تکمیلی»

۱) در شکل روبرو از نقطه A مماس و قاطعی بر دایره رسم شده است مقادیر x و y را بیابید.



حل: با توجه به شکل دوتر BD و EF متقاطع اند پس:

$$CD \cdot CB = CE \cdot CF \Rightarrow 3 \times x = 2 \times 9 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

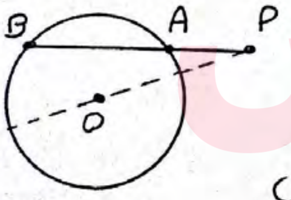
$$AT^2 = AB \cdot AD \Rightarrow y^2 = x(x+x+3) = 6(6+6+3) \Rightarrow y^2 = 90 \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{90}}$$

۲) دو دایره به شعاع های ۲ و ۳ مفروضند. اگر طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $3\sqrt{11}$ باشد طول مماس مشترک داخلی آنها را بیابید.

$$TT'_{\text{خارجی}} = \sqrt{d^2-(R-R')^2} \Rightarrow 3\sqrt{11} = \sqrt{d^2-(3-2)^2} \Rightarrow 99 = d^2-1 \Rightarrow \boxed{d=10}$$

$$TT'_{\text{داخلی}} = \sqrt{d^2-(R+R')^2} = \sqrt{10^2-(3+2)^2} = \sqrt{75}$$

۳) در شکل روبرو اگر $AP=4$ و $AB=6$ و محیط دایره 16π باشد فاصله نقطه P از مرکز دایره را بیابید.



حل: نقطه P را به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می دهیم. می دانیم حاصلضرب قطعات حاصل روی هر قاطع مرسوم از یک نقطه خارج دایره برابر مقدار ثابت d^2-R^2 است $(OP=d)$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R \Rightarrow 16\pi = 2\pi R \Rightarrow \boxed{R=8}$$

$$PA \cdot PB = d^2-R^2 \Rightarrow 4(4+6) = d^2-8^2 \Rightarrow d=\sqrt{104}$$