

ریاضی و آمار ۲

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی

و علوم و معارف اسلامی

فصل دوم، درس ۳

اعمال بر روی توابع

در عمل اصلی راد، ریاضی می‌شناسیم، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم
 برای توابع f و g با دامنه‌های دلخواه می‌توانیم، حرکت از عمل‌های
 بالا را تعریف کنیم به شرطی که ابتدا اشتراک دو دامنه را به دست
 آوریم. یعنی در ابتدا سراغ دامنه‌های مشترک می‌رویم.

حال یک مثال به ادامه بحث می‌رویم

مثال: اگر تابع $f = \{(-۳, ۱), (۲, ۷), (۴, ۱)\}$ باشد و
 تابع $g = \{(۱, ۹), (۳, ۵), (۲, ۴)\}$ را داشته باشیم

الف) دامنه و برد هر کدام را بنویسید

Important note:

ب) تابع $f+g$ و $f \times g$ را شکل دهید.

پایه صفت الف به بیارسان است

$$D_f = \{-۳, ۱, ۲\}$$

$$R_f = \{۴, ۷, ۸\}$$

$$D_g = \{۱, ۲, ۳\}$$

$$R_g = \{۴, ۵, ۹\}$$

همانطور که قبلاً بیان کردیم، ابتدا مولفه‌های اول مشترک (دامنه‌های مشترک) بین دو تابع f و g را بیابیم.

$$D_f \cap D_g = \{۱, ۲\}$$

اعداد ۱، ۲ دامنه مشترک f و g هستند.

حال توابع f و g را تنها با دامنه‌های مشترکشان می‌نویسیم.

$$f = \{(۱, ۴), (۲, ۷)\}$$

$$g = \{(۱, ۹), (۲, ۴)\}$$

در ادامه هر عملی که خواسته شده است (+, -, ×, ÷)

را فقط روی مولفه‌های دوم تابع یعنی برد تابع انجام می‌دهیم.
(وقت کنید دامنه‌های مشترک هیچ تغییری نمی‌کنند)

$$f+g = \{(۱, ۴+۹), (۲, ۷+۴)\} = \{(۱, ۱۳), (۲, ۱۱)\}$$

Important note: $f \times g = \{(۱, ۴ \times ۹), (۲, ۷ \times ۴)\} = \{(۱, ۳۶), (۲, ۲۸)\}$

نکته: اگر دو تابع هیچ دامنه مشترکی نداشته باشند

هیچ یک از اعمال بالا را نمی توان بین آن ها

انجام داد

$f - g$ و $f \div g$ را برای مثال قبل به دست می آوریم

$$(f - g)(x) = \{(1, 4-9), (2, 7-4)\} = \{(1, -5), (2, 3)\}$$

$$(f \div g)(x) = \frac{f}{g}(x) = \{(1, 4 \div 9), (2, 7 \div 4)\} = \{(1, \frac{4}{9}), (2, \frac{7}{4})\}$$

← پس برای تشکیل دال توابع مجموع، تفاضل، حاصل ضرب

و تقسیم دو تابع، ابتدا دامنه مشترک دو تابع را به دست آورده

و هر عمل که بین دو تابع صورت گرفته را روی خروجی ها انجام می دهیم

پس به طور خلاصه اعمال جبری روی توابع به صورت زیر تعریف می شود

(به دامنه تابع ایجاد شده دقت کنید)

$$① (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$② (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad , \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

Important note:

۳) $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$

۴) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

در مورد آخر، همان تقسیم دو تابع، برای اینکه دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بدین کنیم، ابتدا اشتراک دامنه های f و g را بدین کنیم سپس آن‌های که تابع g (تابع درخرج است) را حذف می‌کنیم

مثال: اگر $f = \{(1,4), (2,1), (3,6)\}$, $g(x) = \{(2,0), (4,3), (3,2)\}$ باشند، حاصل $\frac{f}{g}(x)$ را بدین دست آورید

ابتدا دامنه $\frac{f}{g}$ را بدین کنیم

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{2, 3\} - \{2\} = \{3\}$

وقت کنید زوج مرتب (۳،۲) در تابع g ، خودی اش صفر است پس مؤلفه اول آن یعنی عدد ۳ را باید از دامنه مشترک

Important note:

دو تابع حذف کنیم بنابراین تنها مؤلفه مشترک ۳ باقی می‌ماند

$$f = \{(3, 4)\}$$

$$g = \{(3, 2)\} \Rightarrow \frac{f}{g}(x) = \left\{ \left(x, \frac{4}{2} \right) \right\} = \{(3, 2)\}$$

مثال: اگر $f = \{(1, 2), (-1, 3), (4, 5), (2, 3)\}$

$$g = \{(-1, 4), (7, 2), (4, 3), (1, 0)\}$$

باشند تابع $g+2f$ را تشکیل دهد.

ابتدا دامنه مشترک g و $2f$ را بدای کنیم

$$Dg = \{-1, 7, 4, 1\}$$

$$\Rightarrow D_{2f \cap g} = \{-1, 4\}$$

$$D_{2f} = D_f = \{1, -1, 4, 2\}$$

$$(g+2f)(x) = \left\{ \left(-1, 4+2 \times 3 \right), \left(4, 2+2 \times 5 \right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(-1, 10 \right), \left(4, 12 \right) \right\}$$

توجه داشته باشید جویهای g با دو برابر جویهای f جمع می شوند $(g+2f)$

$$f = \{(3, -2), (0, 1), (-1, 2)\}$$

$$g = \{(3, 1), (-1, 0), (-2, 7), (2, 0)\}$$

$$D_{\frac{f+g}{f}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0\}$$

$$= \{3, -1\}$$

$$\left(\frac{f+g}{f}\right)(x) = \left\{ \left(3, \frac{-2+1}{-2}\right), \left(-1, \frac{2+0}{2}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \left(3, +\frac{1}{2}\right), (-1, 1) \right\}$$

$$D_{\frac{f}{f \times g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid f(x) = 0 \text{ or } g(x) = 0\}$$

دقت شود هر x که خارج دامنه کند

باید از دامنه مشترک تابعها حذف شود

$$D_{\frac{f}{f \times g}} = \{3, -1\} - \{-1\} = \{3\}$$

Important note:

$$\left(\frac{f}{f \times g}\right)(x) = \left\{ \left(3, \frac{-2}{-2 \times 1} \right) \right\} = \left\{ (3, +1) \right\}$$

مثال، اگر $f = \{ (3, 5), (4, 7), (2, -3) \}$ باشد و

$$g(x) = x^2 + 7x \text{ باشد}$$

حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $(f+g)(2)$ ب) $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$

با توجه به تعریف اعمال روی توابع، داریم

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = -3 + 18 = 15$$

$$f(2) = -3 \quad \text{و} \quad g(2) = 2^2 + 7 \times 2 = 4 + 14 = 18$$

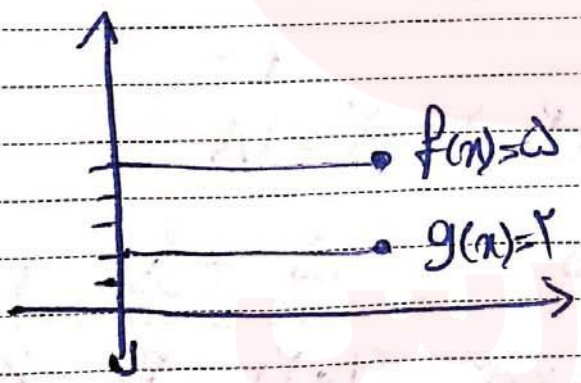
$$\text{ب) } \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{5}{3^2 + 7 \times 3} = \frac{5}{9 + 21} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

اعمال روی توابع به شکل هندسی (نمودار توابع)

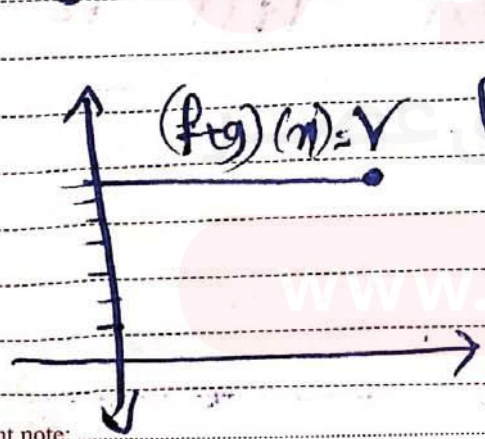
اگر نمودار توابع f و g را داشته باشیم و بخواهیم از روی آن ها نمودار توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ یا $\frac{f}{g}$ را به دست آوریم ، لازم است از روی نمودار هر دو تابع f و g ، مقادیر هر دو تابع را در نقاط مشترک به دست آوریم ، سپس اعمال جبری خواسته شده را بر روی مقادیر انجام می دهیم و یا خود به اعداد به دست آمده نمودار خواسته شده را رسم می کنیم

مثال : اگر نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ را داشته باشیم ،

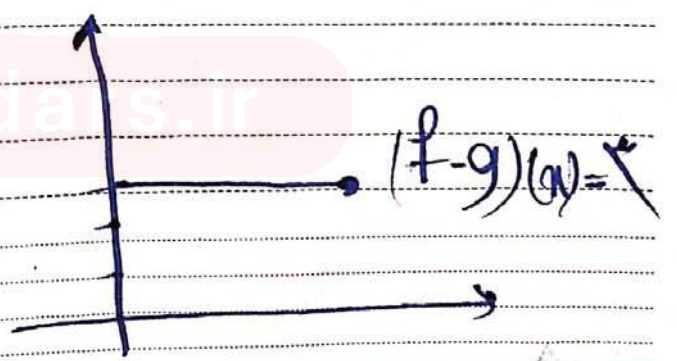
$(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ را رسم کنید



جواب : ابتدا دامنه مشترک توابع را پیدا می کنیم

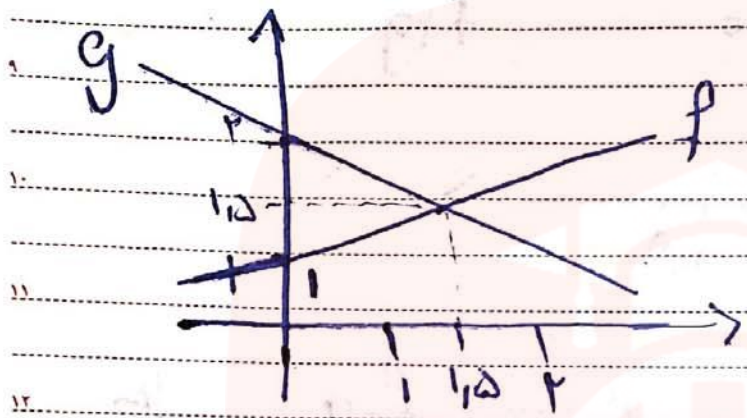


پس بر $(f+g)(x)$ را به دست می آوریم



Important note:

مثال: نمودارهای تابع f و g در دستگاه زیر رسم شده اند
 با توجه به آن‌ها، نمودار تابع‌های $f+g$ و $f-g$ را رسم کنید



جواب: در شکل بالا هر دو تابع f و g خط هستند و هر دو تابع از
 دو تابع خطی باشند توابع $f+g$ و $f-g$ نیز خطی
 خطی خواهند بود.

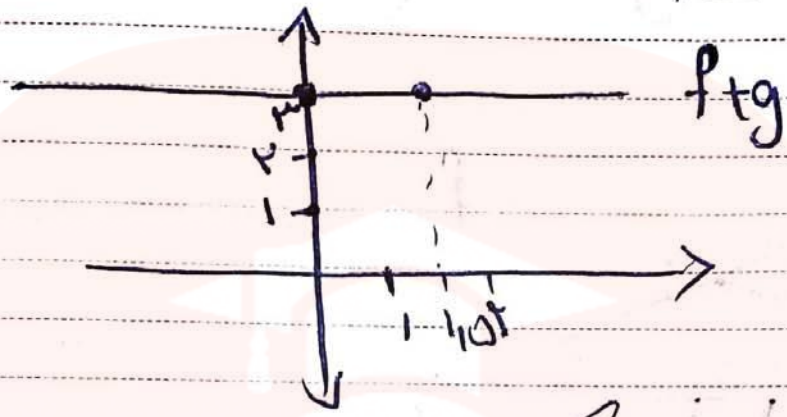
دو نقطه مشترک از توابع f و g را پیدا می‌کنیم پس از روی آن
 دو نقطه از توابع $f+g$ و $f-g$ را به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ g(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(0) = 1+2 = 3 \Rightarrow (0, 3) \text{ نقطه مشترک } f+g$$

$$\begin{cases} f(1.5) = 1.5 \\ g(1.5) = 1.5 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(1.5) = f(1.5) + g(1.5) = 1.5 + 1.5 = 3$$

Important note:

پس نمودار $f+g$ را با استفاده از دو نقطه ای که پیدا کردیم یعنی نقاط $(۰,۳)$ و $(۳,۱)$ رسم می کنیم



حال $f-g$ را رسم می کنیم

$$\begin{aligned} (۰,۱) \in f \\ (۰,۲) \in g \end{aligned} \Rightarrow (f-g)(۰) = f(۰) - g(۰) = ۱ - ۲ = -۱$$

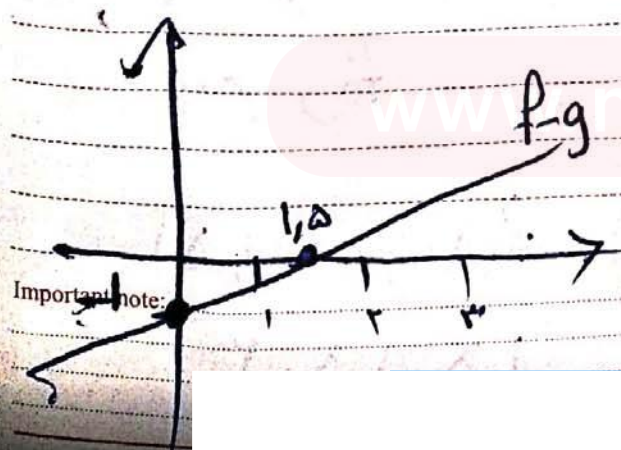
$$\Rightarrow (۰, -۱) \in (f-g)$$

حال نقطه دوم را پیدا می کنیم

$$\begin{aligned} (۱,۵) \in f \\ (۱,۵) \in g \end{aligned} \Rightarrow (f-g)(۱,۵) = f(۱,۵) - g(۱,۵)$$

$$= ۱,۵ - ۱,۵$$

$$= ۰$$



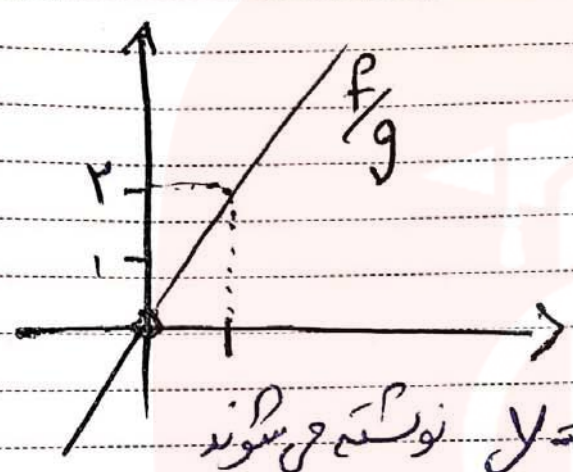
بنابراین نقطه دوم در تابع $f-g$ برابر $(۱,۵)$ است

مسئله (میزان نایب صحنه ۵۴)

آذر

شنبه

اگر $f(x) = x^2$ باشد و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت
 نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید.



تابع از نمودار f/g مشخص است
 که یک تابع خطی است

توابع خطی به صورت $y = mx + b$ نوشته می شوند

از آنجا که خط فوق از مبدأ یعنی $(0,0)$ می گذرد پس خط بالا
 یک خط مبدأ گذر است و عرض از مبدأ ندارد یعنی $b = 0$

پس $y = mx$. با استفاده از دو نقطه $(0,0)$ و $(1,2)$
 در نمودار بالا شیب خط را پیدا می کنیم

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow y = mx \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

حال باید جای گذارن ساده تابع $g(x)$ را به دست می آوریم

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 2x \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 2x$$

Important note:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \frac{x^2}{g(x)} = 2x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$$