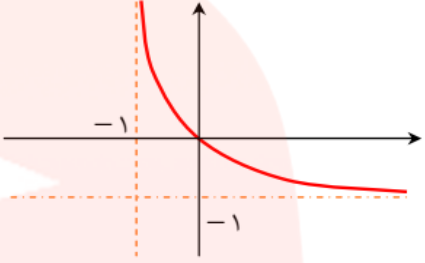
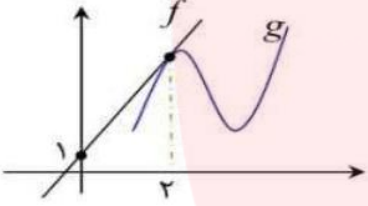


سوالیات آزمون شبه نهایی درس : ریاضی ۳		رشته : علوم تجربی	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :		تاریخ: ۱۳/۰۲/۱۴۰۲		
تعداد صفحه: ۲ صفحه		اداره کل آموزش و پرورش استان قزوین		
ردیف		سوالیات (استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است)		
۱	۱/۲۵	<p>درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) تابع <math>y = 2 + 3x^2(1-x)</math> یک تابع چند جمله ای از درجه سوم است.</p> <p>ب) تابع <math>f(x) =  x-2  +  x-1 </math> روی بازه <math>[1, +\infty)</math> اکیدا صعودی است.</p> <p>پ) اگر تابع <math>f</math> در <math>x = a</math> پیوسته باشد، آنگاه <math>f</math> در <math>a</math> مشتق پذیر است.</p> <p>ت) باقیمانده تقسیم عبارت <math>2x^2 - 6x - 1</math> بر <math>x - 2</math> برابر ۵ است.</p> <p>ث) هرچه خروج از مرکز بیضی به یک نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده تر است.</p>		
۲	۰/۷۵	<p>جا های خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) در تابع <math>f(x) = 3x^3 + ax^2 + 11</math> داریم <math>f''(1) = -9</math>، مقدار <math>a</math> برابر است با .....</p> <p>ب) اگر <math>f = \{(1,4), (2,3), (5,-1)\}</math> و <math>g = \{(-2,2), (0,1), (2,-1)\}</math> باشد حاصل <math>(fog)^{-1}(4)</math> برابر است با .....</p> <p>ت) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن یک ..... است.</p>		
۳	۰/۵	<p>اگر دامنه تابع <math>y = f(x)</math> برابر <math>(-1, 2)</math> و برد آن <math>[-2, 3]</math> باشد، دامنه و برد تابع <math>y = -3f\left(\frac{x}{2}\right) + 1</math> را بدست آورید.</p>		
۴	۱	<p>اگر <math>f(x) = \sqrt{x-2}</math> و <math>g(x) = 3x-2</math> باشد، ضابطه و دامنه ی تابع <math>fog</math> را با استفاده از تعریف بدست آورید.</p>		
۵	۱	<p>ضابطه تابع مثلثاتی مربوط به نمودار زیر را بنویسید.</p>		
۶	۱	<p>نمودار تابع با ضابطه ی <math>y = \cos(x)</math> و خط به معادله ی <math>y = \frac{\sqrt{3}}{2}</math> در دستگاه زیر رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید.</p>		
۷	۱/۷۵	<p>حاصل حدود زیر را بیابید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{ 2x-1 }</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}</math></p>		

سوالات آزمون شبه نهایی درس : ریاضی ۳		رشته : علوم تجربی	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :		تاریخ: ۱۳/۰۲/۱۴۰۲		
تعداد صفحه: ۲ صفحه		اداره کل آموزش و پرورش استان قزوین		
دانش آموزان پایه دوازدهم در اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۲				
ردیف	سوالات (استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است)			
۸	نمودار تابع $f$ به شکل زیر است، تساوی ها را کامل کنید.			
۰/۵	الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \dots$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$			
۹	معادله ی خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی بدست آورید.			
۱۰	در شکل زیر تابع خطی $f$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $g$ مماس شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 4$ باشد مقدار $f(1) + g(2) + g'(2)$ را محاسبه کنید.			
۱/۲۵				
۱۱	مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq 1 \\ 2x^3 & x > 1 \end{cases}$ را در نقطه ی $x = 1$ بررسی کنید.			
۱/۵				
۱۲	مشتق توابع زیر را بدست آورید. ( ساده کردن مشتق الزامی نیست)			
۱/۵	الف) $g(x) = (x^2 + 1)(3x - 5)x^2$ ب) $f(x) = \frac{2\sqrt{x+3}}{x+7}$			
۱۳	گنجایش بشکه ای ۶۰ لیتر آب است که در ته آن سوراخی تعبیه شده است. اگر حجم آب باقیمانده در بشکه از رابطه $V = 60 \left(1 - \frac{t}{5}\right)^2$ بدست آید: الف) آهنگ تغییرمتوسط در بازه ی زمانی $[0, 30]$ چقدر است؟ ب) در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای $L/S$ $\frac{-48}{25}$ است؟			
۱/۵				
۱۴	با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x$ مشخص کنید تابع در چه بازه هایی اکیدا صعودی و در کدام بازه ها اکیدا نزولی است؟			
۱/۵				
۱۵	نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ را در بازه $[-1, 3]$ بدست آورید.			
۱/۲۵	ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع ۶۰ را در نظر بگیرید، میخواهیم از چهار گوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع $x$ برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم سپس لبه ی جعبه رابه اندازه ی $x$ برمی گردانیم تا یک جعبه ی در باز ساخته شود به طوری که حجم آن به صورت $V = (60 - 2x)^2 x$ است . مقدار $x$ چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر شود؟			
۱/۷۵	کانون های یک بیضی $(-5, 1)$ و $(1, 3)$ است، اگر $a = 6$ باشد : الف) مرکز بیضی را بیابید. ب) اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را بدست آورید.			
۲۰	جمع نمره	ریاضیات را باید به همه آموخت نه برای ریاضی دان شدن، بلکه برای خردمند شدن		

# بنام خدا

## پاسخ از : فرمول فتح اللهی

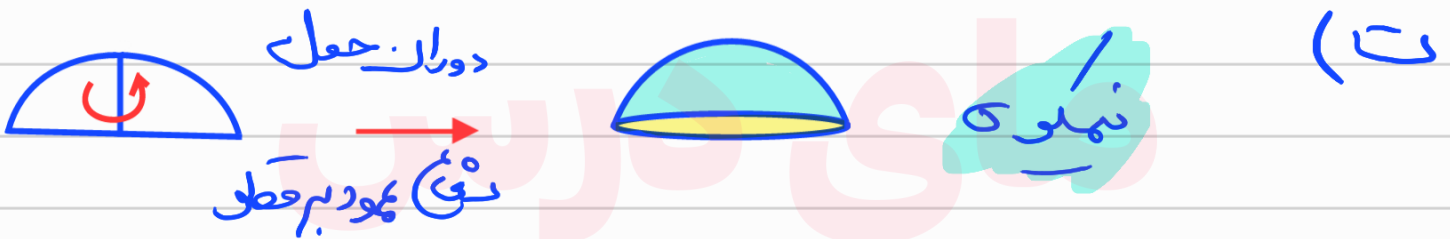
۱/۲۵	<p>درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) تابع <math>y = 2 + 3x^2(1-x)</math> یک تابع چند جمله ای از درجه سوم است. <b>ص</b></p> <p>ب) تابع <math>f(x) =  x-2  +  x-1 </math> روی بازه <math>[1, +\infty)</math> اکیدا صعودی است. <b>ع</b></p> <p>پ) اگر تابع <math>f</math> در <math>x = a</math> پیوسته باشد، آنگاه <math>f</math> در <math>a</math> مشتق پذیر است. <b>ع</b></p> <p>ت) باقیمانده تقسیم عبارت <math>2x^2 - 6x - 1</math> بر <math>x - 2</math> برابر ۵ است. <b>ع</b></p> <p>ث) هرچه خروج از مرکز بیضی به یک نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده تر است. <b>ص</b></p>	۱
------	---	---

۰/۷۵	<p>جا های خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) در تابع <math>f(x) = 3x^3 + ax^2 + 11</math> داریم <math>f''(1) = -9</math>، مقدار <math>a</math> برابر است با <math>-\frac{27}{2}</math>.</p> <p>ب) اگر <math>f = \{(1,4), (2,3), (5,-1)\}</math> و <math>g = \{(-2,2), (0,1), (2,-1)\}</math> باشد حاصل <math>(f \circ g)^{-1}(4)</math> برابر است با <math>0</math>.</p> <p>ت) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن یک <b>نیمکره</b> است.</p>	۲
------	---	---

الف)  $f'(x) = 9x^2 + 2ax \rightarrow f''(x) = 18x + 2a$

$f''(1) = -9 \rightarrow -9 = 18 + 2a \rightarrow a = -\frac{27}{2}$

ب)  $(f \circ g)^{-1}(4) = (g^{-1} \circ f^{-1})(4) = g^{-1}(f^{-1}(4)) = g^{-1}(1) = 0$



۰/۵	<p>اگر دامنه تابع <math>f(x) = y</math> برابر <math>(-1, 2)</math> و برد آن <math>[-2, 3]</math> باشد، دامنه و برد تابع <math>y = -3f\left(\frac{x}{2}\right) + 1</math> را بدست آورید.</p>	۳
-----	---	---

در  $f\left(\frac{x}{2}\right)$  طول نقاط  $D_f = (-1, 2)$  دامنه  $\xrightarrow{2 \text{ برابر عدد}}$   $D_g = (-2, 4)$

برد  $R_f = [-2, 3] \rightarrow R_{f\left(\frac{x}{2}\right)} = [-2, 3] \rightarrow R_{-3f\left(\frac{x}{2}\right)} = [-9, 7]$

$R_{-3f\left(\frac{x}{2}\right)+1} = [-8, 8]$

$D_f: x \geq 2$

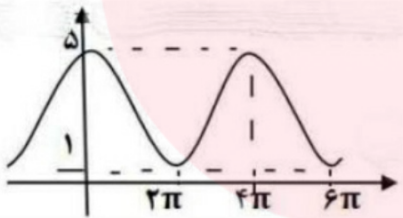
$D_g = \mathbb{R}$

$f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-2} = \sqrt{3x-2-2} = \sqrt{3x-4}$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{3x-2}_{B} \in x \geq 2\}$

$B: 3x-2 \geq 2 \rightarrow 3x \geq 4 \rightarrow x \geq \frac{4}{3}$

$D_{f \circ g} = A \cap B = \mathbb{R} \cap [\frac{4}{3}, +\infty) = [\frac{4}{3}, +\infty)$



خط میانی در  $x=2\pi$  افقی است. پس معادله  
 مربعی است  $y = a \cos bx + c$

$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5+1}{2} = 3 \rightarrow c = 3$

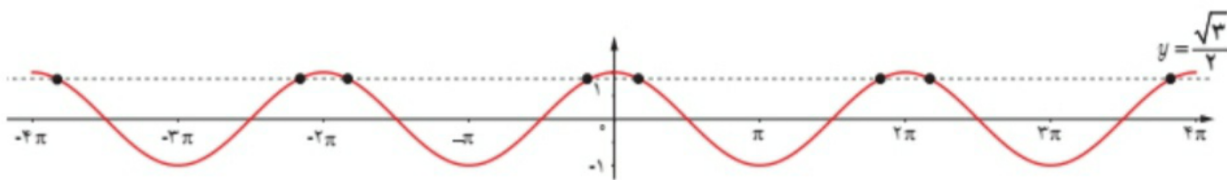
$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$  مقدار  $a > 0$   $\rightarrow a = 2$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \rightarrow |b| = \frac{1}{2} \rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$  با هر دو مقدار می توانه باشد.

$y = 2 \cos(\frac{x}{2}) + 3$

$y = 2 \cos(-\frac{x}{2}) + 3$

نمودار تابع با ضابطه  $y = \cos(x)$  و خط به معادله  $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$  در دستگاه زیر رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید.



$$\cos u = \frac{\sqrt{3}}{4} = \cos \frac{\pi}{6} \rightarrow u = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$k=0 \rightarrow u = \pm \frac{\pi}{6}$$

$$k=1 \rightarrow u = 2\pi \pm \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$k=2 \rightarrow u = 4\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$$

$$k=-1 \rightarrow u = -2\pi \pm \frac{\pi}{6} = \frac{-13\pi}{6}, \frac{-11\pi}{6}$$

$$k=-2 \rightarrow u = -4\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{-23\pi}{6}$$

۱/۷۵

الف)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{[x]-3}{|2x-1|}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$

حاصل حدود زیر را بیابید.

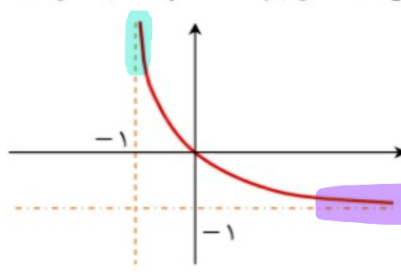
۷

$$\text{الف) } \lim_{u \rightarrow (\frac{1}{4})^+} \frac{[\frac{1}{4}] - 3}{2u-1} = \lim_{u \rightarrow (\frac{1}{4})^+} \frac{-3}{2u-1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{u \rightarrow (-1)} \frac{1-1}{-1+1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{u \rightarrow (-1)} \frac{(u^2-1)(u-\sqrt{2u+3})}{(u+\sqrt{2u+3})(u-\sqrt{2u+3})}$$

$$= \lim_{u \rightarrow (-1)} \frac{(u-1)(u+1)(u-\sqrt{2u+3})}{(u+\sqrt{2u+3})(u-\sqrt{2u+3})} = \lim_{u \rightarrow (-1)} \frac{(u-1)(u-\sqrt{2u+3})}{u-\sqrt{2u+3}}$$

$$= \frac{(-1-1)(-1-\sqrt{-2+3})}{-1-\sqrt{-2+3}} = \frac{-2(-2)}{-2} = -1$$

۰/۵	الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \dots$ $+\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$ $-1$	نمودار تابع $f$ به شکل زیر است، تساوی ها را کامل کنید. 
-----	--	---

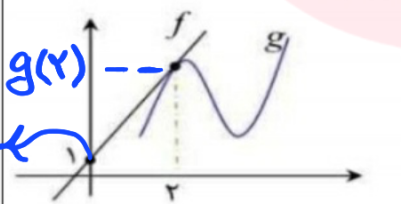
۱	معادله ی خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی بدست آورید.	۹
---	---	---

$$f(1) = -1 + 2 - 1 = 0 \rightarrow \text{نقطه } A(1, 0)$$

$$f'(x) = -2x + 2 \rightarrow \text{شیب خط مماس} = m = f'(1) = -1$$

$$\text{معادله خط مماس: } y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 0 = -(x - 1) \rightarrow y = -x + 1$$

۱/۲۵	در شکل زیر تابع خطی $f$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $g$ مماس شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 4$ باشد مقدار $f(1) + g(2) + g'(2)$ را محاسبه کنید. 	۱۰
------	---	----

$$B(2, g(2))$$

$$A(0, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2) = 4 = \frac{g(2) - y_A}{x_B - x_A} = \text{شیب خط مماس}$$

$$4 = \frac{g(2) - 1}{2 - 0} \rightarrow g(2) - 1 = 8 \rightarrow g(2) = 9$$

$$f(x) = mx + b \xrightarrow[\text{A}(0, 1)]{m = g'(2) = 4} f(x) = 4x + 1$$

$$f(1) + g(2) + g'(2) = 5 + 9 + 4 = 18$$

بررسی پیوستگی:

$$\lim_{u \rightarrow (1)^+} 2u^2 = 2(1)^2 = 2$$

حد از سمت چپ  $\neq$  حد از سمت راست  $\rightarrow$

$$\lim_{u \rightarrow (1)^-} u^2 + 2 = (1)^2 + 2 = 3$$

تابع  $f(u)$  در  $u = 1$  حد ندارد. بنابراین در این نقطه

ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.

الف)  $g(x) = (x^2 + 1)(3x - 5)x^2$

ب)  $f(x) = \frac{2\sqrt{x+3}}{x+7}$

الف)  $g(u) = (u^2 + 1)(3u^3 - 5u^2)$

$$g'(u) = 2u(3u^3 - 5u^2) + (u^2 + 1)(9u^2 - 10u)$$

ب)  $f'(u) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)(u+7) - (2\sqrt{u+3})}{(u+7)^2}$

۱۳ گنجایش بشکه ای ۶۰ لیتر آب است که در ته آن سوراخی تعبیه شده است. اگر حجم آب باقیمانده در بشکه از رابطه  $V = 60 \cdot \left(1 - \frac{t}{50}\right)^2$  بدست آید:

$$V(30) = 60 \cdot \left(1 - \frac{30}{50}\right)^2 = 60 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{48}{5} \quad \text{و} \quad V(0) = 60$$

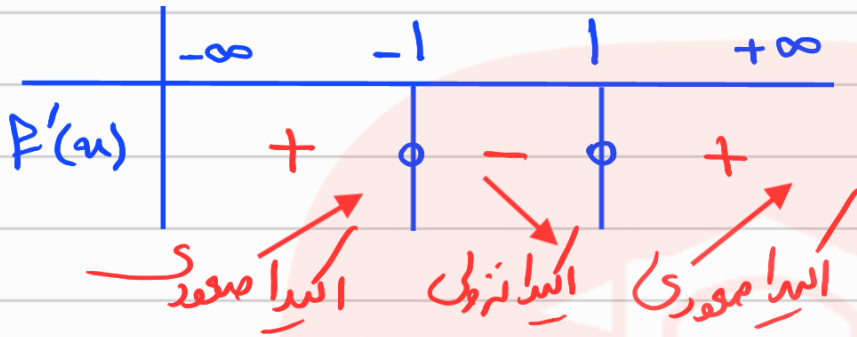
الف) آهنگ تغییر متوسط در بازه  $[0, 30]$  چقدر است؟

ب) در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای  $L/S$   $\frac{-48}{25}$  است؟

الف)  $\frac{V(30) - V(0)}{30 - 0} = \frac{\frac{48}{5} - 60}{30} = \frac{-252}{30}$

ب)  $V' = 60 \times 2 \left(1 - \frac{t}{50}\right) \left(-\frac{1}{50}\right) = \frac{-48}{25} \rightarrow t = 105$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$



ابتدا صعودی:  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

ابتدا نزولی:  $(-1, 1)$

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \checkmark \\ x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \checkmark \\ x = -\sqrt{2} \times \notin [-1, 3] \end{cases} \end{cases}$$

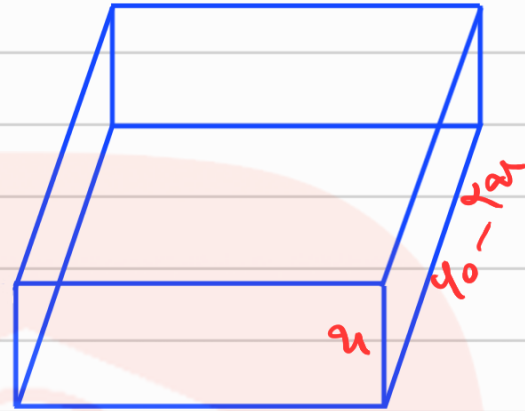
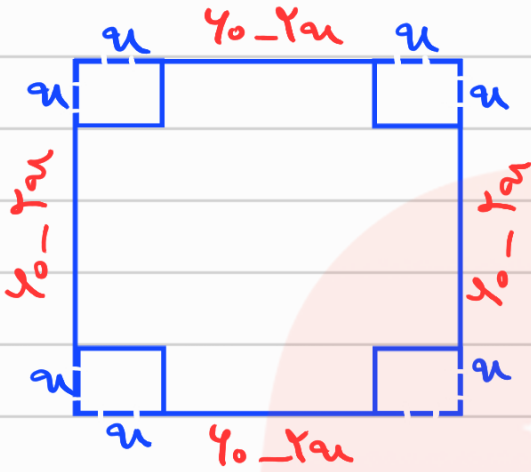
ابتدا و انتهای بازه هم خود نقاط بحرانی هستند.

www.my-dars.ir

نقاط بحرانی:  $\{-1, 0, \sqrt{2}, 3\}$



ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع ۶۰ را در نظر بگیرید، میخواهیم از چهار گوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع  $x$  برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم سپس لبه ی جعبه را به اندازه  $x$  برمی گردانیم تا یک جعبه ی در باز ساخته شود به طوری که حجم آن به صورت  $V = (60 - 2x)^2 x$  است. مقدار  $x$  چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر شود؟



$$60 - 2x > 0 \rightarrow 2x < 60 \rightarrow x < 30$$

$$V = \text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = (60 - 2x)^2 x$$

$$V' = 2(60 - 2x)(-2)x + (60 - 2x)^2 = 0$$

$$(60 - 2x)(-2x + 60 - 2x) = 0 \rightarrow (60 - 2x)(60 - 4x) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 60 - 2x = 0 \rightarrow x = 30 \text{ قوت} \\ 60 - 4x = 0 \rightarrow x = 15 \text{ قوت} \end{cases}$$

Fathollahi\_math

آموزش: اینستاگرام

www.my-dars.ir