فصل دوم:
قسمت اول: مبانی احتمال

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن یک پدیده یا آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گوییم.

نکته: فضای نمونه‌ای را معمولاً با حرف S نشان می‌دهند.

مثال: در پرتاب همزمان یک سکه و یک تاس، فضای نمونه‌ای را مشخص کنید.

S = {(پ،۱) (پ،۲) (پ،۳) (پ،۴) (پ،۵) (پ،۶) (ر،۱) (ر،۲) (ر،۳) (ر،۴) (ر،۵) (ر،۶)}

تعریف برآمد: به هر عضو فضای نمونه‌ای یک برآمد می‌گوییم.

مثال: فضای نمونه‌ای مربوط به یک تاس عبارتست از S = {۱,۲,۳,۴,۵,۶}
که به هرکدام از این اعداد یک برآمد گفته می‌شود.

سؤال امتحانی: تاسی را پرتاب می‌کنیم، اگر عدد کمتر از ۳ ظاهر شود، دو سکه را می‌اندازیم و اگر عدد بزرگتر از ۳ ظاهر شود، سه سکه را می‌اندازیم، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد.

الف) ۳۳　　ب) ۳۲　　ج) ۳۱　　د) ۳۰

جواب: واضح است که در پرتاب تاس سه حالت ممکن است بوجود آید.

الف) عدد ظاهرشده کمتر از ۳ باشد
یعنی اعداد ۲ یا ۱ ظاهر شوند
در این صورت باید دو سکه بیاندازیم

$\boxed{2}\times\boxed{2}\times\boxed{2}=8$

اعداد تاس　سکه اولی　سکه دومی

ب) عدد ظاهرشده بیشتر از ۳ باشد
یعنی اعداد ۶ یا ۵ یا ۴ ظاهر شود
در این صورت باید سه سکه بیاندازیم

$\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{2}\times\boxed{2}=24$

ج) عدد ۳ ظاهر شود. ۱ حالت خاص

n(S) = ۸ + ۲۴ + ۱ = ۳۳　یعنی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای S

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۲۳۷۰۲۷۲۵۲

پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای S را یک پیشامد تصادفی می‌گوییم که پیشامدهای تصادفی را با حروف A یا B یا ... نشان می‌دهیم.

مثال: در پرتاب یک تاس فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ می‌باشد که $A=\{2,3,5\}$ را یک پیشامد از این فضای نمونه‌ای می‌گوییم زیرا $A\subseteq S$

پیشامد غیرممکن: می‌دانیم که $\varnothing\subseteq S$ می‌باشد، پس تهی یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S است که به آن پیشامد نشدنی یا غیرممکن می‌گوییم

پیشامد قطعی: می‌دانیم که $S\subseteq S$ می‌باشد، پس S یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S است که به آن پیشامد قطعی می‌گوییم.

مثال: در پرتاب یک تاس:

الف) اگر A پیشامد رو آمدن عدد صفر باشد، آنگاه $A=\varnothing$ پس: A پیشامد غیرممکن است.

ب) اگر B پیشامد ظاهر شدن عددی طبیعی باشد، آنگاه $S=B$ پس: B پیشامد قطعی است.

نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه

الف) پیشامد $A\cup B$ زمانی رخ می‌دهد که: پیشامد A یا پیشامد B یا هردو رخ دهند.

ب) پیشامد $A\cap B$ زمانی رخ می‌دهد که: هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند.

ج) پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که: پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.

نکته: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده‌ی تصادفی و A پیشامدی از آن باشد در این صورت متمم A را با A' نشان می‌دهند و زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. در واقع دو پیشامد A و A' کل فضای نمونه‌ای S را تشکیل می‌دهند.

نکته:

$A\cup A'=S$　　$A'=S-A$

$n(A')=n(S)-n(A)$　　$A\cap A'=\varnothing$

نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه $A - B = A \cap B'$

نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ باشد، در این صورت به پیشامدهای A و B دو پیشامد ناسازگار می‌گوییم، در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچ وقت با هم رخ نمی‌دهند.

مثال: همواره هر پیشامد تصادفی مانند A و متمم آن یعنی A' دو پیشامد ناسازگارند زیرا: $A \cap A' = \emptyset$

$$\frac{\text{تعداد حالات مطلوب}}{\text{تعداد حالات ممکن}} = \frac{n(A)}{n(S)} = P(A) = \text{احتمال رخ دادن پیشامد } A \text{ در فضای نمونه‌ای } S$$

مثال: سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی

الف) فقط یک بار سکه «رو» می‌آید.

ب) حداکثر دو بار سکه «رو» می‌آید.

جواب:

سکه اول　سکه دوم　سکه سوم

$\boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{2} = 8 \rightarrow$ فضای نمونه‌ای S دارای ۸ عضو است.

A: از سه بار پرتاب فقط یک بار «رو» می‌آید. $\Rightarrow n(A) = \binom{3}{1} = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

B: حداکثر دو بار سکه «رو» بیاید $\Rightarrow n(B) = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 3 + 3 = 7$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}$$

نکته: در حل مسائل مربوط به خارج کردن k مهره از درون جعبه‌ای با n مهره:

الف) اگر k مهره را با هم خارج کنیم، در این حالت ترتیب مهره‌ها برای ما مهم نیست: $\binom{n}{k}$ = فضای نمونه

ب) اگر k مهره را یکی یکی و بدون جایگذاری خارج کنیم، در این حالت ترتیب مهم است.

فضای نمونه $= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

ج) اگر k مهره را یکی یکی و با جایگذاری خارج کنیم، در این حالت ترتیب مهم است.

فضای نمونه $= \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{k \text{ بار}} = n^k$

مثال: از جعبه‌ای که شامل پنج مهره‌ی سبز و چهار مهره‌ی آبی و دو مهره‌ی زرد می‌باشد، سه مهره به تصادف و باهم خارج می‌کنیم مطلوبست احتمال آنکه

الف) هر سه مهره سبز باشند.
ب) هر سه مهره همرنگ باشند.
ج) فقط دو مهره آبی باشد.

۲ = تعداد مهره‌های زرد
۴ = تعداد مهره‌های آبی
۵ = تعداد مهره‌های سبز

جواب:

$$n(S)=\binom{11}{3}=\frac{11!}{(11-3)!\,3!}=\frac{11!}{8!\,3!}=\frac{11\times10\times9\times\cancel{8!}}{\cancel{8!}\times6}=165$$

پیشامد سبز بودن هر سه مهره: $A \Rightarrow n(A)=\binom{5}{3}=10 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{165}=\frac{2}{33}$

پیشامد هم رنگ بودن هر سه مهره: $B \Rightarrow n(B)=\binom{5}{3}+\binom{4}{3}=14$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{14}{165}$$

یک مهره‌ی دیگر را از بین ۷ مهره‌ی باقیمانده انتخاب کنیم (غیر آبی‌ها)

C: پیشامد انتخاب دو مهره آبی و ۱ مهره‌ی غیر آبی $\Rightarrow n(C)=\binom{4}{2}\times\binom{7}{1}=42$

$$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{42}{165}=\frac{14}{55}$$

مثال: دو جعبه‌ی A و B داریم که در جعبه‌ی A سه مهره سفید و چهار مهره سیاه و در جعبه‌ی B دو مهره‌ی سفید و پنج مهره‌ی سیاه وجود دارد، از هر جعبه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم، احتمال همرنگ بودن دو مهره چقدر است.

جواب: فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی شامل تمام حالات انتخاب ۱ مهره از ۷ مهره‌ی جعبه‌ی A و یک مهره از ۷ مهره‌ی جعبه‌ی B می‌باشد. پس:

$$n(S)=\binom{7}{1}\times\binom{7}{1}=49$$

اکنون اگر C پیشامد هم رنگ بودن دو مهره باشد در این صورت باید یک مهره از A سفید و یک مهره از B نیز سفید باشد یا اینکه یک مهره از A سیاه و یک مهره از B نیز سیاه باشد، بنابراین

$$n(C)=\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{4}{1}\binom{5}{1}=26 \Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{26}{49}$$

مثال: ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک را به تصادف در یک ردیف قرار می دهیم، احتمال آن که همه کتابهای ریاضی در سمت چپ قرار بگیرند، چقدر است؟

$n(S)=7!$

| ۳ کتاب ریاضی | ۴ کتاب فیزیک |

$\Rightarrow n(A)=3!\times 4! \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3!\times 4!}{7!}=\frac{1}{35}$

مثال: از بین ۵ مرد و ۴ زن، سه نفر را به ترتیب انتخاب می کنیم، احتمال آنکه فقط نفر اول و آخر از یک جنس باشند چقدر است؟

$n(S)=9\times 8\times 7$

الف) $\frac{7}{18}$ ب) $\frac{5}{18}$

ج) $\frac{4}{18}$ د) $\frac{1}{18}$

A: (مرد، زن، مرد) یا (زن، مرد، زن)

$n(A)=5\times 4\times 4+4\times 5\times 3=5\times 4\times 7$

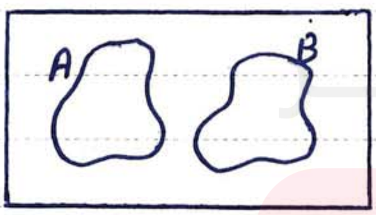
$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5\times 4\times 7}{9\times 8\times 7}=\frac{5}{18}$

نکته: برای هر پیشامد مثل A، احتمال رخ دادن آن را با $P(A)$ نمایش می دهیم که عددی حقیقی در بازه ی $[0,1]$ می باشد، در واقع اگر A پیشامدی دلخواه از فضای نمونه ای S باشد، آنگاه:

$0\leq P(A)\leq 1$ $\quad P(\emptyset)=0$

$P(S)=1$ $\quad P(A)=1-P(A')$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار ($A\cap B=\emptyset$) باشند آنگاه:



$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

نکته: برای هر دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه ای S داریم:

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

سؤال: نشان دهید که اگر A پیشامدی دلخواه از فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه:

الف) $P(A)=1-P(A')$

ب) $P(\varnothing)=0$

اثبات: چون A و A' دو پیشامد ناسازگارند

پس: (۱) $P(A\cup A')=P(A)+P(A')$

از طرفی می‌دانیم که (۲) $A\cup A'=S \Rightarrow P(A\cup A')=P(S)=1$

که از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$1=P(A)+P(\ ) \Rightarrow P(A)=1-P(A')$$

برای اثبات اینکه $P(\varnothing)=0$ است، می‌دانیم $\varnothing$ و S متمم یکدیگرند پس

$$P(\varnothing)=1-P(\varnothing') \Rightarrow P(\varnothing)=1-\cancelto{1}{P(S)}$$

$$\Rightarrow P(\varnothing)=1-1=0$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A')=0/3$ و $P(B)=0/6$ و $P(A\cap B)=0/4$

مقدار $P(A\cup B)$ را بدست آورید.

$$P(A)=1-P(A')=1-0/3=0/7$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/7+0/6-0/4=0/9$$

مثال: در یک جامعه ۳۰ درصد روزنامه‌ی الف و ۲۵ درصد روزنامه‌ی ب و ۴۰ درصد حداقل یکی از این دو روزنامه را می‌خوانند. اگر یک نفر از این جامعه را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال آنکه هر دو روزنامه را مطالعه کند، چقدر است؟

$P($روزنامه‌ی الف را بخواند$)=P(A)=0/3$

$P($روزنامه‌ی ب را بخواند$)=P(B)=0/25$

$P($حداقل یکی از روزنامه‌های الف یا ب را بخواند$)=P(A\cup B)=0/4$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0/4=0/3+0/25-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B)=0/15$$

مثال: اگر $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$ و $P(A')=\frac{3}{8}$ باشد مطلوبست:

الف) $P(B)$

ب) $P(B\cap A')$

ج) $P(A\cup B')$

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{5}{8}+P(B)-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{11}{24}$$

$$P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{11}{24}-\frac{1}{3}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')$$

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{5}{8}-\frac{1}{3}=\frac{7}{24}$$

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{11}{24}=\frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B')=\frac{5}{8}+\frac{13}{24}-\frac{7}{24}=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$$

مثال: اگر $2P(B)=P(A)=3P(A\cap B)$ باشد، حاصل $\frac{P(A-B)}{P(A\cup B)}$ کدام است؟

الف) $\frac{5}{9}$　　ج) $\frac{3}{7}$

ب) $\frac{4}{9}$　　د) $\frac{4}{7}$

$$2P(B)=P(A)=3P(A\cap B)\Rightarrow \begin{cases} P(A)=3P(A\cap B) & (1)\\ P(B)=\frac{3P(A\cap B)}{2}=\frac{3}{2}P(A\cap B) & (2)\end{cases}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\overset{(1)}{=\!=}3P(A\cap B)-P(A\cap B)=2P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\overset{(1),(2)}{=\!=}3P(A\cap B)+\frac{3}{2}P(A\cap B)-P(A\cap B)=\frac{7}{2}P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{P(A-B)}{P(A\cup B)}=\frac{2\cancel{P(A\cap B)}}{\frac{7}{2}\cancel{P(A\cap B)}}=\frac{2}{\frac{7}{2}}=\frac{4}{7}$$

بنابراین گزینه‌ی (د) صحیح است.

فصل دوم:
قسمت دوم: احتمال‌های غیرهم‌شانس

تعریف: هر زیرمجموعه‌ی تک عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم

قرارداد: اگر $A=\{x\}$ یک پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای S باشد، در این صورت به جای $P(\{x\})$ و به منظور ساده‌نویسی از $P(x)$ استفاده می‌کنیم. پس:

$$P(\{x\})=P(x)$$

تعریف: هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

نکته: در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس اگر $S=\{s_1,s_2,\dots,s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ یک زیرمجموعه‌ی k عضوی از S باشد، همواره داریم

الف) $0\leq P(A)\leq 1$

ب) $P(S)=1$

ج) $P(A)=P(a_1)+P(a_2)+\dots+P(a_k)$

که با توجه به خاصیت های (ب) و (ج) می‌توانیم نتیجه‌ی مقابل را بگیریم:

$$P(S)=P(s_1)+P(s_2)+\dots+P(s_n)=1$$

مثال: اگر $S=\{a,b,c\}$ و $P(a)=P(b)$ و $P(b)=3P(c)$ باشد، مقدار $P(c)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases}P(b)=3P(c)\\ P(a)=P(b)\end{cases}\Rightarrow P(a)=3P(c)$$

اکنون با توجه به تساوی $P(S)=P(a)+P(b)+P(c)=1$ داریم:

$$3P(c)+3P(c)+P(c)=1$$

$$7P(c)=1$$

$$P(c)=\frac{1}{7}$$

مثال: تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد ۳ برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی بزرگتر از ۴ باشد، $P(A)$ چقدر است؟

جواب: فضای نمونه ای عبارتست از $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

اکنون باید به هر عدد زوج احتمال x و به هر عدد فرد احتمال $3x$ را نسبت دهیم یعنی

$P(2)=P(4)=P(6)=x$

$P(1)=P(3)=P(5)=3x$

اکنون داریم:

$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$

$3x+x+3x+x+3x+x=1 \Rightarrow 12x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{12}$

$A=\{5,6\}$: پیشامد وقوع عددی بزرگتر از ۴ $\Rightarrow P(A)=P(5)+P(6)$

$=3x+x=4x$

$=4\times\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

قسمت سوم:

احتمال شرطی

در حالتی که فضای احتمال هم شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه (یعنی S) را کنار گذاشته و B را فضای نمونه در نظر بگیریم، که احتمال روی این فضای نمونه نیز هم شانس است. با این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می شود.

نکته: در فضای نمونه ای هم شانس داریم: $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$

مثال: در پرتاب دو تاس اگر حداقل یکی از اعداد رو شده ۵ باشد، با چه احتمالی عدد ۲ ظاهر می شود.

جواب:

B: پیشامد ظاهر شدن حداقل یک بار عدد ۵ در پرتاب دو تاس

$B=\{(1,5)(2,5)(3,5)(4,5)(5,5)(6,5),(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)\cancel{(5,5)},(5,6)\} \Rightarrow n(B)=11$

تکراری: پس حذف می شود.

A: پیشامد ظاهر شدن عدد ۲

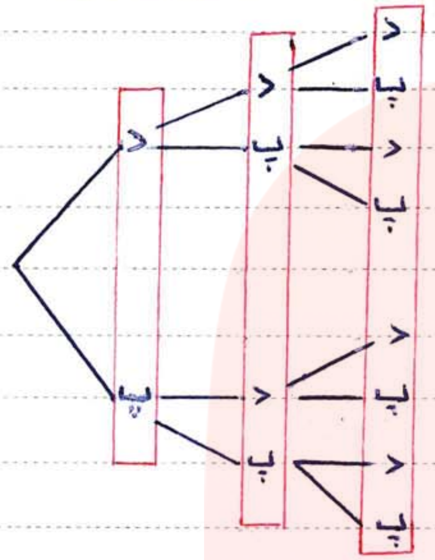
$A\cap B=\{(2,5),(5,2)\} \Rightarrow n(A\cap B)=2$

بنابراین:

$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{2}{11}$

مثال: در یک خانواده با ۳ فرزند، اگر فرزند اول پسر باشد، با چه احتمالی این خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر دارد؟

جواب: می‌دانیم که فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان یک خانواده با ۳ فرزند ۸ عضو دارد، زیرا



حال اگر B پیشامدی باشد که در آن فرزند اول پسر باشد داریم

$B = \{(\text{پ},\text{پ},\text{پ}),(\text{د},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{د},\text{پ}),(\text{د},\text{د},\text{پ})\} \Rightarrow n(B)=4$

اگر A پیشامدی باشد که در آن، خانواده دقیقاً دو فرزند پسر داشته باشد، داریم

$A \cap B = \{(\text{پ},\text{د},\text{پ}),(\text{د},\text{پ},\text{پ})\} \Rightarrow n(A\cap B)=2$

$$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال: اعداد ۱ تا ۸ را روی هشت کارت نوشته و ۳ کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم که مجموع اعداد این ۳ کارت فرد است، احتمال اینکه دقیقاً دو کارت با شماره‌ی زوج انتخاب کرده باشیم چقدر است؟

B: (شرط) پیشامد آن است که مجموع ۳ عدد انتخاب شده فرد است.

A: پیشامد آن است که دقیقاً دو کارت با شماره‌ی زوج انتخاب شده باشد

$$n(B) = \binom{4}{3} + \binom{4}{1}\times\binom{4}{2} = 4 + 6\times 4 = 28$$

انتخاب ۳ عدد فرد از چهار عدد فرد ۷، ۵، ۳، ۱

بنابراین $A\cap B$: پیشامدی است که باید دو عدد زوج و یک عدد فرد انتخاب شود

$$n(A\cap B) = \binom{4}{2}\binom{4}{1} = 24 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A)=2P(B)=0.4$ و $P(A\cup B)=0.5$ باشد، مقدار $P(A|B)$ را به دست آورید.

جواب:

$$2P(B)=0.4 \Rightarrow P(B)=\frac{0.4}{2}=0.2$$

$$P(A)=0.4$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.2-0.5=0.1$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.2}=\frac{1}{2}$$

مثال: یک فضای نمونه‌ای متشکل از ۴ برآمد a، b، c، d است. اگر $P(a)=P(b)=\frac{1}{3}$ و $P(c)=P(d)=\frac{1}{6}$ باشد، مطلوب است:

الف) محاسبه‌ی $P(\{a,b,c\})$ ب) محاسبه‌ی $P(\{a,b,c\}|\{b,c,d\})$

جواب: فضای نمونه‌ای به صورت $S=\{a,b,c,d\}$ می‌باشد که یک فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس است، پس طبق محاسبه‌ی احتمال در فضای نمونه‌ای غیر هم‌شانس، داریم:

$$P(\{a,b,c\})=P(a)+P(b)+P(c)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

ب) برای محاسبه‌ی احتمال شرطی داده شده فرض می‌کنیم $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{b,c,d\}$، بنابراین:

$$P(\{b,c\})=P(b)+P(c)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\{b,c\})}{P(\{b,c,d\})}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

$$P(\{b,c,d\})=P(b)+P(c)+P(d)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

بنابراین: $P(A|B)=\frac{3}{4}$

قانون ضرب احتمالات.

از رابطه‌ی $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ تساوی $P(A\cap B)=P(B).P(A|B)$ بدست می‌آید که به این

تساوی، قانون ضرب احتمالات می‌گوئیم و از این قانون برای بدست آوردن احتمال همزمان وقوع دو پیشامد استفاده می‌کنیم.

مثال: درون جعبه‌ای ۴ لامپ سالم و یک لامپ معیوب وجود دارد، دو لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم، احتمال آنکه لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد چقدر است؟

جواب: فرض می‌کنیم A: پیشامد سالم بودن لامپ اول و B: پیشامد معیوب بودن لامپ دوم باشد.
اکنون هدف ما محاسبه‌ی $P(A\cap B)$ می‌باشد.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

$P(B|A)=P($ معیوب بودن لامپ دوم | لامپ اول سالم باشد $)=\frac{1}{4}$

$P(A)=\frac{4}{5}$

مثال. ۶۰ درصد کارکنان یک سازمان، مرد هستند، ۲۵ درصد کل کارکنان این سازمان و ۲۰ درصد کارکنان مرد این سازمان چاق هستند. اگر یک نفر از بین آنها به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال مرد یا چاق می‌باشد؟

الف) ٪۸۲ ب) ٪۷۸

ج) ٪۷۳ د) ٪۷

A: پیشامد مرد بودن شخص انتخاب شده $\Rightarrow P(A)=٪۶$

B: پیشامد چاق بودن فرد انتخاب شده $\Rightarrow P(B)=٪۲۵$

$P($ چاق بودن | مرد بودن $)=P(B|A)=٪۲$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\Rightarrow ٪۲=\frac{P(A\cap B)}{٪۶}\Rightarrow P(A\cap B)=٪۱۲$ اکنون طبق قانون ضرب احتمالات

اکنون باید $P(A\cup B)$ را محاسبه کنیم

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=٪۶+٪۲۵-٪۱۲=۰٫۷۳$$

نکته: قانون ضرب احتمالات را می‌توان برای سه پیشامد نیز نوشت. یعنی اگر A_1 و A_2 و A_3 پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند، آنگاه:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) . P(A_2 | A_1) . P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

مثال: در کیسه‌ای دو گوی سفید، سه گوی سیاه و سه گوی سبز وجود دارد. از این کیسه، سه گوی و به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم، احتمال اینکه گوی اول سبز، گوی دوم سفید و گوی سوم سیاه باشد را بدست آورید.

جواب: پیشامدهای A_1 و A_2 و A_3 را به این صورت درنظر می‌گیریم:

A_1: گوی اول سبز A_2: گوی دوم سفید A_3: گوی سوم سیاه

اکنون باید $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ را محاسبه کنیم.

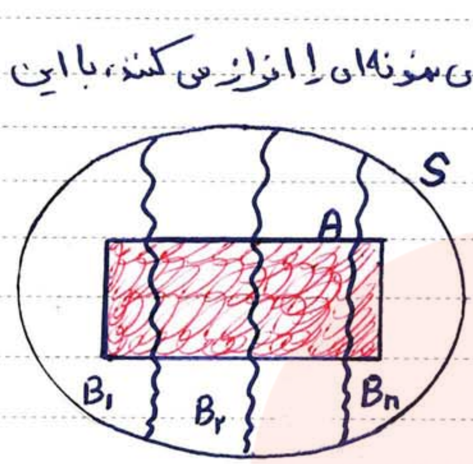
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) . P(A_2 | A_1) . P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

در ابتدا ۸ گوی درون کیسه قرار دارد، که سه تای آنها سبز می‌باشند، بنابراین احتمال آنکه گوی اول خارج شده، سبز باشد برابر $P(A_1) = \frac{3}{8}$ می‌باشد، با خارج شدن یک گوی سبز، ۷ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که دوتای آنها سفید هستند، بنابراین اگر گوی دوم را خارج کنیم، آنگاه احتمال سفید بودن آن برابر $P(A_2 | A_1) = \frac{2}{7}$ می‌باشد، و در نهایت با خارج کردن این گوی از کیسه، ۶ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که سه تای آنها سیاه هستند، پس با خارج کردن گوی سوم، احتمال سیاه بودن آن برابر $P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ می‌باشد، پس داریم:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{56}$$

قانون احتمال کل:

فرض کنید B_1، B_2 و ... و B_n پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند، با این شرایط، برای هر پیشامد دلخواه A داریم:



در این صورت:

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)+\dots+P(B_n).P(A|B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i).P(A|B_i)$$

مثال: درون جعبه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه قرار دارد. یک مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم، با کدام احتمال این مهره سفید است؟

جواب: مهره‌ی اول که از جعبه خارج می‌کنیم یا سفید است یا سیاه. بنابراین پیشامدهای B_1، B_2 که فضای نمونه‌ای S را به دو مجموعه افراز می‌کند، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

B_1: مهره‌ی اول خارج شده، سفید است. $P(B_1)=\frac{5}{9}$

B_2: مهره‌ی اول خارج شده، سیاه است. $P(B_2)=\frac{4}{9}$

اگر A پیشامد سفید بودن مهره‌ی دوم باشد، آنگاه:

الف) با خارج کردن یک مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه در جعبه باقی می‌ماند و

$P(A|B_1)=\frac{4}{8}$

ب) با خارج کردن یک مهره‌ی سیاه، ۵ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه در جعبه باقی می‌ماند و

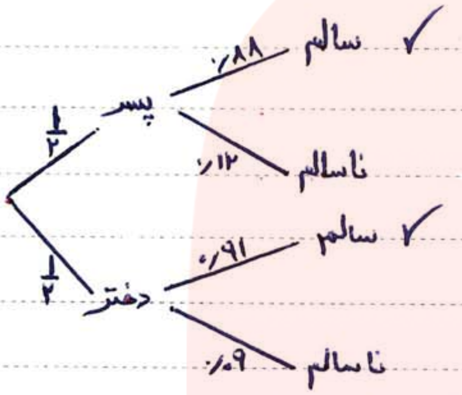
$P(A|B_2)=\frac{5}{8}$

اکنون بنابر قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{9}$$

مثال: فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۲٪ و به فرزند دختر ۹٪ باشد. والدینی که حامل این نوع بیماری هستند، انتظار فرزندی را دارند. احتمال اینکه این فرزند سالم باشد چقدر است؟

جواب: برای این مسأله اگر سعی کنیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم داریم:



حال اگر شاخه هایی را که به وضعیت سالم ختم می شوند را در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{احتمال سالم بودن فرزند} = \underbrace{\frac{1}{2}\times 0.88}_{\text{شاخه اول}} + \underbrace{\frac{1}{2}\times 0.91}_{\text{شاخه دوم}} = 0.895$$

اکنون به روش دیگری (با استفاده از قانون احتمال کل) می توانیم احتمال مورد نظر را بدست آوریم

جواب:

B_1 : پسر بودن فرزند

B_2 : دختر بودن فرزند

A : سالم بودن فرزند

بنابراین:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times(1-0.12)+\frac{1}{2}\times(1-0.09)=0.44+0.455=0.895$$

فصل دوم
قسمت چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته:

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع پیشامد B بر احتمال وقوع پیشامد A اثری نداشته باشد. یعنی:

$P(A|B)=P(A)$

$$\begin{cases} P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A|B)=P(A) \end{cases} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A|B).P(B)=P(A).P(B)$$

بنابراین: دو پیشامد A و B مستقل از همدیگرند هرگاه: $\boxed{P(A\cap B)=P(A).P(B)}$

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A)=2P(B)=0/6$ باشد، مقدار $P(A\cup B)$ را محاسبه کنید.

$P(A)=2P(B)=0/6 \Rightarrow P(A)=0/6$ و $P(B)=\dfrac{0/6}{2}=0/3$

چون پیشامدهای A و B مستقل هستند $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)=0/6\times 0/3=0/18$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/6+0/3-0/18=0/72$

مثال: احتمال قبولی دو نفر در کنکور ۰/۸ و ۰/۹ می‌باشد، احتمال اینکه حداقل یکی از این دو نفر در کنکور قبول شود، چقدر است؟

جواب: می‌دانیم که قبول شدن یا نشدن هر یک از این دو نفر در قبول شدن یا نشدن دیگری تأثیری ندارد. پس قبول شدن این دو نفر مستقل از یکدیگرند.

A: پیشامد قبولی نفر اول در کنکور

B: پیشامد قبولی نفر دوم در کنکور

$P(A)=0/8$
$P(B)=0/9$
$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)=0/8\times 0/9=0/72$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/8+0/9-0/72=0/98$

نکته ی مهم: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آنگاه:

الف) A و B' نیز مستقل از یکدیگرند، یعنی: $P(A\cap B')=P(A).P(B')$

ب) A' و B نیز مستقل از یکدیگرند، یعنی $P(A'\cap B)=P(A').P(B)$

ج) A' و B' نیز مستقل از یکدیگرند، یعنی $P(A'\ B')=P(A').P(B')$

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cup B')=\frac{3}{4}$ باشد، $P(B)$ چقدر است؟

جواب: چون دو پیشامد A و B مستقل از هم دیگرند پس A و B' نیز مستقل از یکدیگرند و

$$P(A\cap B')=P(A).P(B') \qquad (1)$$

از طرفی داریم:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B') \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Longrightarrow P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A).P(B')$$

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+P(B')-\frac{1}{4}\times P(B') \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{3}{4}P(B') \Rightarrow P(B')=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(B)=1-P(B')=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

مثال: احتمال موفقیت عمل پیوند عضو روی یک بیمار ۰/۹ و روی بیماری دیگر ۰/۸ است. احتمال اینکه عمل پیوند عضو روی فقط یکی از این دو نفر موفقیت آمیز باشد، چقدر است؟

A: موفقیت آمیز بودن عمل پیوند عضو روی بیمار اول و B: موفقیت آمیز بودن عمل پیوند عضو روی بیمار دوم

می دانیم که $(A\cap B')$ و $(A'\cap B)$ ناسازگارند (زیرا اشتراک آنها تهی است)

$$P[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]=P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A).P(B')+P(A').P(B)$$

$$=0/9\times(1-0/8)+(1-0/9)\times 0/8$$

$$=0/18+0/08=0/26$$

A و B مستقل هستند ⇐ A' و B مستقل اند

A و B مستقل هستند ⇐ A و B' مستقل اند $\Rightarrow P(A\cap B')=P(A).P(B')$