Subject: Year: Month: Date: / /

فصل اول: دایره

درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

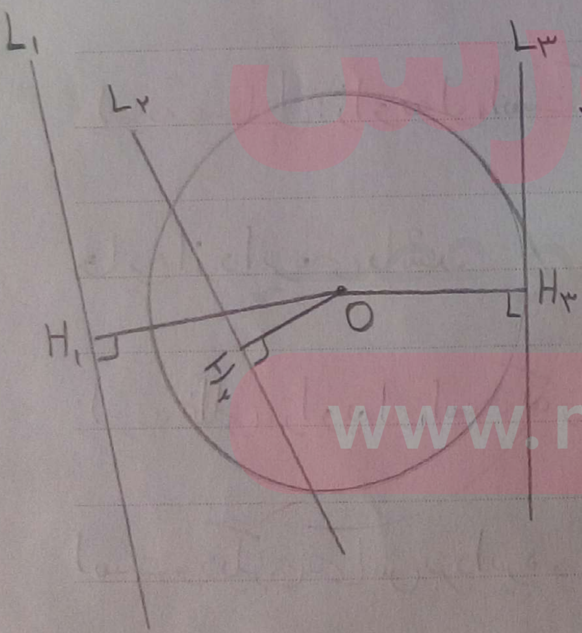
تعریف دایره: مجموعهٔ نقاطی است از صفحه که فاصلهٔ آنها از یک نقطه ثابت (به نام مرکز دایره) باهم برابرند.

وضعیت نسبی خط و دایره:

۱. خط و دایره هیچ نقطه اشتراکی ندارند و $OH_1 > R$

۲. خط و دایره متقاطعند (دو نقطه مشترک دارند) و $OH_2 < R$

۳. خط و دایره برهم مماس هستند (در یک نقطه مشترکند) و $OH_3 = R$



خط قاطع: خطی است که با دایره متقاطع است

یعنی در دو نقطه با دایره مشترکند

نکته: شعاع بر خط مماس همیشه عمود است

تعاریف مربوط به دایره

شعاع دایره: پاره خطی است که یک سر آن در مرکز دایره و سر دیگر آن روی دایره است.

وتر دایره: پاره خطی است که هر دو سر آن روی دایره است.

قطر دایره: وتری که از مرکز دایره می گذرد.

نکته: قطر دایره بزرگترین وتر دایره است

نکته: قطر دایره دو برابر شعاع می باشد

زاویه مرکزی: زاویه ای است که رأس آن در مرکز دایره قرار دارد.

زاویه محاطی: زاویه ای است که راس آن روی دایره است و ~~شعاع~~ اضلاع های آن وتر هایی از دایره می باشد.

زاویه ظلی: زاویه ای است که رأس آن روی دایره است و اضلاع آن یکی وتر دایره است و دیگری مماس بر دایره.

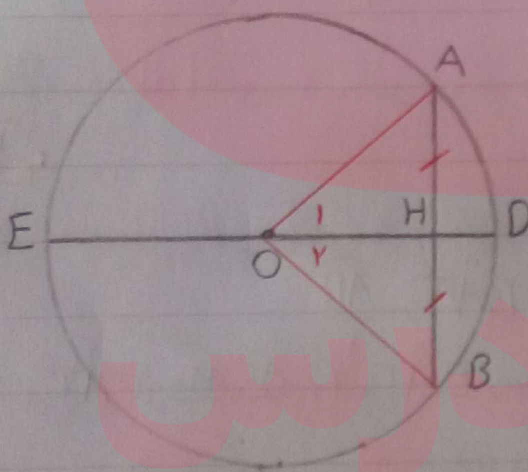
کمان: کمان یک دایره شامل دو نقطه از آن دایره و همهٔ نقاط بین آن دو نقطه است.

اندازه کمان: اندازهٔ یک کمان برابر است با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل آن.

رابطهٔ بین محیط دایره و کمان: با توجه به اینکه محیط یک دایره ۳۶۰ درجه می باشد بنابراین این رابطه را می نویسیم:

$$\frac{\text{طول کمان } \widehat{AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } \widehat{AB}}{۳۶۰}$$

قضیه: ثابت کنید قطر عمود بر وتر در یک دایره آن وتر و کمان های نظیر آن وتر را نصف می کند.



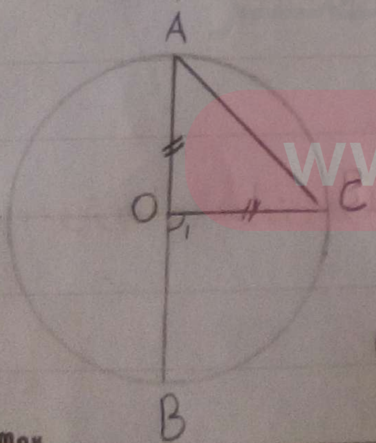
فرض: $ED \perp AB$

حکم: $AH = BH$ و $\widehat{AD} = \widehat{BD}$

اثبات)

$$\begin{cases} OA = OB = \text{شعاع} \\ OH = OH : \text{مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و ضلع}} OAH \cong OBH \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} \begin{cases} O_1 = O_2 \\ AH = BH \end{cases}$$

قضیه: ثابت کنید اندازهٔ زاویه محاطی برابر است با نصف کمان روبرو.



فرض: A = زاویه محاطی

حکم: $A = \frac{\widehat{BC}}{۲}$

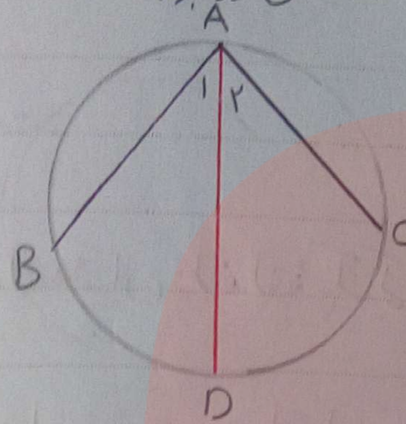
اثبات)

O_1 خارجی برای OAC $\longrightarrow O_1 = A + C$ (۱)

$OA = OC = R \longrightarrow$ متساوی الساقین $AOC \longrightarrow A = C$ (۲)

$\frac{(۱)}{(۲)} \longrightarrow O_1 = ۲A \longrightarrow A = \frac{O_1}{۲} \xrightarrow[\text{مرکزی}]{O_1 \text{ زاویه}} A = \frac{\widehat{BC}}{۲}$

قضیه: اندازهٔ زاویه محاطی در یک دایره برابر است با نصف کمان روبرو.

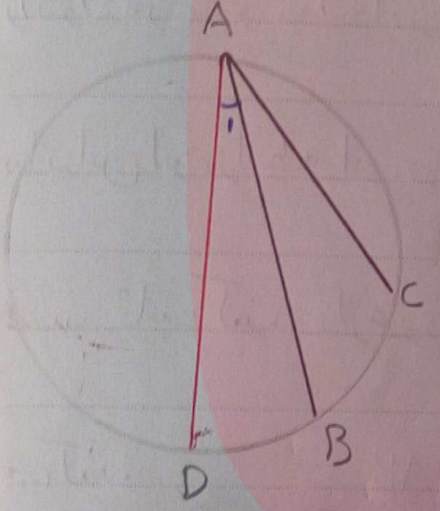


حکم: $A = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

مطابق شکل قبل:

$\underset{\text{محاطی}}{A_1} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$, $\underset{\text{محاطی}}{A_2} = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$

$A = A_1 + A_2 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

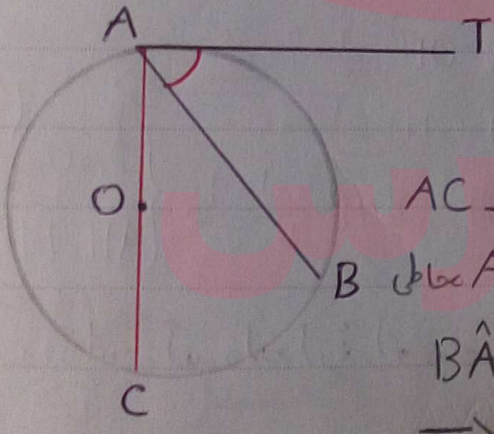


$D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$, $A_1 = \frac{\overset{\frown}{DB}}{2}$

$A = D\hat{A}C - A_1 = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{DB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

$A = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

زاویه ظلی



حکم: $B\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

$AC \perp AT \Rightarrow C\hat{A}T = 90 \xrightarrow{AC=180} C\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ ①

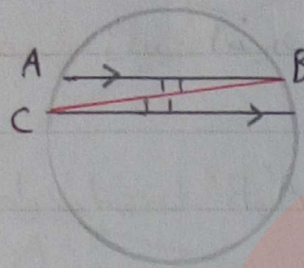
محاطی $A_1 = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ ②

$B\hat{A}T = C\hat{A}T - A_1 \xrightarrow[②]{①} \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{AC - BC}{2} = \frac{AB}{2}$

$\Rightarrow B\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

قضیه: وترهای موازی در یک دایره کمانهای مساوی ایجاد می کنند و برعکس.

Subject: Year: Month: Date: / /



فرض: $AB \parallel CD$

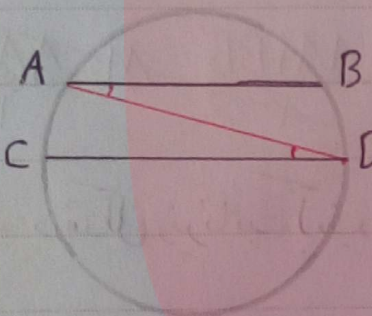
حکم: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

$$AB \parallel CD \xrightarrow[\text{ق خطوط موازی}]{\text{مورب } BC} B_1 = C_1 \quad ①$$

$$\text{محاطی } B_1 = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \text{ و } \text{محاطی } C_1 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$$

$$\xrightarrow{①} \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \longrightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$$

برعکس:



فرض: $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ حکم: $AB \parallel CD$

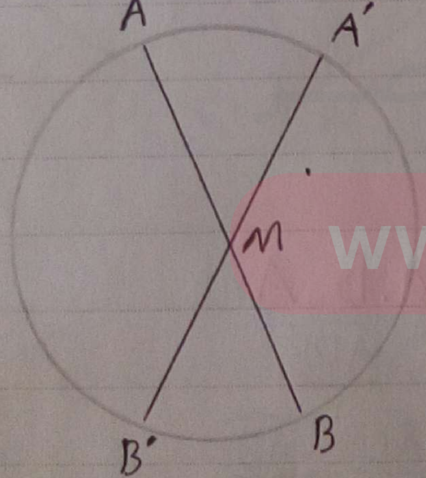
$$\text{محاطی } A_1 = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \text{ و } \text{محاطی } D_1 = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \xrightarrow{\text{فرض}} \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} \longrightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_1$$

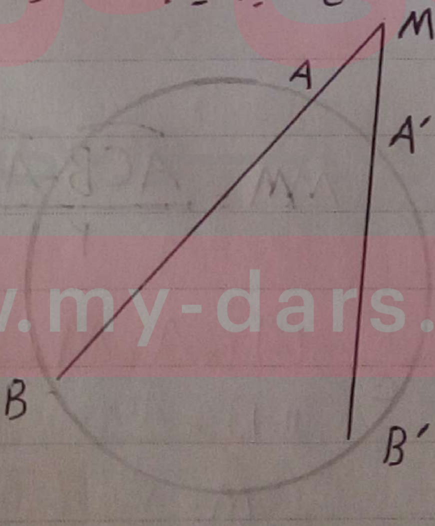
$$\xrightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{به نا به عکس ق}} AB \parallel CD$$

تاکنون زاویه‌هایی را بررسی کردیم که رأس آنها روی دایره بودند (محاطی وظلی) حال

می‌خواهیم زاویه‌هایی را بررسی کنیم که حاصل از برخورد وترهای دایره در داخل دایره یا

حاصل از امتداد وترها در خارج دایره ایجاد می‌شوند مانند شکل‌های زیر:

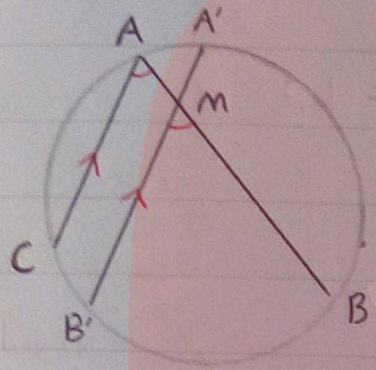




$$M = \frac{AA' - BB'}{2} \qquad M = \frac{BB - AA'}{2}$$

قضیه: ثابت کنید در شکل زیر زاویه M مساوی است با $\frac{BB'+AA'}{2}$.

خط موازی با $A'B'$ از نقطه A رسم می کنیم تا دایره در نقطه C قطع کند.



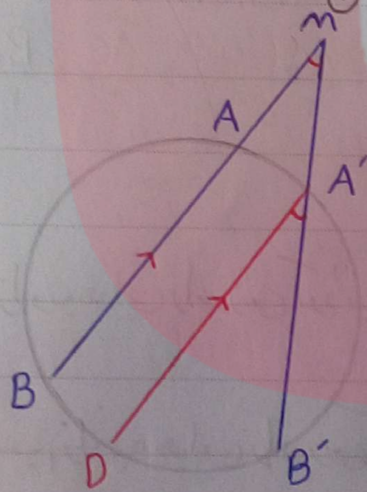
$AC \parallel A'B' \xrightarrow[\text{مورب}]{AB} M = \hat{A}$

محاطی $A = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \longrightarrow M = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ (1)

$AC \parallel A'B' \longrightarrow \overset{\frown}{CB'} = \overset{\frown}{AA'}$ (2)

$(1): M = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{CB'+BB'}{2} = \frac{AA'+BB'}{2} \quad M = \frac{AA'+BB'}{2}$

قضیه: در شکل زیر ثابت کنید $M = \frac{BB'-AA'}{2}$.



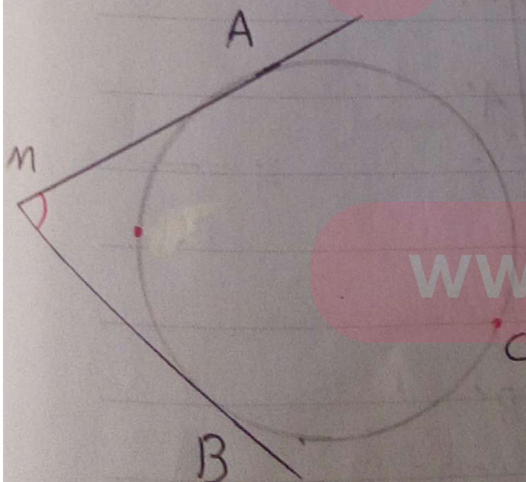
حکم: $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BB'}-\overset{\frown}{AA'}}{2}$ $\quad A'D \parallel AB \xrightarrow[\text{مورب}]{MB'} \hat{A'} = \hat{M}$ (1)

محاطی $A' = \frac{B'D}{2} = \frac{\overset{\frown}{BB'}-\overset{\frown}{BD}}{2}$ $\quad \underline{AB \parallel A'D \rightarrow \overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BD}} \rightarrow$

$A' = \frac{\overset{\frown}{BB'}-\overset{\frown}{AA'}}{2}$ (2) $\quad M = \frac{\overset{\frown}{BB'}-\overset{\frown}{AA'}}{2}$

تمرین ص ۱۶

۱-

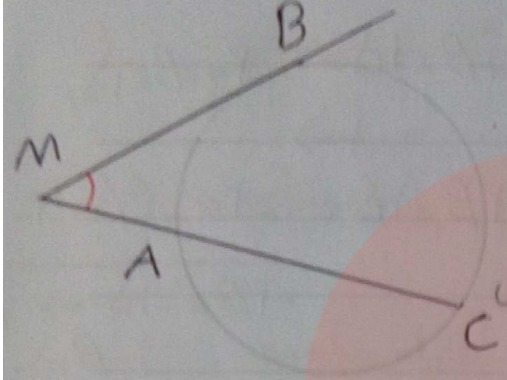


$M = \frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ADB}}{2}$

خارجی $B = A + M \longrightarrow M = B - A$ (1)

ظلی $B = \frac{\overset{\frown}{ACB}}{2}$ $\quad$ ظلی $A = \frac{\overset{\frown}{ADB}}{2}$

$\xrightarrow{(1)} M = \frac{\overset{\frown}{ACB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{ADB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{ABD}}{2}$



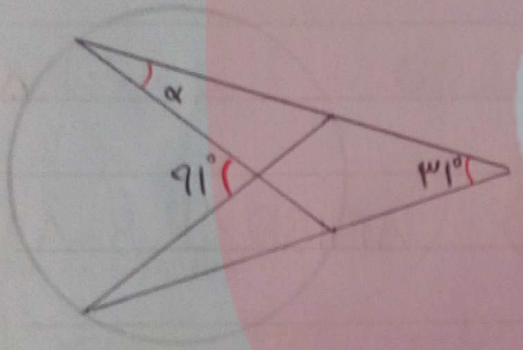
$$M = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{۲}$$

خارجی $A_۱ = B + M \to M = A_۱ - B$

محاطی $A_۱ = \frac{\widehat{BC}}{۲}$ ظلی $B = \frac{\widehat{AB}}{۲}$

$\xrightarrow{①} M = \frac{\widehat{BC}}{۲} - \frac{\widehat{AB}}{۲} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{۲}$

۲_



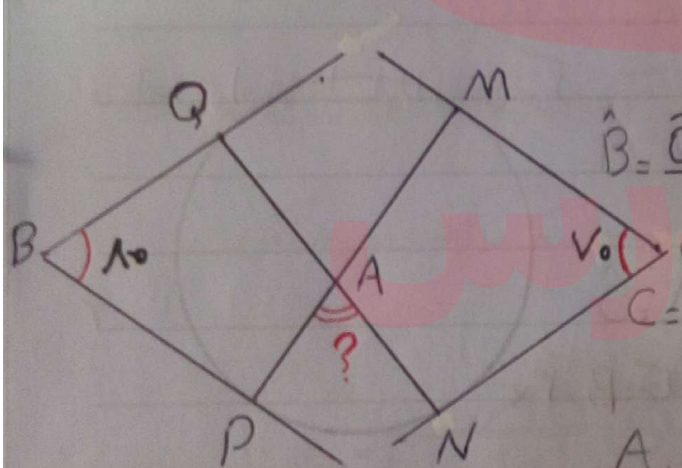
$۳۱ = \frac{\beta - ۲\alpha}{۲} \to \beta - \cancel{۲\alpha} = ۶۲$

$۹۱ = \frac{\beta + ۲\alpha}{۲} \to \beta + \cancel{۲\alpha} = ۱۸۲$

$۲\beta = ۲۴۴ \to \beta = ۱۴۴$

$\beta - ۲\alpha = ۶۲ \Rightarrow ۱۲۲ - ۶۲ = ۲\alpha \to \alpha = ۳۰$

۳_



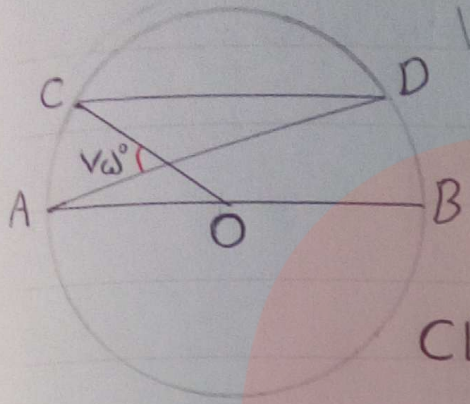
$\hat{B} = \frac{\widehat{QMNP} - \widehat{QP}}{۲} = ۸۰ \to \widehat{QMNP} - \widehat{QP} = ۱۶۰$

$C = \frac{\widehat{MQPN} - \widehat{MN}}{۲} = ۷۰ \to \widehat{MQPN} - \widehat{MN} = ۱۴۰$

$A_۱ = \frac{QP + MN}{۲} = \frac{\alpha + \beta}{۲} = \frac{۲۱۰}{۲} = ۱۰۵ \to A = ۷۵$

$$\begin{cases} \gamma + \beta + \theta - \cancel{\alpha} = ۱۶۰ \\ \gamma + \cancel{\alpha} + \theta - \beta = ۱۴۰ \end{cases}$$

$۲\gamma + ۲\theta = ۳۰۰ \to \gamma + \theta = ۱۵۰ \to \alpha + \beta = ۲۱۰$



$$75 = \frac{\alpha+\alpha+\beta}{2} \longrightarrow 2\alpha+\beta=150$$

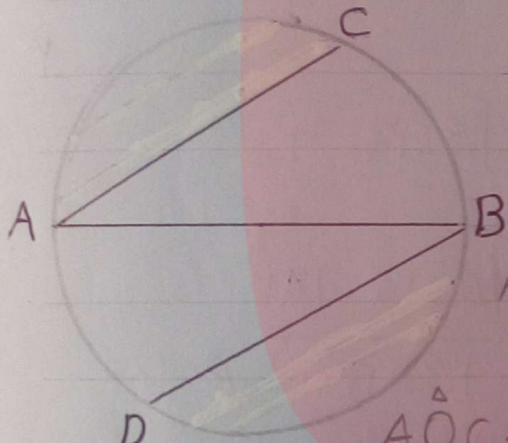
$$75 = \frac{\alpha}{2}+\beta \longrightarrow \alpha+2\beta=150 \quad (\times -2)$$

$$\cancel{2\alpha}+\beta=150$$
$$\longrightarrow -\cancel{2\alpha}-4\beta=-300$$
$$-3\beta=-150 \longrightarrow \beta=50$$

$CD=80$

$$CD=180-(\alpha-\beta)=80 \qquad 2\alpha+\beta=150 \longrightarrow \alpha=50$$

۵-



حکم $AC=BD$

$AC \parallel BD \xrightarrow[\text{مورب}]{CD} \hat{C}=\hat{D}$ $\qquad$ $AB \parallel BD \xrightarrow[\text{مورب}]{AB} \hat{B}=\hat{A}$

$A\hat{O}C: A+C+O_2=180$

$B\hat{O}D: B+D+O_1=180$ $\longrightarrow A+C+O_2=B+D+O_1 \longrightarrow O_1=O_2$ ①

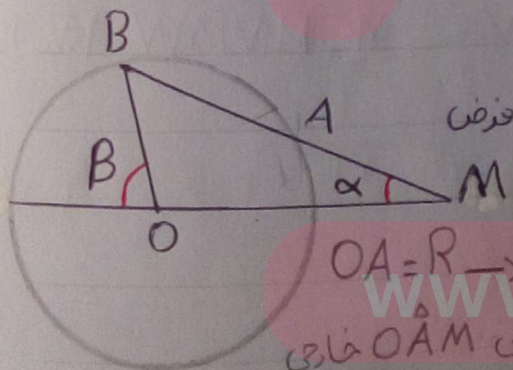
نقطه O را به نقاط C و D وصل می‌کنیم.

مرکزی $O_1=\widehat{BD}$

$O_2=\widehat{AC}$ $\xrightarrow{①} \widehat{BD}=\widehat{AC} \longrightarrow BD=AC$

۸

۶-



فرض: $MA=R$ $\qquad$ حکم: $\beta=3\alpha$

$OA=R \longrightarrow OA=AM \longrightarrow$ متساوی‌الساقین $O\hat{A}M \longrightarrow O_1=\alpha$

خارجی $O\hat{A}M$ برای $A_2=\alpha+\alpha \Longrightarrow A_2=2\alpha$

$OA=OB=R \longrightarrow$ متساوی‌الساقین $O\hat{A}B \longrightarrow \hat{B}=2\alpha$

خارجی $O\hat{B}M$ برای $\beta=\alpha+2\alpha \Longrightarrow \beta=3\alpha$

۷- یادآوری: در هر مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه ۳۰° نصف وتر است.

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه ۴۵° درجه $\frac{\sqrt{2}}{2}$ برابر وتر است.

نکته۲: در هر مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه ۶۰° درجه $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر وتر است.

$\widehat{AB}=60 \qquad AB=10 \qquad O$

$OD \perp AB \xrightarrow[\text{بر وتر}]{\text{ویژگی قطر عمود}} \begin{cases} \widehat{AD}=\widehat{BD}=30 \\ AH=BH=5 \end{cases}$

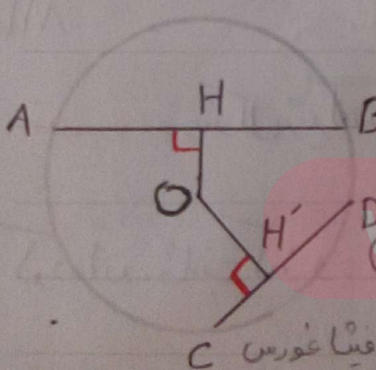
$\begin{cases} \hat{AOH} \ \text{قائم الزاویه} \\ \hat{O}_1=30 \ \text{زاویه مرکزی} \end{cases} \Rightarrow AH=\frac{1}{2}OA \Rightarrow 5=\frac{1}{2}OA \Rightarrow OA=10$

فیثاغورس: $OA^2=OH^2+AH^2 \Rightarrow 10^2=OH^2+5^2$

$OH^2=75 \rightarrow OH=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

۸- در یک دایره از دو وتر نابرابر، وتر بزرگتر به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

فرض: $OH > OH'$ حکم: $AB < CD$ و برعکس



$OH \perp AB \xrightarrow[\text{بر وتر}]{\text{ویژگی قطر عمود}} AH=\frac{1}{2}AB$ ①

$OH' \perp CD \xrightarrow{\text{'' '' ''}} CH=\frac{1}{2}CD$ ②

قضیه فیثاغورس $\overset{\triangle}{AOH}: AO^2=OH^2+AH^2$

'' '' $\overset{\triangle}{OCH'}: OC^2=OH'^2+CH'^2$

$AO=OC=R \Rightarrow OH^2 + AH^2 = OH'^2 + CH'^2$

$OH^2 > OH'^2 \Leftrightarrow AH^2 < CH'^2 \Leftrightarrow AH < CH' \xLeftrightarrow[(2)]{(1)} \frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}CD$

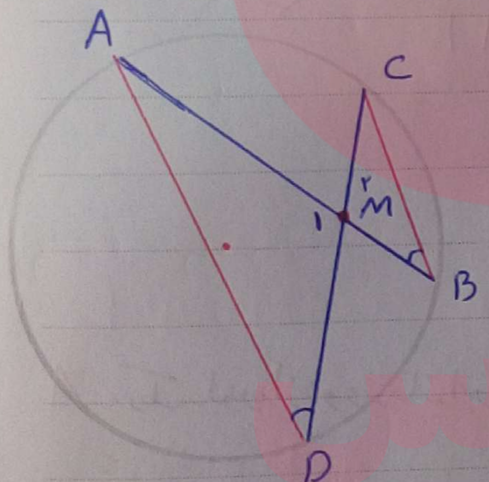
$\Leftrightarrow AB < CD$

فصل دوم: رابطه های طولی در دایره

در این درس به بررسی طول پاره خط هایی می پردازیم که حاصل از برخورد وترها

در داخل دایره یا خارج دایره باشند.

قضیه: در شکل زیر دو وتر AB و CD همدیگر را در نقطه M در داخل دایره قطع کرده اند.



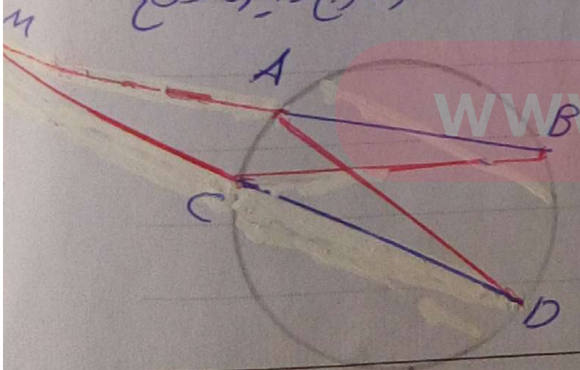
ثابت کنید: $MA.MB=MC.MD$

$$\begin{cases} \hat B=\hat D=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \ \text{محاطی} \\ M_1=M_2 \ \text{متقابل به رأس} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} A\hat DM \sim M\hat CB$$

$$\xRightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} \frac{MD}{MB} = \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{BC} \Longrightarrow MA.MB=MC.MD$$

قضیه: در شکل زیر امتداد دو وتر AB و CD همدیگر را در نقطه M در خارج دایره قطع

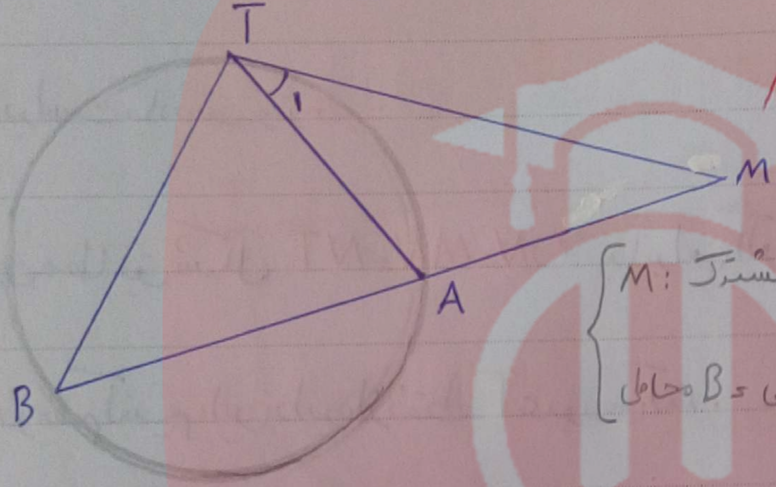
کرده اند. ثابت کنید: $MA.MB=MC.MD$



$$\begin{cases} \hat B=\hat D=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \ \text{محاطی} \\ M: \ \text{مشترک} \end{cases} \xRightarrow{\text{زز}} A\hat MD \sim C\hat BM \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}}$$

$$\frac{AD}{CB}=\frac{MA}{MC} \times \frac{MD}{MB} \longrightarrow MA.MB=MC.MD$$

قضیه: از نقطه M خارج دایره یک مماس و یک قاطع مانند شکل رسم می کنیم.



ثابت کنید: $MA.MB=MT^2$

$\begin{cases} M: \text{مشترک} \\ \hat{B}\ \text{محاطی} = \hat{T}_1\ \text{ظلی} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} B\hat{T}M \sim A\hat{T}M$

$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \frac{MT}{MA}=\frac{MB}{MT}=\frac{BT}{TA} \Longrightarrow MA.MB=MT.MT$

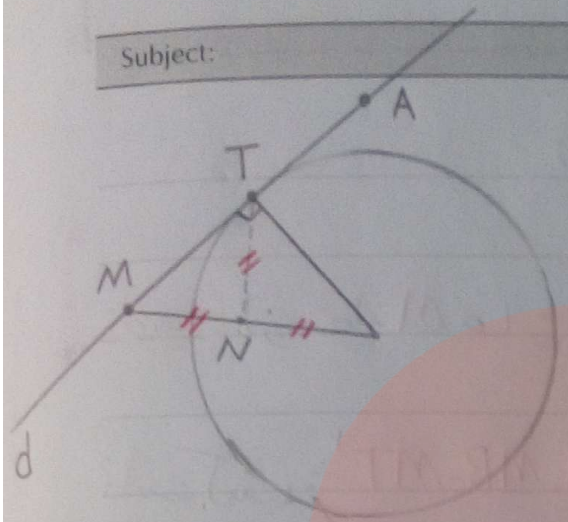
$$MA.MB=MT^2$$

از قضیه بالا نتیجه می گیریم طول مماس واسطه هندسی بین دو قطعه خط قاطع است.

رسم مماس بر دایره از نقطه ای خارج دایره.

فرض کنیم A نقطه ای خارج دایره باشد و خط d گذرنده از نقطه A در نقطه T بردایره مماس باشد نقطه M را روی خط d طوری انتخاب می کنیم که نقاط M و A

Subject: Year: Month: Date: / /



در دو طرف نقطهٔ T باشند.

یادآوری: میانه وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه

برابر است با نصف وتر.

چون مطابق شکل ON=MN=NT بنابراین اگر دایره‌ای به شعاع ON و به مرکز

N رسم کنیم، این دایره از نقطه T عبور می‌کند.

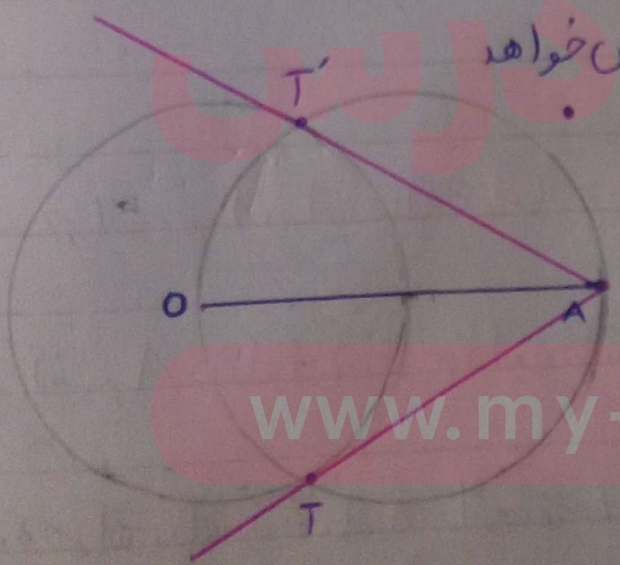
از مطالب فوق می‌توان استفاده کرد تا خط مماس را رسم کرد.

مثال امتحانی: خطی مماس بر دایره زیر طوری رسم کنید که از نقطه A بگذرد.

ابتدا نقطهٔ A را به O وصل می‌کنیم سپس دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم

محل برخورد این دایره‌ها همان نقاط مماس خواهد

بود.

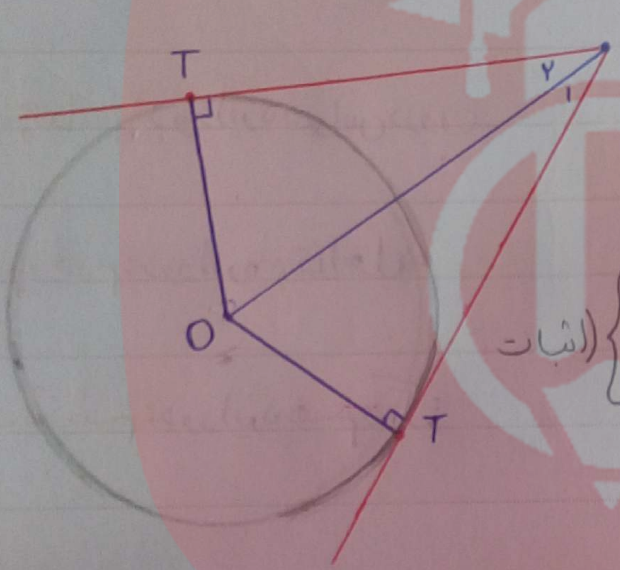


Data Max

قضیه: از نقطه M خارج دایره دو مماس MT و MT' مطابق شکل رسم شده اند.

الف) ثابت کنید طول مماس ها برابرند؟

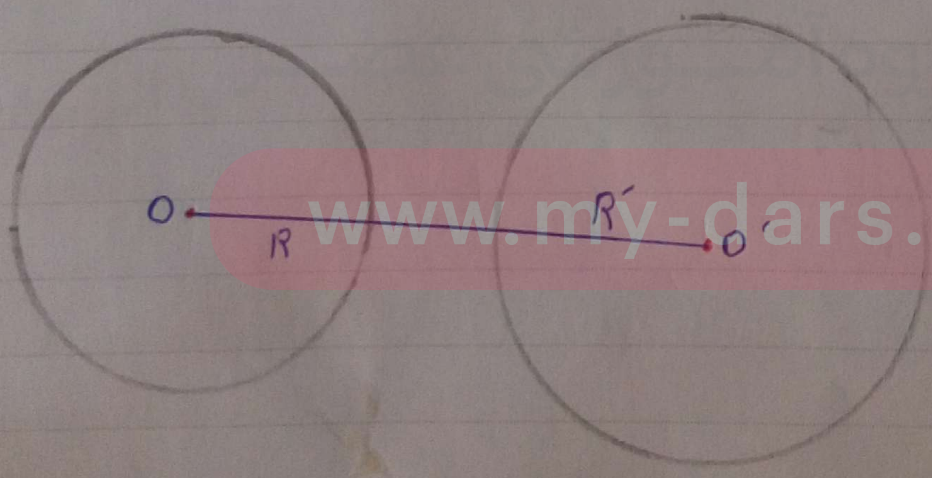
ب) ثابت کنید OM نیمساز زاویه $T\hat{M}T'$ است؟



اثبات $\begin{cases} OT = OT' \\ OM: \text{مشترک} \end{cases} \xRightarrow{\text{وض}} O\hat{M}T \cong O\hat{M}T' \xRightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} MT = MT' ,\ M_1 = M_2$

وضعیت نسبی دو دایره نسبت به هم: دو دایره یکی به مرکز O و شعاع R و دیگری به مرکز O' و شعاع R' نسبت به هم ۶ وضعیت مختلف دارند.

قرارداد: پاره خط $d = OO'$ را خط المرکزین می نامیم.



Subject: Year: Month: Date: / /

حالت اول: دو دایره خارج هم

حالت دوم: دو دایره مماس بیرون

حالت سوم: دو دایره متقاطع

حالت چهارم: دو دایره مماس درون

حالت پنجم: دو دایره متداخل

حالت ششم: دو دایره هم مرکز

مماس مشترک دو دایره

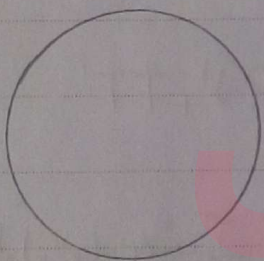
هر خط یا پاره خطی که بر هر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو دایره می نامند.

مماس مشترک خارجی برای دو دایره که مطابق شکل خارج هم هستند.

نکته: در این حالت چهار مماس مشترک داریم:

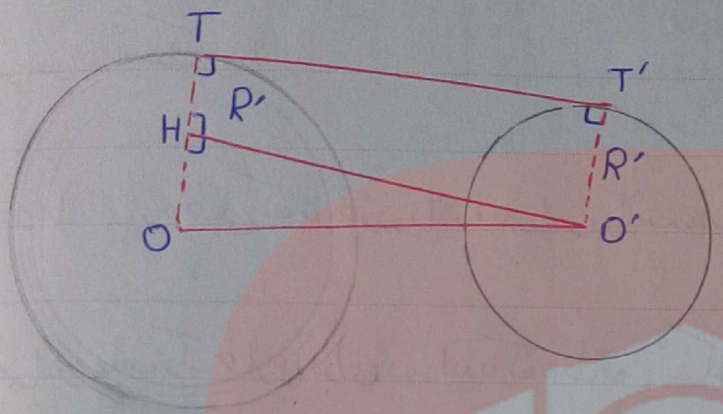
۱) ۲تا مماس مشترک خارجی (مماس مشترکی را خارجی می نامیم هرگاه هر دو دایره در یک طرف خط قرار بگیرند)

۲) ۲تا مماس مشترک داخلی (مماس مشترکی را داخلی می نامیم که دایره ها هر کدام در یک طرف خط مماس قرار بگیرند)



سوال: دو دایره $C(O,R)$ و $C(O',R')$ را در نظر بگیرید اگر $d=OO'$ خط المرکزین باشد.

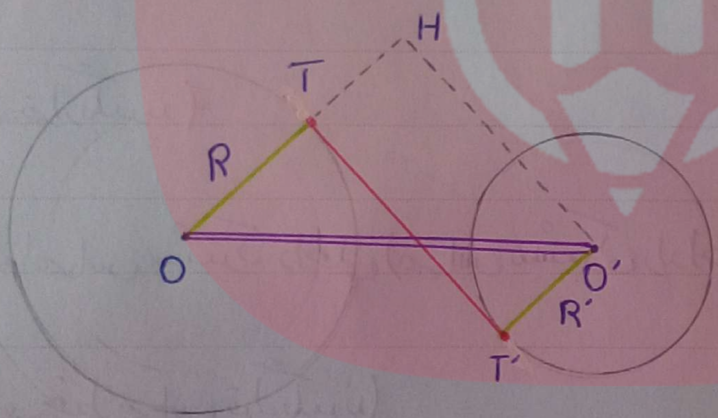
طول مماس مشترک خارجی و داخلی را بدست آورید.



$OT \perp TT'$
$O'T' \perp TT'$ $\Rightarrow O'HTT'$: یک مستطیل است
$\Rightarrow O'H = TT'$

قائم الزاویه $OO'H \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} d^2 = (R-R')^2 + TT'^2$, $TT'^2 = d^2-(R-R')^2$

$\xrightarrow{\text{جذر}} TT' = \sqrt{d^2-(R-R')^2}$ فرمول طول مماس مشترک خارجی دو دایره



قائم الزاویه $OO'H \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} d^2 = (R+R')^2 + TT'^2$

$\rightarrow TT'^2 = d^2-(R+R')^2 \xrightarrow{\text{جذر}} TT' = \sqrt{d^2-(R+R')^2}$ فرمول طول مماس مشترک داخلی دو دایره

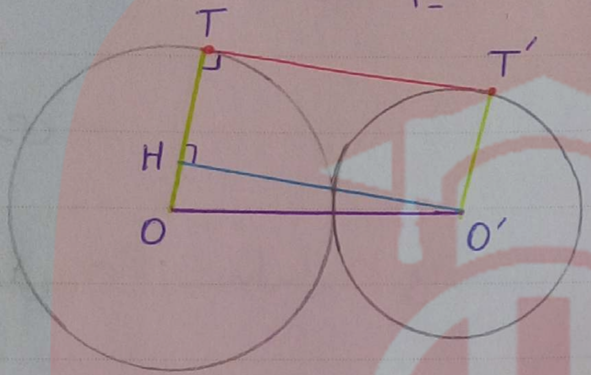
مماس مشترک دو دایره مماس بیرون

سوال: دو دایره $C(O,R)$ و $C(O',R')$ مطابق شکل مماس بیرون هستند طول

Subject: Year: Month: Date: / /

مماس مشترک خارجی دو دایره را بدست آورید؟ (هم داخلی و هم خارجی)

نکته: در این حالت ۳ تا حالت مماس مشترک داریم:



۱) خارجی $TT' = ?$

۲) داخلی $TT' = 0$

$OO'H$ قائم الزاویه $\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} O'O^2 = OH^2 + O'H^2 \xrightarrow[d=R+R']{\text{جایگذاری}} d^2 = (R-R')^2 + TT'^2$

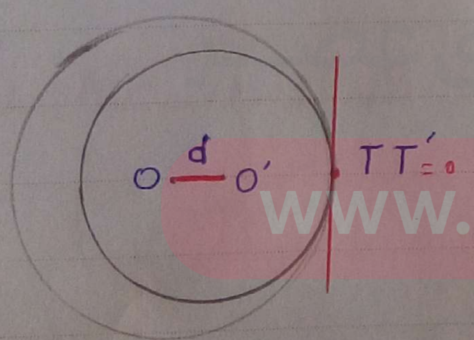
$\longrightarrow TT'^2 = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} = \sqrt{(R+R')^2 - (R-R')^2}$

$R^2 - 2RR' + R'^2$

$= \sqrt{R^2 + 2RR' + R'^2 - R^2 + 2RR' - R'^2} = \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'}$

دو دایره مماس درون

در این حالت یک تا مماس مشترک داریم.



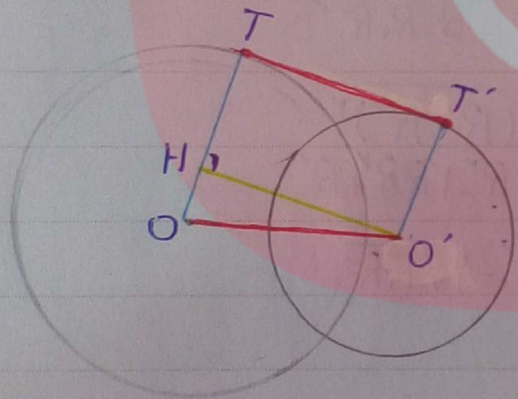
دو دایره متقاطع

نکته: در این حالت ۲ تا مماس مشترک داریم:

۱) ۲ تا خارجی

۲) ۰ تا داخلی

سوال: طول مماس مشترک خارجی دو دایره $C(O,R)$ و $C(O',R')$ را که باهم متقاطعند را بدست آورید؟



$OO'H$ قائم الزاویه $\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \xrightarrow{\text{جاگذاری‌ها}} d^2 = (R-R')^2 + TT'^2$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

در دیگر حالت های باقیمانده مماس مشترک داریم.

نکته: سه کمان ۶۰° درجه یک نیم دایره درست می کند و سه کمان ۱۲۰° درجه یک دایره کامل درست می کند.

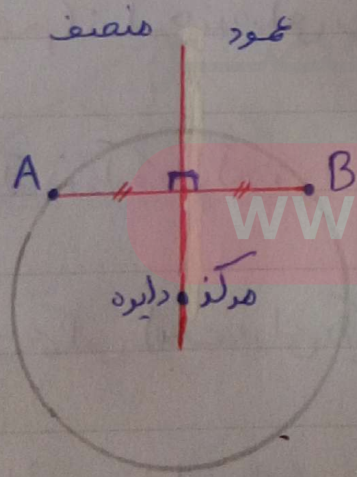
نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

نکته مربوط به سوال ۸ ص ۲۳: مساحت یک قطاع به شعاع r و زاویهٔ α برابر است با: $\frac{\pi r^2}{360}\times\alpha$

درس سوم: چند ضلعی های محاطی و محیطی

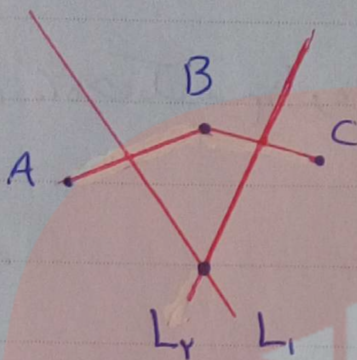
تعریف چند ضلعی محاطی: چند ضلعی را محاطی می نامیم اگر و تنها اگر یک دایره باشد که از همهٔ رئوس چند ضلعی بگذرد. در این حالت دایره را دایرهٔ محیطی آن چند ضلعی می نامیم.

نکته: یک دایره وقتی از دو نقطه می گذرد که مرکز آن دایره روی عمود منصف پاره خط تشکیل شده است آن دو نقطه باشد.



Subject: Year: Month: Date: / /

نتیجه: با توجه به شکل زیر دایره از سه نقطهٔ A و B و C می گذرد و اگر مرکز دایره همان محل تلاقی دو عمود منصف L_1 و L_2 باشد.



نتیجه: چون هر سه نقطه که روی یک خط راست قرار ندارند عمود منصفهای آنها همدیگر را قطع می کنند. بنابراین برای هر سه نقطهٔ دلخواه که در یک راستا نیستند یک دایره وجود دارد که از هر سه آنها بگذرد.

نتیجه: با توجه به مطالب فوق هر مثلثی یک چندضلعی محاطی است و مرکز دایره محیطی آن محل برخورد عمود منصف هاست.

نکته (مهم): یک چندضلعی زمانی محاطی است که همهٔ عمودمنصف اضلاع آن همدیگر را فقط در یک نقطه قطع کنند.

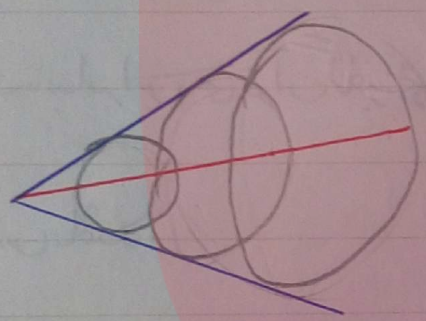
تذکر: چون ممکن است برای یک n ضلعی که $n > 3$ می باشد. عمود منصف ها در یک نقطه همرس نباشند بنابراین همهٔ n ضلعی ها $(n > 3)$ محاطی نیستند.

Subject: Year: Month: Date: / /

تعریف چند ضلعی محیطی: چند ضلعی را محیطی می گوییم اگر وفقط اگر دایره‌ای باشد که برهمهٔ اضلاع آن مماس باشد.

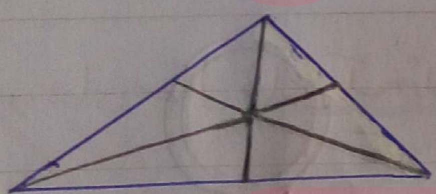
یادآوری: ما می دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است

بنابراین هر دایره که مرکز آن روی نیمساز یک زاویه باشد بر هر دو ضلع زاویه مماس است.



لذا بینهایت دایره وجود دارد که برهر دو ضلع زاویه مماس است.

مثال: دایره‌ای رسم که برهرسه ضلع مثلث زیر مماس می باشد. (آیا همیشه چنین دایره‌ای وجود دارد؟) چون نیمسازهای هر مثلثی همرسند پس همیشه می توان دایره‌ای به مرکز محل برخورد نیمساز رسم کرد که برهرسه ضلع مثلث مماس باشد.



نکته: برای هر n ضلعی اگر محل برخورد همهٔ نیمسازها یک نقطه باشد، آنگاه آن n ضلعی محیطی است. یعنی می توان دایره‌ای رسم کرد که به همه اضلاع آن مماس باشد، بدیهی است

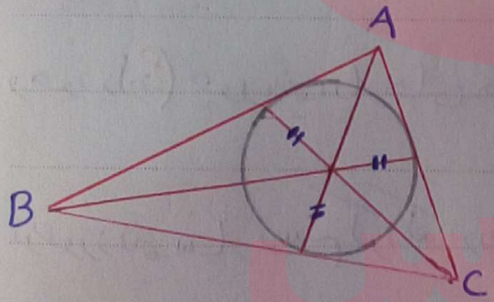
Subject: Year: Month: Date: / /

که همهٔ n ضلعی ها ($n > 3$) محیطی نیستند.

دایره محیطی و محاطی مثلث

یادآوری: در هر مثلث نیمسازهای زاویه‌های داخلی در یک نقطه همرسند. به نابه تعریف نیمساز یک زاویه می توان گفت: محل برخورد نیمسازها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. بنابراین می توان دایره ای به مرکز همرس نیمسازها رسم کرد که بر هر سه ضلع مثلث مماس باشد.

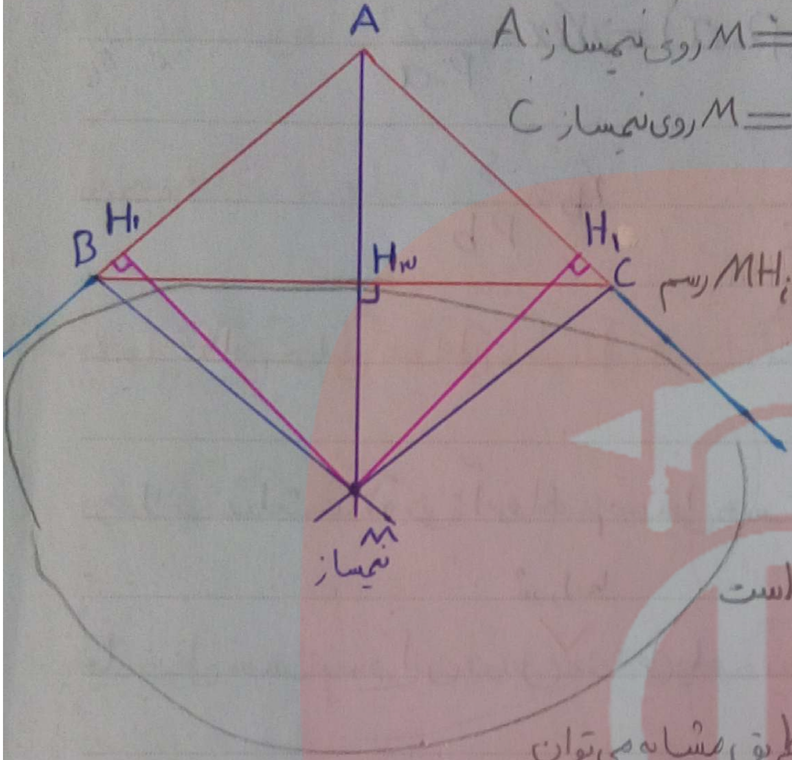
در نتیجه: همهٔ مثلث ها یک دایرهٔ محاطی دارند. (مطابق شکل)



دایره های محاطی خارجی یک مثلث

در مثلث $A\hat{B}C$ نیمساز زاویهٔ داخلی A و نیمساز زاویه خارجی C، همدیگر را در نقطهٔ M قطع می کنند.

Data Max



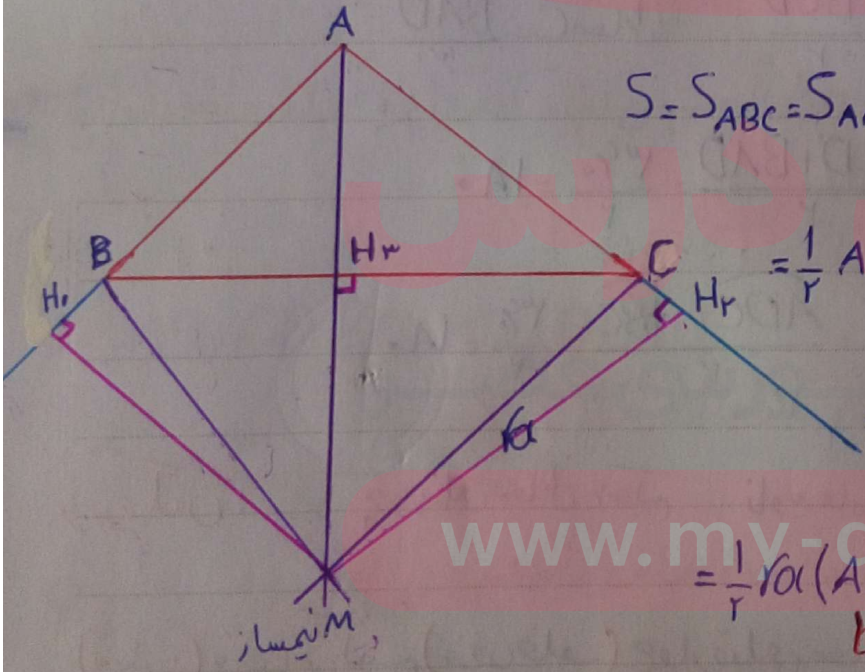
A روی نیمساز $M \Longrightarrow MH_1 = MH_2$

C روی نیمساز $M \Longrightarrow MH_2 = MH_3$

$\Longrightarrow MH_1 = MH_2 = MH_3$

بنابراین می توان دایره ای به مرکز M و به شعاع MH_1 رسم کرد که بر ضلع BC و امتداد اضلاع AC و AB مماس باشد. چون این دایره روبروی زاویهٔ A رسم شده است لذا شعاع این دایره را با r_a نشان می دهیم. به طریق مشابه می توان دایره های به شعاع r_b و r_c را مطابق شکل رسم کرد.

حال می خواهیم شعاع این دایره را بدست آوریم ($r_a = ?$)



$$S = S_{ABC} = S_{AMC} + S_{ABM} - S_{BCM}$$

$$= \frac{1}{2} AC . MH_2 + \frac{1}{2} AB . MH_1 - \frac{1}{2} BC . MH_3$$

$$= \frac{1}{2} AC . r_a + \frac{1}{2} AB . r_a - \frac{1}{2} BC . r_a$$

$$= \frac{1}{2} r_a (\underbrace{AC + AB - BC}_{b + c - a}) \Rightarrow S = \frac{1}{2} r_a (b + c - a) \quad (1)$$

$2p = a + b + c$ فرض می کنیم $\Longrightarrow 2p - 2a = a + b + c \Longrightarrow 2p - 2a = a + b + c - 2a = b + c - a \quad (2)$

$$\xrightarrow[(2)]{(1)} S = \frac{1}{2} r_a \cdot (2p - 2a) \Rightarrow S = r_a \cdot (p-a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{p-a}$$

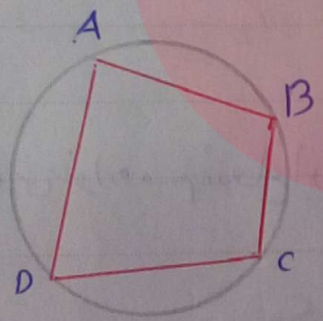
نتیجه:

$$r_b = \frac{S}{p-b} \qquad r_c = \frac{S}{p-c}$$

چهارضلعی های محاطی و محیطی:

برخلاف مثلث ها که همهٔ آنها هم محیطی هستند و هم محاطی، چهارضلعی ها همیشه محاطی یا محیطی نیستند در این درس شرایط محاطی یا محیطی بودن آنها را بررسی می کنیم.

قضیه: یک چهارضلعی محاطی است اگر وتنها اگر زاویه های روبروی آن مکمل هم باشند.



فرض: چهارضلعی محاطی
حکم: زاویه های روبرو مکمل اند

$$\hat{A} \text{ محاطی} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} \qquad \hat{C} \text{ محاطی} = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$$

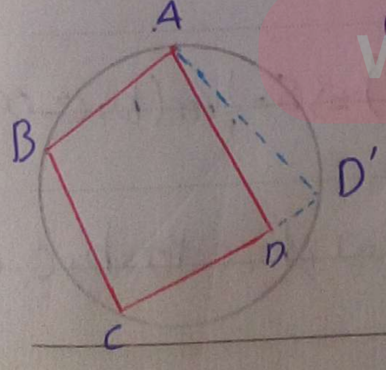
$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BAD}}{2} = \frac{BCD + BAD}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

به همین ترتیب

$$\hat{B} + \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ADC} + \overset{\frown}{ABC}}{2} = \frac{360}{2} = 180$$

و برعکس:

فرض: زاویه های روبرو مکمل
حکم: چهارضلعی محاطی

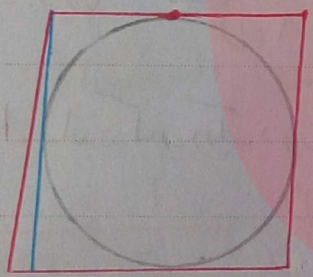


اثبات) فرض می کنیم (فرض خلف) چهارضلعی محاطی نیست.

چون می دانیم از هر سه رأس دایره ای می گذرد، فرض می کنیم دایره از رأس D نگذرد. ضلع CD را از سمت D امتداد می دهیم که دایره را در D' قطع کند. چهارضلعی $ABCD'$ محاطی است. بنا به مطلب بالا زاویه‌های روبرو مکمل اند. لذا $B+D=B+D'$ $\xrightarrow{\text{بنا به فرض}}$ $\frac{B+D=180}{}$ $B+D'=180$

$\longrightarrow D=D'$ ✗

قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و تنها اگر مجموع اضلاع روبروی هم با هم برابر باشند.



برعکس: فرض: $AB+CD=AD+BC$

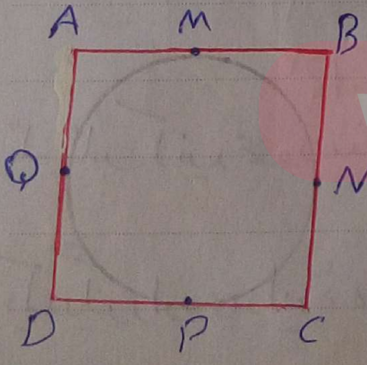
حکم: چهارضلعی محیطی

اثبات به روش برهان خلف فرض می کنیم (فرض خلف) چهارضلعی محیطی نباشد. از رأس A مطابق شکل AD' را طوری رسم می کنیم که بر دایره مماس باشد. لذا چهارضلعی $ABCD'$ محیطی است. بنابراین $AB+CD'=BC+AD'$

$\longrightarrow AB+CD=BC+AD'+DD'$

$\xrightarrow{\text{فرض}} AD+\cancel{BC}=\cancel{BC}+AD'+DD' \longrightarrow AD=AD'+DD'$

که یک تناقض است (نامساوی مثلث)



اثبات) چون می دانیم از هر نقطه خارج دایره دو مماس برابر هم می توان رسم کرد، لذا:

چهارضلعی محیطی: فرض

حکم: $AB+CD=AD+BC$

$AB + CD$

تعریف چند ضلعی منتظم: یک چندضلعی محدب را منتظم می نامیم هرگاه همهٔ اضلاع و همهٔ زاویه های آن باهم برابر باشند.

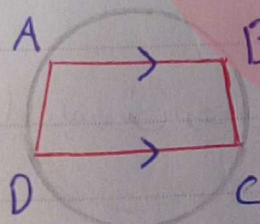
نکته: همهٔ n ضلعی های منتظم هم محاطی هستند و هم محیطی.

تمرین ص ۲۹

ذوزنقه $ABCD \Rightarrow AB \parallel CD \xrightarrow[\text{مورب}]{AD} A+D=۱۸۰ \xrightarrow[B+D=۱۸۰]{①} A+\cancel{D}=B+\cancel{D} \Rightarrow A=D$

$A+D=۱۸۰ \xrightarrow[A+C=۱۸۰]{①} A+D=\cancel{A}+C \Rightarrow C=D$

۱- ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

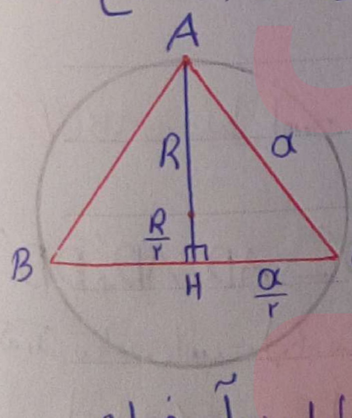


فرض: ذوزنقه $ABCD$ ، محاطی $ABCD$

حکم: متساوی الساقین $ABCD$

(اثبات) محاطی $ABCD \Rightarrow \begin{cases} A+C=۱۸۰ & ① \\ B+D=۱۸۰ \end{cases}$

۲- مساحت مثلث متساوی الاضلاع را به دست آورید که در دایره ای به شعاع R محاط شده باشد.



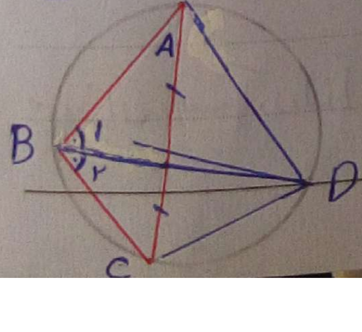
$HC = \frac{a}{۲}$, $OH = \frac{۱}{۲} OA$

$AH^۲ + HC^۲ = AC^۲ \Rightarrow (\frac{۳}{۲}R)^۲ + (\frac{a}{۲})^۲ = a^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۴}R^۲ + \frac{a^۲}{۴} = a^۲ \Rightarrow$

$\frac{۹}{۴}R^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow \frac{۹}{\cancel{۴}}R^۲ = \frac{۳}{\cancel{۴}}a^۲ \Rightarrow ۳R^۲ = a^۲ \quad ①$

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳R^۲) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}R^۲$

۳- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایرهٔ محاطی مثلث قطع می کنند.



اثبات) نیمساز زاویهٔ B دایره را در نقطه D قطع می کند.

$$\text{نیمساز } BD \Rightarrow B_1 = B_2 \xrightarrow[\text{محاطی}]{B_1, B_2} \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD} \xrightarrow[\text{کمانها برابر}]{\text{ویژگی وترهای نظیر}} AD = CD$$

لذا چون D از دو سر ضلع AC به یک فاصله است پس D روی عمود منصف AC قرار دارد. یعنی نیمساز B و عمودمنصف AC همدیگر را در نقطه D روی دایره قطع می کنند.

۴- یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها.

۵- اگر r_a و r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد نشان دهید.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a و h_c و h_b اندازه های سه ارتفاع باشند نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

Subject: Year: Month: Date: / /

۶- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M ، N و P باشند و

T و T' نقطه های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط های شامل دو ضلع

باشند نشان دهید: $BN = BP = P - b , CM = CP = P - C$

$AM = AN = P - a$

$AT = AT' = P$

فصل ۲ تبدیل های هندسی و کاربردها

تعریف تبدیل: تبدیل T در صفحهٔ P تابعی (یک به یک) است که به هر نقطهٔ A در صفحهٔ P

دقیقاً یک نقطه را از صفحهٔ P مانند A' نظیر می کند و برعکس. یعنی هر نقطهٔ

A' از صفحهٔ P تصویر نقطه ای مانند A از صفحه P است.

* به طور خلاصه داریم:

$$T : P \longrightarrow P$$
$$T(A) = A'$$

تبدیلات مهم عبارتند از:

انتقال، بازتاب، تجانس، دوران