

فصل نهم

شمارش، بدون شماردن

درس اول : شمارش

درس دوم : چاپگشت

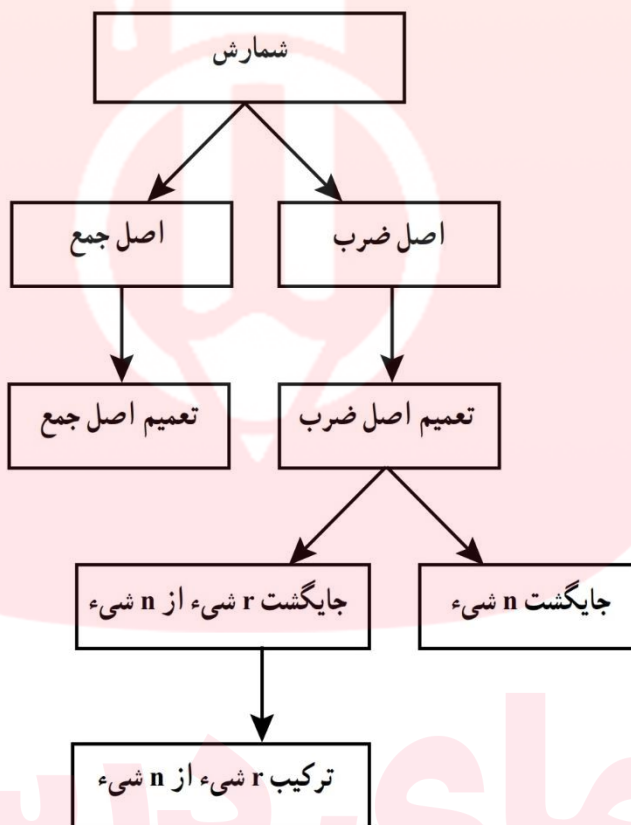
درس سوم : ترتیب و ترکیب

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



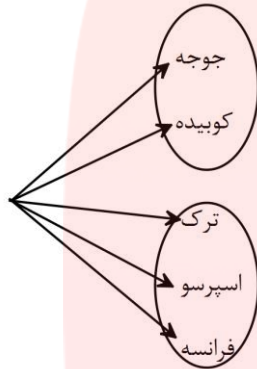
مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

درس اول : شمارش

شمارش یک عمل ساده است که ما به کرات آن را انجام داده ایم اما مسأله اینجاست که آیا همیشه این کار ساده است؟ به نظر شما چند عدد کارت ملی می توان تولید کرد .



مسأله : شخصی می خواهد برای تولد دوستش او را به رستوران « یا » کافی شاپ دعوت کند .

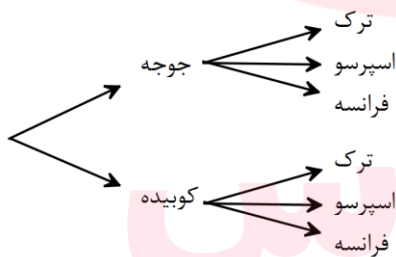
اگر به رستوران ببرد یکی از ۲ نوع غذا جوجه ، کوبیده را می تواند انتخاب کند و اگر به کافی

شاپ ببرد یکی از ۳ نوع قهوه ترک ، اسپرسو ، فرانسه را می تواند انتخاب کند .

چند انتخاب برای دوستش وجود دارد ؟

اصل جمع : هرگاه یک عمل کامل را بتوان به چند روش مختلف انجام داد و هر روش چند انتخاب برای انجام داشته باشد ، تعداد تمام راه های ممکن برای انجام آن عمل برابر با مجموع تعداد انتخاب هاست .

مسأله : شخصی می خواهد برای تولد دوستش او را به رستوران « و » کافی شاپ دعوت کند .



در رستوران یکی از ۲ نوع غذا جوجه ، کوبیده را می تواند انتخاب کند و در کافی

شاپ یکی از ۳ نوع قهوه ترک ، اسپرسو ، فرانسه را می تواند انتخاب کند .

چند انتخاب برای دوستش وجود دارد ؟

اصل ضرب : هرگاه یک عمل کامل از چند قسمت ناقص تشکیل شده باشد و هر قسمت چند انتخاب برای انجام داشته باشد ، تعداد تمام راه های ممکن برای انجام آن عمل برابر با حاصل ضرب تعداد انتخاب هاست .

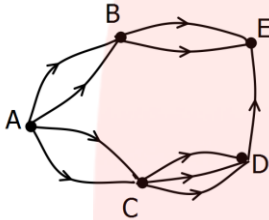
www.my-dars.ir

سوال : فردی می خواهد از تهران به اصفهان برود و قصد دارد از قم عبور کند . از تهران تا قم ۲ مسیر مختلف و از قم به اصفهان ۳

مسیر مختلف وجود دارد . به چند طریق این کار امکان پذیر است ؟

سوال : فردی قصد دارد از تهران به اصفهان برود او می خواهد با خودرو خود و یا با قطار برود . اگر با قطار برود ۳ نوع قطار وجود دارد و اگر با خودرو خود برود مسیر های سوال قبل خواهد بود . به چند طریق این کار امکان پذیر است ؟

سوال : در شکل زیر که جاده ها همه یک طرفه هستند به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت ؟



سوال : ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را در نظر بگیرید . با این ارقام :

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت ؟

ب) چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟

ج) چند عدد ۳ رقمی زوج می توان نوشت ؟

سوال : ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را در نظر بگیرید . با این ارقام :

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت ؟

ب) چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟

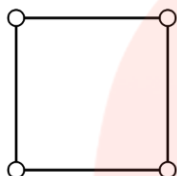
ج) چند عدد ۳ رقمی زوج می توان نوشت ؟

سوال : رمز دستگاهی از دو قسمت تشکیل شده که یا هر دو عدد یا هر دو حروف لاتین هستند. این رمز چند حالت ممکن دارد ؟

www.my-dars.ir

سوال : رمز دستگاهی از سه قسمت تشکیل شده است که هر قسمت می تواند حروف فارسی یا لاتین باشد . اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند . برای این رمز چند حالت وجود دارد ؟

سوال: با حروف a,b,c,d,e,f چند رمز ۴ حرفی می توان نوشت که حرف اول صدا دار و حرف دوم a بوده و حرف آخر d نباشد؟

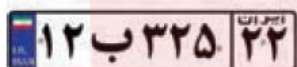


سوال: رئوس شکل مقابل را می خواهیم با دو رنگ آبی و قرمز رنگ کنیم .

الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

ب) به چند طریق می توان این کار را کرد که راسهایی که به هم وصل هستند هم رنگ نباشند؟

سوال: پلاک های تهران به صورت مقابل تولید می شوند که ارقام سمت چپ ارقام ۱ تا ۹ هستند



و ارقام سمت راست از مجموعه $\{۱۰, ۱۱, ۲۲, ۳۳, ۴۴, ۵۵, ۶۶, ۷۷, ۸۸, ۹۹\}$ و

حروف از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۰\}$ انتخاب می شوند. تعداد پلاک های تولید شده چقدر خواهد بود؟

سوال: در یک آزمون ۵ سوال ۲ گزینه ای و ۴ سوال ۳ گزینه ای وجود دارد به چند طریق می توان به این آزمون پاسخ داد اگر:

الف) پاسخ دادن به همه سوالات اجباری باشد.

ب) پاسخ دادن به همه سوالات اجباری نباشد.

درس دوم: جایگشت

در قسمت قبل با اصل ضرب آشنا شدیم حال فرض کنید ۵ نفر از دوستانتان را می خواهید در یک ردیف کنار هم قرار دهید طبق اصل

ضرب برای جایگاه اول ۵ انتخاب دارید و برای جایگاه دوم ۴ انتخاب و ... پس $۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$

اگر می خواستیم ۱۰ نامه مختلف را در ۱۰ پاکت مختلف قرار دهیم چند راه وجود داشت؟

به هر نحوه قرار گرفتن چند شی در کنار هم یک جایگشت از آن اشیا گفته می شود. آیا درست است بگوییم تعداد کل

جایگشت های n شی مختلف برابر با $۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times (n-1) \times n$ است؟

همانطور که دیدیم نوشتن این ضرب های متوالی طولانی خواهد بود پس بهتر است راهی برای ساده نویسی آن بیابیم .

برای ساده نویسی حاصل ضرب های اعداد طبیعی از ۱ تا n از نمادی به نام **فاکتوریل** استفاده می شود :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 \quad \xrightarrow{\text{مثال}} \quad \begin{cases} 2! = 2 \times 1 = 2 \\ 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\ 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \end{cases}$$

و قرار داد می کنیم که $0! = 1$ و $1! = 1$ باشد .

در ضمن می توانیم عدد فاکتوریل دار را تا جایی که می خواهیم باز کنیم و برای ادامه ندادن بیشتر با فاکتوریل انتهای آن را ببندیم :

$$n! = n(n-1)! \quad , \quad 8! = 8 \times 7 \times 6!$$

هشدار !!! : برای انجام عملیات ریاضی بین دو عدد فاکتوریلی باید ابتدا آنها را از حالت فاکتوریلی خارج کنیم :

$$4! + 2! \neq 6! \quad , \quad 4! \times 2! \neq 8! \quad , \quad \frac{4!}{2!} \neq 2!$$

سوال : حاصل عبارت های زیر را بیابید .

$$2! + 3! + 4! =$$

$$(2!)! =$$

$$3! \times 4! =$$

$$\frac{6!}{4!} =$$

$$\frac{8!}{2! \times 6!} =$$

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} =$$

سوال : عبارت های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید .

$$6 \times 5! =$$

$$9 \times 8 \times 7 =$$

$$n(n-1) =$$

سوال : به چند طریق ۵ افسر و ۳ سرباز می توانند در کنار هم قرار بگیرند به طوری که :

الف) سرباز ها کنار هم باشند .

ب) افسر ها کنار هم باشند .

ج) هم درجه ها کنار هم باشند .

سوال : چند کلمه ۵ حرفی با حروف کلمه « گلزار » بدون تکرار حروف می توان نوشت که کلمه « گل » داشته باشد ؟

سوال : چند جایگشت با حروف کلمه « جهانگردی » می توان نوشت که حروف کلمه « جهان » در کنار هم باشند ؟

بیشتر بدانیم :

اگر اشیاء تکراری وجود داشته باشد برای یافتن تعداد جایگشت ها باید در مخرج تعداد تکراری ها با فاکتوریل نوشته شود.

مثال : حروف کلمه « امامان » چند جایگشت مختلف دارد ؟

$$\text{حل : } \frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

درس سوم : ترتیب و ترکیب

انتخاب r شی از n شی مختلف :

هر گاه قرار باشد از بین اشیاء مختلف تعدادی از آنها را انتخاب کنیم بنا به اهمیت ترتیب انتخاب دو حالت به وجود می آید :

۱. ترتیب (یا جایگشت r شی از n شی) :

وقتی ترتیب انتخاب مهم باشد : مثل زمانی که قرار است سمت ، جایگاه ، مقام ، جایزه داده شود .

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

۲. ترکیب :

وقتی ترتیب انتخاب مهم نباشد : مثل زمانی که قرار است گروه، تیم ، مجموعه ، دسته تشکیل شود .

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

توجه شود که ترکیب r تایی از n شی را بیشتر با نماد $\binom{n}{r}$ نمایش می دهند .

سوال : از بین ۱۰ کارمند به چند طریق می توان سه نفر را برای سمت های مدیریت ، معاونت ، خزانه داری انتخاب کرد ؟

سوال : از بین ۱۰ کارمند به چند طریق می توان سه نفر را برای تشکیل هیأت مدیره انتخاب کرد ؟

سوال : اگر از بین چند کتاب مختلف ۳ تای آن را انتخاب و در قفسه بچینیم و این کار به ۲۱۰ حالت ممکن باشد .تعداد کتاب ها چند تا است ؟

سوال : با حروف کلمه « جهان گردی » بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که انتهای آن به « ان » ختم شود ؟

سوال : یک مجموعه ۷ عضوی چند زیر مجموعه ۴ عضوی دارد ؟

سوال : با نقطه روز دایره چند مثلث می توان رسم کرد ؟

سوال : از بین ۸ ورزشکار به چند طریق می توان مدال های طلا ، نقره و برنز را توزیع کرد ؟

نکته : برای ساده شدن محاسبات موارد زیر را به خاطر داشته باشید :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

سوال : از بین ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود . به چند طریق می توان این کار را انجام داد که :

الف) کمیته ۶ نفره و از هر رشته ۲ نفر .

(ب) کمیته ۴ نفره و حداقل یک ریاضی دان

(ج) کمیته ۵ نفره و حداکثر دو شیمی دان

(د) کمیته ۳ نفره و هر سه نفر از یک رشته

(ه) کمیته ۳ نفره و هیچ دو نفری هم رشته نباشند.

نکته: طبق قاعده $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$ می توان مجموع فرمول دو ترکیب را به یک فرمول تبدیل کرد.

سوال: حاصل را به صورت یک فرمول ترکیب بنویسید.

$$\binom{11}{4} + \binom{11}{5} =$$

$$\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} + \binom{8}{6} =$$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} =$$

مای درسی

تمرین: تمرین های صفحه ۳۹ و ۴۰ را انجام دهید.

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir