

درسنامه فصل دوم

ریاضی و آمار (۲) پایه یازدهم انسانی

@mathmehryar

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

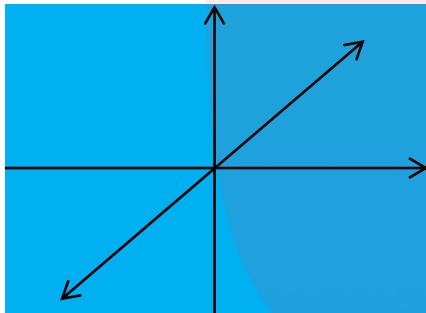
تابع ثابت: تابعی که در آن به ازای تغییر متغیر مستقل، مقادیر تابع تغییر نکند تابع ثابت است. به بیان دیگر تابع ثابت تابعی است که برد آن شامل تنها یک عضو است، مانند $f = \{(2,3), (-1,3), (0,3)\}$.

ضابطه ای تابع ثابت به صورت $\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \{c\} \\ f(x) = c \end{cases}$ می باشد و نمودار آن یک خط موازی محور x هاست.

نکته ۱: دامنه ی تابع ثابت مجموعه \mathbb{R} و برد آن مجموعه تک عضوی $\{c\}$ می باشد که $c \in \mathbb{R}$.

تابعی همانی: اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود آن تابع را تابع همانی می نامند، مانند تابع $g = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$. ضابطه تابع همانی به صورت

$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x \end{cases}$ می باشد و نمودار آن نیم ساز ناحیه اول و سوم در دستگاه مختصات است.



$$y = x$$

نکته ۲: دامنه و برد تابع همانی مجموعه \mathbb{R} است.

تذکر: ممکن است تابع همانی در یک دامنه ی مشخص تعریف شود در غیر این صورت دامنه ی آن را \mathbb{R} در نظر می گیریم.

مثال ۱: با توجه به دامنه ی $D = \{2,3,5\}$ تابع همانی مربوط به آن را رسم کنید.

مثال ۲: اگر f یک تابع همانی و $g(2) = 3$ می باشد حاصل $\frac{f(2)+g(1)}{2+g(3)}$ را به دست آورید.

تابع چند ضابطه ای: توابعی که در بخش های مختلف دامنه، ضابطه های مختلف دارند تابع چند ضابطه

ای نامیده می شود. مانند تابع زیر:

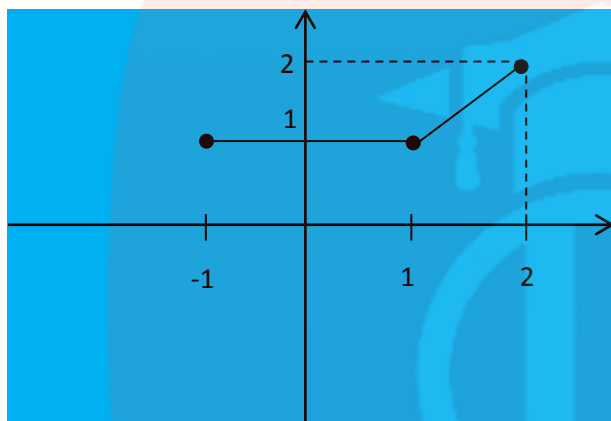
$$\text{www.my-dars.ir}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; 1 \leq x < 2 \\ 4 & ; 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

مثال ۳: با توجه به تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1; & -1 \leq x < 1 \\ 2 & ; 1 \leq x < 3 \\ x + 2 & ; x \geq 3 \end{cases}$ مقادير $f(0)$, $f(2)$ و $f(1 + \sqrt{5})$ را

به دست آوريد.

مثال ۴: ضابطه تابع مربوط به نمودار زير را بنويسيد.



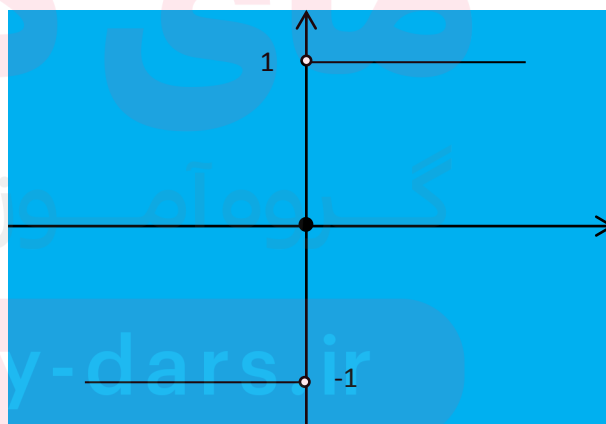
مثال ۵: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & -2 \leq x < 0 \\ 2 & ; 0 \leq x < 2 \\ x - 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$ حاصل $f(-\sqrt{2}) + f(2)$ را به دست آوريد.

مثال ۶: اگر $A = \{(3, m), (n, 2), (6, m + n)\}$ يك تابع ثابت باشد مقدار n را به دست آوريد.

تابع علامت: هر تابع كه ضابطه ي آن به صورت زير باشد تابع علامت نام دارد و آن را با $y = \text{sign}(x)$

نشان مي دهند.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



نکته ۳: دامنه ي تابع علامت مجموعه ي \mathbb{R} و برد آن مجموعه ي $\{-1, 0, 1\}$ مي باشد.

مثال ۷: مقدار عبارت $sign(2) + 2sign(-1)$ را به دست آورید.

تابع پلکانی: یک تابع چند ضابطه ای است که در هر ضابطه مقدار تابع عددی ثابت است، مانند تابع زیر:

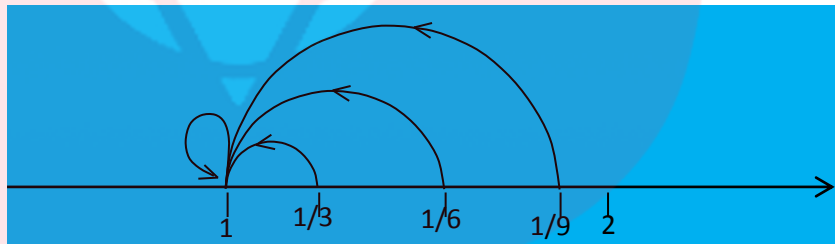
$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 2 & ; 1 \leq x < 2 \\ 3 & ; 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

تابع جز صحیح: تابعی که به هر عدد صحیح k خود همان عدد w به تمام اعداد میان دو عدد صحیح

متوالی k و $k+1$ عدد صحیح k را نسبت دهد تابع جز صحیح می نامند. ضابطه ی این تابع را با $f(x) = [x]$ معرفی می کنند.

تذکره: برای رسم تابع جز صحیح $f(x) = [x]$ در یک بازه (فاصله) کافی است طول فاصله را به فاصله هایی به طول یک دسته بندی کنیم.

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1$$



مثال ۸: تابع $g(x) = [x]$ را در فاصله ی $-1 \leq x < 2$ رسم کنید.

نکته ۴: ویژگی های جز صحیح:

$$۱) [x + m] = [x] + m; m \in \mathbb{Z}$$

$$۲) [-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

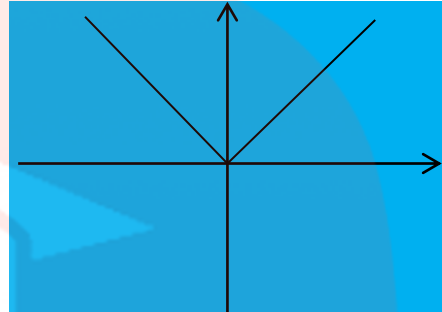
$$۳) [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$۴) [[x]] = [x]$$

مثال ۹: اگر $-1 \leq x < 0$ باشد مقدار $[x] + [x^2]$ را به دست آورید.

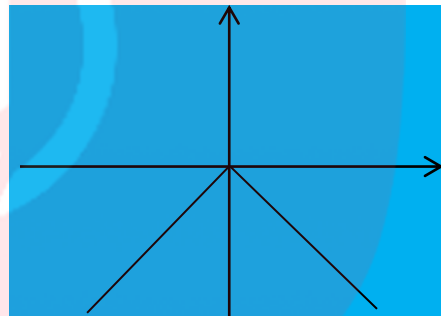
تابع قدر مطلق: تابع با ضابطه ی $f(x) = |x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می شود و مطابق تعريف:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$



نمودار تابع $f(x) = -|x|$

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$



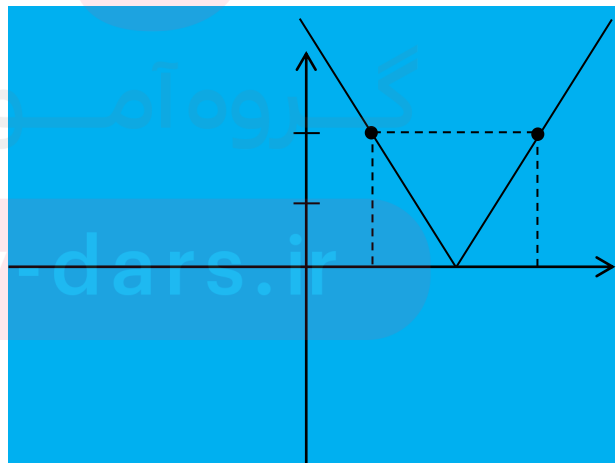
نکته ۵: برای رسم تابع $|u|$ که u تابعی از x می باشد ابتدا ریشه داخل قدر مطلق ($u=0$) را به دست

آورده سپس آن را رسم می کنیم.

مثال ۱۰: تابع $f(x) = |2x - 4|$ را رسم کنید.

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x \geq 2 \\ -(2x - 4) & x < 2 \end{cases}$$



نکته ۶: برای رسم تابع $y = |x| + k$ کافی است نمودار $|x|$ را k واحد رول محور y به سمت بالا انتقال

دهيم

نکته ۷: برای رسم تابع $y = |x| + k$ کافی است نمودار $|x|$ را k واحد روی محور y به سمت پايين

انتقال دهيم .

نکته ۸: برای رسم تابع $y = |x - k|$ کافی است نمودار $|x|$ را k واحد رول محور x به سمت راست

انتقال دهيم.

نکته ۹: برای رسم تابع $y = |x + k|$ کافی است نمودار $|x|$ را k واحد رول محور x به سمت چپ انتقال

دهيم.

مثال ۱۱: نمودار تابع $y = |x| - 2$ ، $y = |x| + 2$ ، $y = |x - 2|$ ، $y = |x + 2|$ را با استفاده از

نمودار تابع $y = |x|$ رسم کنید.

اعمال روی توابع: تابع f با دامنه D_f و تابع g با D_g را در نظر بگیرید جمع، تفریق، ضرب و تقسیم توابع

f و g به صورت زیر تعريف می شوند :

$$۱) (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ و } D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$۲) (f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ و } D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$۳) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \text{ و } D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$۴) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ و } D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g | g(x) = 0\}$$

www.my-dars.ir

تذکره: برای انجام اعمال جبری روی توابعی که به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب داده شده اند کافی است x های مشترک (مولفه های اول مشترک) زوج های مرتب دو مجموعه را در نظر گرفته و عملیات مورد نظر را بر روی y های نظیر (مولفه های دوم) انجام دهید .

مثال ۱۲: توابع $f = \{(2,3), (3,4), (4,5)\}$ و $g = \{(3,4), (5,6), (2,3)\}$ مفروضند . توابع زیر را محاسبه کنید .

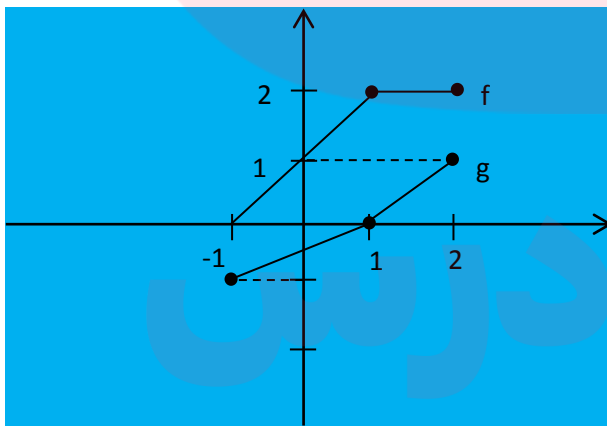
الف) $f + g$ ب) $2f \times g$ پ) $\frac{f}{g}$ ت) $2f - g$

$D_f = \{2,3,4\}$ $D_g = \{2,3,5\}$ $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{2,3\}$

الف) $(f + g)(x) = \{(2,6), (3,8)\}$

مثال ۱۳: نمودار توابع f و g در شکل مقابل رسم شده است و مقدار عبارت:

$(f + g)(-1) + (f - g)(2)$ را به دست آورید .



مثال ۱۴: اگر $f(x) = x^2$ و $\frac{f+g}{g} = x$ باشد، ضابطه ی تابع $g(x)$ را به دست آورید.

www.my-dars.ir

تست:

۱- تابع $f(x) = 3x - 1$ را در نظر بگيريد. اگر $f(b) = 2f(0) - f(2)$ باشد، آن گاه مقدار b کدام است؟

- ۱) -2 ۲) 4 ۳) -3 ۴) 1

۲- اگر $f = \{(1, a + b + 1), (2a, 2a - 1), (2, a^2)\}$ يك تابع ثابت باشد، آن گاه ab کدام است؟

- ۱) 2 ۲) 1 ۳) -2 ۴) -1

۳- اگر $f = \{(4a + b, 4a^2 + b + 1), (4a + b^2, 2b + 1), (b^2, 1)\}$ تابع هماني باشد، $a - b$ کدام

است؟

- ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۴- اگر $f(x) = \frac{bx^2 + ax - c}{x + 2}$ تابع هماني باشد، $a + b + c$ کدام است؟ ($x \neq -2$)

- ۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۵- اگر f يك تابع هماني و g يك تابع ثابت با ضابطه $g(x) = 3$ باشد مقدار $2f(2) - g(2)$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

۶- اگر f تابع ثابت و g تابع هماني با دامنه های \mathbb{R} باشند و برای اين دو تابع داشته باشيم $f(3) = g(-1)$ ،

حاصل $g(2) + f(5)$ کدام است؟

- ۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

www.my-dars.ir

۷- اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & ; x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & ; x \geq 1 \end{cases}$ باشد حاصل $f\left(\frac{3}{4}\right) - f\left(\frac{5}{4}\right)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۸- اگر $a > 0 > b$ باشد حاصل $|a - b| + |a + 1| - |1 - b|$ کدام است؟

$2a + 2b + 2$ (۴)

$2a + 2b$ (۳)

$2b$ (۲)

$2a$ (۱)

۹- مساحت محدود بين نمودار تابع $y = |x|$ و $y = -|x| + 4$ کدام است؟

16 (۴)

8 (۳)

6 (۲)

4 (۱)

۱۰- نمودار تابع $f(x) = |x + 3|$ و تابع همانی در چند نقطه همدیگر را قطع می کنند؟

3 (۴)

2 (۳)

1 (۲)

0 (۱)

۱۱- مقدار $\left[[x] - \frac{x}{3} \right]$ به ازای $x = -\frac{1}{2}$ چقدر است؟

-1 (۴)

-2 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

۱۲- اگر $f(x) = |x|$ ، مجموعه مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟

$\{-1, 0, 1\}$ (۴)

$\{0, 1\}$ (۳)

$\{1\}$ (۲)

$\{0\}$ (۱)

۱۳- اگر $f = \{(1, 3), (2, -1), (3, 4), (5, 2)\}$ و $g = \{(-1, 2), (3, -2), (5, 3), (2, 8)\}$ باشند برد تابع

$2f + g$ چند عضو دارد؟

4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

۱۴- اگر $f = \{(1, 3), (2, -4), (3, 5)\}$ و $g = \{(1, -3), (-4, 2)\}$ باشد حاصل $(2f - 1) \times g$ کدام

است؟

$\{(1, -15)\}$ (۴)

$\{(2, -14), (1, 10)\}$ (۳)

$\{(1, 12)\}$ (۲)

$\{(0, -15)\}$ (۱)

۱۵- اگر $f(x) = \left[x + \frac{1}{2}[x] \right]$ باشد، مقدار عبارت $f(2/4) + 2\text{sign}(2 - \sqrt{2})$ کدام است؟

5(۴)

4(۳)

3(۲)

2(۱)

۱۶- اگر تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2a + b| - b$ را سه واحد به سمت راست و یک واحد پایین انتقال

دهیم، مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

2(۴)

3(۳)

4(۲)

5(۱)

مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir