

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

سلام

وقت بخیر

بزه های کلاس های مجازی

مدرس: مزبان حبیبی

موضوع: فصل دوم، احتمال - آمار و احتمال

گروه آموزشی عصر

فصل دوم، احتمال

برای هر پیشامد مثل A ، احتمال رخ دادن آن با $P(A)$ نمایش داده می شود که عددی حقیقی در بازه $[0, 1]$ است.
اصول احتمال عبارت اند از:

$$P(S) = 1$$

برای هر دو پیشامد A و B که $A \cap B = \emptyset$ ، داریم $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
به خاصیتی که در بند ۲ برای دو پیشامد A و B فرض شده است، یعنی $A \cap B = \emptyset$ ، ناسازگاری این دو پیشامد گفته می شود و به این معناست که رخ دادن هر دوی آنها هم زمان محال است. در غیر این صورت، می گویم A و B سازگارند.

۱ مبای احتمال

۲ احتمال غیر هم ناسنس

۳ احتمال شرطی

۴ پیشامدهای مستقل وابسته

آمده احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

قضیه

در مورد هر فضای نمونه، گزاره های زیر درست است:

$$\left. \begin{array}{l} A \cap A' = \emptyset \Rightarrow P(A \cup A') = P(A) + P(A') \\ A \cup A' = S \Rightarrow P(A \cup A') = P(S) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

$P(A') = 1 - P(A)$ ۱

$P(\emptyset) = 0$ ۲

$\emptyset = S' \Rightarrow P(\emptyset) = P(S') = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$

۳ اگر A, B, C پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند، آنگاه

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \Rightarrow A \text{ و } B \cup C \text{ ناسازگارند}$

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + P(B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

مدرس: مزبان حبیبی

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۴ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

دو مجموعه $(A \cup B)$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را در نظر بگیرید.

$$(A - B) \cap (A \cap B) = (A \cap B') \cap (A \cap B) = A \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$(A - B) \cup (A \cap B) = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A \Rightarrow (A - B) \cup (A \cap B) = A$$

$$\Rightarrow P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A) \Rightarrow P(A - B) + P(A \cap B) = P(A) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

۵ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$A \cap (B - A) = A \cap (B \cap A') = (A \cap A') \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap (B - A) = \emptyset$$

$$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = (A \cup B) \cap U = A \cup B$$

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

کار در کلاس

صفحه ۶۲ آمار و احتمال

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱ دانش آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می کنید،

A : متولد ماه مهر باشد،

باز رنگار

B : متولد فصل تابستان باشد.

۲ سکهای که سه بار پرتاب می کنید،

A : هر سه بار مشابه بیاید،

باز رنگار

B : زوج بار رو بیاید.

۳ فردا

A : خورشید در آسمان دیده شود،

باز رنگار

B : باران بیارد.

۴ تاسی را بی در بی پرتاب می کنید،

A : برای اولین بار در مرتبه سوم ۶ بیاید،

باز رنگار

B : تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

درس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

صنوع ۴۷ آمار و احتمال

تعریف



۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می کنند.

فضای نمونه برای این بازی چیست؟
 { (سنگ، سنگ)، (سنگ، کاغذ)، (سنگ، قیچی)، (کاغذ، سنگ)، (کاغذ، کاغذ)، (کاغذ، قیچی)، (قیچی، سنگ)، (قیچی، کاغذ)، (قیچی، قیچی) }

فضای نمونه چند عضو دارد؟
 $3 \times 3 = 9$

در چه تعداد از برآمدها احمد برنده بازی است؟

{ (سنگ، سنگ)، (سنگ، کاغذ)، (سنگ، قیچی)، (کاغذ، سنگ)، (کاغذ، کاغذ)، (کاغذ، قیچی) }
 $6 = 3$

۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آنها اهمیت داشته باشند، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اولین کسی که وارد می شود، بلند قدترین عضو تیم باشند چقدر است؟

$$14! = \text{تعداد کل}$$

$$1 \text{ نفر بلند قدترین} = 1$$

$$\text{احتمال} = \frac{1!}{14!} = \frac{1}{14!}$$

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم



۳ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می شود: دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می کنیم: آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می وزد یا نمی وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک

لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

$$A = \{ \text{گرم، سرد} \}$$

$$B = \{ \text{رطوبت، خشک} \}$$

$$C = \{ \text{باد می وزد، باد نمی وزد} \}$$

$$D = \{ \text{صاف، نیمه ابری، ابری} \}$$

$$E = \{ \text{بارندگی رخ داده، بارندگی رخ نداد} \}$$

مدرس: مزبان حبیبی

$$S = A \times B \times C \times D \times E$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$$

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات شده، گزاره های زیر را ثابت کنید :

$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$$

الف) اگر $B \subseteq A$ داریم: $P(A-B) = P(A) - P(B)$.

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(B)$$

ب) اگر $B \subseteq A$ ، آنگاه $P(B) \leq P(A)$.

$$0 \leq P(A-B) \Rightarrow 0 \leq P(A) - P(B) \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

۵ عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می کنیم. احتمال های زیر را محاسبه کنید :

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد.

$$A = \{2, 4, \dots, 100\} \Rightarrow n(A) = 50$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{14}{100} = \frac{49}{100}$$

$$B = \{3, 6, \dots, 99\} \Rightarrow n(B) = 33$$

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد، ولی به ۳ بخش پذیر نباشد.

$$A \cap B = \{6, 12, \dots, 96\} \Rightarrow n(A \cap B) = 16$$

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} - \frac{16}{100} = \frac{34}{100}$$

ب) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد و نه بر ۳.

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{49}{100} = \frac{51}{100}$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

فصل دوم، احتمال غیر هم شانس

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه ای $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه ای با احتمال غیر هم شانس می گوئیم.

در فضای نمونه ای منتهای با احتمال غیر هم شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیر مجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \color{red}{\boxed{1}}$$

$$P(S) = 1 \quad \color{red}{\boxed{2}}$$

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad \color{red}{\boxed{3}}$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

کار در کلاس

صفحه - ۳۵ سار و آمار

۱ در یک آزمایش تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x, y\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{x, z\}) = \frac{1}{4}$ احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای ساده را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} P(\{x, y\}) = \frac{2}{3} &\Rightarrow P(x) + P(y) = \frac{2}{3} \\ P(S) = 1 &\Rightarrow P(x) + P(y) + P(z) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(z) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(\{x, z\}) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(x) + P(z) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(x) + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(x) + P(y) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{12} + P(y) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(y) = \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

| پیشامدها | x | y | z |
|----------|----------------|----------------|---------------|
| احتمال | $\frac{1}{12}$ | $\frac{7}{12}$ | $\frac{1}{3}$ |

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۲ یک تاس به گونه ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهده اعداد ۲ یا ۳ را به دست آورید.

| | | | | | | |
|-----|-----|------|-----|------|-----|------|
| x | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
| P | x | $3x$ | x | $3x$ | x | $3x$ |

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$x + 3x + x + 3x + x + 3x = 1 \Rightarrow 12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

| | | | | | | |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| x | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
| P | $\frac{1}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{3}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{3}{12}$ |

$$P(\{2, 3\}) = P(2) + P(3) = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12}$$

اوجس (۵): $P(1) = P(3) = P(5) = x$ و $P(2) = P(4) = P(6) = 3x$

$$P(\{2, 3\}^c) = P(2) + P(3) = \frac{3x}{12x} + \frac{x}{12x} = \frac{4x}{12x} = \frac{1}{3}$$

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

صحنه ۵۱ آسیا رو آستخانی

تعریف

۱ در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

$$P(\text{رو}) = x \text{ و } P(\text{پشت}) = \frac{1}{4}x$$

$$P(\text{رو}) + P(\text{پشت}) = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{4}x = 1 \Rightarrow 5x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow P(\text{رو}) = \frac{4}{5} \text{ و } P(\text{پشت}) = \frac{1}{5}$$

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید.

| شماره تاس | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
|-----------|-----|------|------|------|------|------|
| احتمال | x | $2x$ | $3x$ | $4x$ | $5x$ | $6x$ |

$$P(S) = 1 \Rightarrow x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$P(\{1, 2, 3\}) = P(1) + P(2) + P(3) = x + 2x + 3x = 6x = \frac{6}{21}$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۳ اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, c, d\}$ ، و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{5}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ مقدار $P(C')$ را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} P(A) = \frac{2}{5} &\Rightarrow P(a) + P(b) = \frac{2}{5} \\ P(B) = \frac{3}{5} &\Rightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = \frac{3}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(c) + P(d) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(C') = P(\{c, d\}) = P(c) + P(d) = \frac{1}{5}$$

۴ در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.

| | | | |
|--------|-----|-------------------|-------------------|
| برآورد | x | y | z |
| احتمال | a | $a + \frac{1}{4}$ | $a + \frac{2}{4}$ |

$$\begin{aligned} P(S) = 1 &\Rightarrow P(x) + P(y) + P(z) = 1 \\ &\Rightarrow a + a + \frac{1}{4} + a + \frac{2}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3a = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

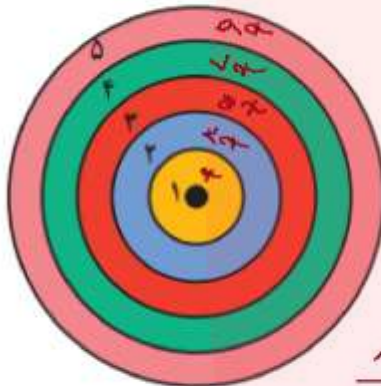
| | | | |
|--------|----------------|---------------|---------------|
| برآورد | x | y | z |
| احتمال | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}$ |

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر



۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره ای شکل، مطابق شکل روبه رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه k ام، $(2k-1)x$ باشد:

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

$$P(S) = 1 \Rightarrow x + 3x + 5x + 7x + 9x = 1 \Rightarrow 25x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

| مرکز | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| احتمال | $\frac{1}{25}$ | $\frac{3}{25}$ | $\frac{5}{25}$ | $\frac{7}{25}$ | $\frac{9}{25}$ |

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا

اصابت به دو ناحیه دوم یا پنجم؟

$$P(\{1, 3, 4\}) = P(1) + P(3) + P(4) = \frac{1}{25} + \frac{5}{25} + \frac{7}{25} = \frac{13}{25}$$

$$P(\{2, 5\}) = P(2) + P(5) = \frac{3}{25} + \frac{9}{25} = \frac{12}{25} \Rightarrow P(\{1, 3, 4\}) > P(\{2, 5\})$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

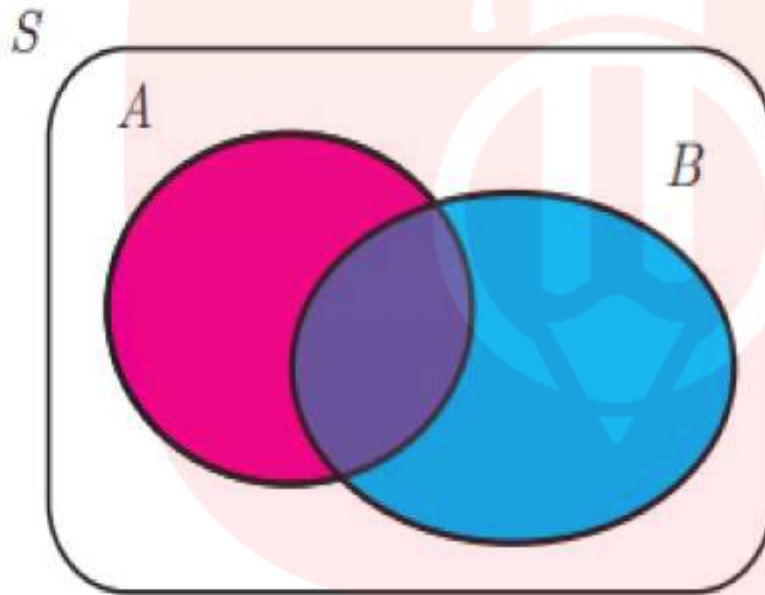
mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزمه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم



احتمال شرطی

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

+989166161828 www.mezbanhabibi.ir +989176193511

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (1)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (3)$$

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A|B)}{P(B|A)} \quad (4)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} \cdot P(B|A) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} \quad (5)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \cdot P(A|B) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} \quad (6)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

توجه:
 قانون ضرب احتمال

نسبت بیز

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

مثال : دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

$$S = \{11, 12, \dots, 44\} \quad n(S) = 36$$

مجموع دو تاس ۱۰ = B ، تاس سبز ۶ = A

$$A = \{41, 32, 23, 44, 25, 42\} \quad B = \{44, 55, 44\} \quad A \cap B = \{44\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}$$

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شده باشد چقدر است؟

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال: تیم ملی والیبال ایران، ۱۴ بازیکن دارد که قدهیج دو نفری برابر نیست. اگر یکی از بازیکن ها را به تصادف انتخاب کنیم.

الف) احتمال اینکه آن بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟ $\frac{1}{14}$

ب) بازیکن دیگری را به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم که از بازیکن اول کوتاه قدر است. در این صورت، احتمال اینکه بازیکن اول بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

$$A \equiv \text{بازیکن اول، بلندقدترین تیم} \quad B \equiv \text{بازیکن اول، دوم بلندقدتر است}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{2}{14}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

کار در کلاس

در فعالیت مربوط به دانش آموزان پایه یازدهم آمده بود که سه کلاس ۱-۱۱، ۲-۱۱ و ۳-۱۱ به ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش آموز دارند و در آزمون مشترک در این سه کلاس به ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمره کامل شده اند. دانش آموزی را به تصادف انتخاب می کنیم. پیشامد «دانش آموز کلاس ۱-۱۱ بودن» را B_1 می نامیم و B_2 و B_3 را به طور مشابه تعریف می کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با A نمایش می دهیم.

الف) مقدار $P(A|B_i)$ را برای $i=1,2,3$ محاسبه کنید.

ب) مقدار $P(B_i|A)$ را برای $i=1,2,3$ محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده اید چیست؟

پ) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق تر می دانید؟ برای پاسخ

دادن به این سؤال، پاسخ قسمت (الف) مهم است یا پاسخ قسمت (ب)؟

بزمه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

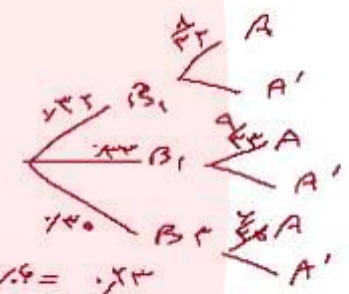
$A =$ سبز کلاس نود $B_1 =$ کلاس ۱-۱۱ $B_2 =$ کلاس ۱-۱۲ $B_3 =$ کلاس ۱-۱۳

الف)

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{22}}{\frac{11}{100}} = \frac{1}{10}$$

$$P(A|B_2) = \frac{P(A \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{1}{10}$$

$$P(A|B_3) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{1}{10}$$



$$P(A) = \frac{1}{22} + \frac{1}{22} + \frac{1}{22} = \frac{3}{22}$$

ب)

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)}{P(A)} \cdot P(A|B_1) = \frac{\frac{11}{100}}{\frac{3}{22}} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)}{P(A)} \cdot P(A|B_2) = \frac{\frac{11}{100}}{\frac{3}{22}} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)}{P(A)} \cdot P(A|B_3) = \frac{\frac{11}{100}}{\frac{3}{22}} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

(ب) (ب)

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال: فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اول سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگری قرمز است. کارت را به تصادف برمی داریم و مشاهده می کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال اینکه هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟
حل: فرض کنید:

A : کارت دو رو سبز است.

B : روی مشاهده شده کارت انتخابی سبز است.

باید $P(A \cap B)$ و $P(B)$ را محاسبه کنیم. واضح است که بعد از انتخاب یک کارت و نگاه کردن به یک روی آن، یکی از شش روی سه کارت را با احتمال های برابر، خواهیم دید و چون در مجموع سه روی سبز و سه روی قرمز داریم، پس

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

احتمال بیشامد $A \cap B$ را به راحتی می توان با استفاده از قانون ضرب به دست آورد:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

دلیل اینکه $P(A) = \frac{1}{3}$ است، این است که از سه کارت، یکی دو رو سبز است و $P(B|A) = 1$ چون اگر کارت انتخابی دو رو سبز باشد، روی مشاهده شده حتماً سبز است. در نتیجه: $P(A|B) = \frac{2}{3}$.

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

قانون احتمال کل

فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A ، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

فرض کنید B پیشامدی باشد که $0 < P(B) < 1$. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A ، داریم:

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$$

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال : دسته ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کاردی را به تصادف از این دسته انتخاب می کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می کنیم و می بینیم که قرمز است. احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد که رنگ قرمز دیده شود را A و این پیشامد که دو روی کارت انتخابی قرمز باشند را B می نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. با توجه به اینکه B و B' فضای نمونه را افراز می کنند داریم :

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B') = 0/2 \times 1 + 0/8 \times 0/5 = 0/6$$

توجه کنید که پیشامد B' یعنی کارت انتخابی دو رو قرمز نباشد و به همین دلیل احتمال آن $0/8$ است. طبق قانون بیز داریم :

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0/2 \times 1}{0/6} = \frac{1}{3}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر



مثال : سه صندوق سیب، هر کدام شامل ۱۰۰ سیب داریم. سیبهای صندوق اول سبز؛ سیبهای صندوق دوم، قرمز است. صندوق سوم شامل ۲ سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید دست در صندوق کنیم و سیبی را تصادفاً در آوریم و ببینیم که سبز است. احتمال اینکه همه سیب‌های صندوق سبز باشند چقدر است؟
 حل : فرض کنید پیشامد A ، یعنی سیب مشاهده شده سبز باشد و پیشامدهای B_1 ، B_2 و B_3 به ترتیب به معنای انتخاب صندوق‌های اول، دوم و سوم باشند. لذا

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

و

$$P(A|B_1) = 1, \quad P(A|B_2) = 0, \quad P(A|B_3) = \frac{2}{100} = 0.02$$

برای محاسبه $P(B_1|A)$ ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم. طبق قانون احتمال کل

$$P(A) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0.02 = 0.34$$

در نتیجه :

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{0.34} = \frac{1}{1.02} = 0.9804$$

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

تمرین

صحنه مهم آمار و احتمال
۱ درباره خانواده ای چهار فرزندی، می دانیم که دست کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

$$A = \text{دقیقاً ۲ پسر} \quad B = \text{دست کم یکی پسر}$$

$$A = \{PPDD, PDDP, DDDP, DDPP, DPPD, DPDP\}$$

$$B = S - \{DDDD\}$$

$$A \cap B = A$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{14}}{\frac{15}{14}} = \frac{4}{15}$$

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۲ ستاد مرکزی معاینه فنی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد: «امسال یرکارترین سال در عرصه معاینه فنی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینه فنی شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سال‌های مبارزه با آلودگی هوا بود...»
در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینه فنی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه کرده و خودروهای مردودی در معاینه فنی باشد: (تعداد به هزار دستگاه است).

| شماره مرکز | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| تعداد مراجعه | ۶۰ | ۷۷ | ۸۶ | ۸۵ | ۷۹ | ۷۹ | ۵۶ | ۵۹ | ۴۸ | ۵۰ | ۵۵ | ۵۱ | ۸۵ |
| تعداد مردودی | ۲۸ | ۱۶ | ۱۲ | ۱۷ | ۲۶ | ۱۰ | ۱۴ | ۱۴ | ۲۹ | ۳۰ | ۲۲ | ۲۲ | ۱۸ |

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

$A \equiv$ در ۲

$B_i \equiv$ مرکز i

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه کرده انتخاب می کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{244}{170} \approx 1.43$$

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شماره ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

$$P(A | B_5) = \frac{P(A \cap B_5)}{P(B_5)} = \frac{24}{29}$$

ب) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شماره ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

$$P(B_5 | A) = \frac{P(B_5)}{P(A)} = P(A | B_5) = \frac{\frac{24}{170}}{\frac{244}{170}} \times \frac{24}{29} = \frac{24}{244}$$

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

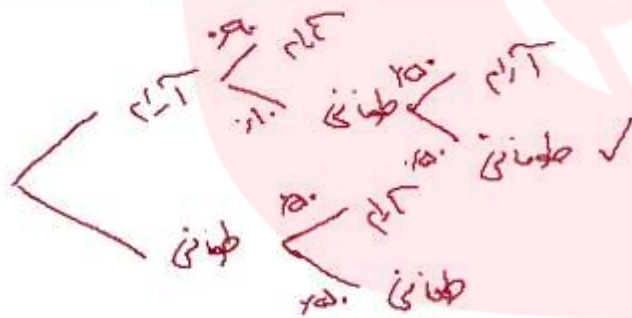
گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم



۲ بررسی های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیره هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟



مدرسه طوفانی = A

مدرسه آرام = B

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$= 0.1 \times 0.5 = 0.05$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۴ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1) P((A_2 \cap A_3) | A_1) \\ &= P(A_1) P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \\ &\stackrel{1}{=} P(A_1) P(A_3 | A_1) P(A_2 | A_1 \cap A_3) \end{aligned}$$

۵ قانون ضرب احتمال را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبه احتمال اشتراک n پیشامد استفاده

کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟ $n!$ (صورتی طرح کنید)

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$$

$$\dots \times (n-1) \times n = n!$$

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۶ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامه تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامه تراکتور داشته باشد چقدر است؟

$E_1 \equiv \text{زن}$ $E_2 \equiv \text{مرد}$ $A = \text{گواهینامه تراکتور}$

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2)$$

$$= 0.55 \times 0.70 + 0.45 \times 0.20 = 0.385 + 0.09 = 0.475$$

۷ دو ظرف داریم. در اولی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اول یک مهره به طور تصادفی برمی داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

$E_1 \equiv \text{مهره اول سبز}$ $E_2 \equiv \text{مهره اول قرمز}$ $A = \text{مهره دوم سبز}$

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2)$$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{25}{27}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

۸ در شهری ۶۰ درصد راننده ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک راننده مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۵٪ است و زن ها چنین تخطی را به احتمال ۱٪ انجام می دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

$$E_1 \equiv \text{مرد} \quad E_2 \equiv \text{زن} \quad A = \text{توقف کند}$$

$$P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) \\ = 0.6 \times 0.05 + 0.4 \times 0.01 = 0.03 + 0.004 = 0.034$$

۹ در دو جعبه به ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبه اول ۴ لامپ و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب است. از هر کدام از جعبه ها ۵ لامپ به تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبه جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

$$E_1 \equiv \text{لامپ از جعبه اول} \quad E_2 \equiv \text{لامپ از جعبه دوم} \quad A = \text{معیوب}$$

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2) \\ = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{1}{4} + \frac{5}{24} = \frac{17}{24}$$

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

۱۰ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشند و فردی به تصادف از بین رأی دهنده های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

$E_1 \equiv A$ $E_2 \equiv B$ شرکت در انتخابات

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2) = \frac{3}{4} \times \frac{50}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{80}{100} = \frac{23}{40}$$

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)}{P(A)} \times P(A|E_1) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{23}{40}} \times \frac{50}{100} = \frac{30}{23} < \frac{1}{2} = \frac{12}{23}$$

۱۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

$E_1 \equiv$ واکسن زده $E_2 \equiv$ واکسن نزده $A =$ ابتلا به بیماری

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2) = \frac{9}{10} \times \frac{2}{1000} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{118}{10000}$$

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

۱۲ قانون بیز را ثابت کنید :

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

۱۳ امیر و بابک عضو تیم ده نفره والیبال مدرسه اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

۱۵ خانمها اکبری، برنا و چمنی نسخه خوانهای یک مؤسسه انتشاراتی اند که به ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه خوانی را انجام می دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه ای که به آنها سپرده شده را بی غلط تصحیح کنند به ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه ای نسخه خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

$$A \equiv \text{منظور از آنکه صفحه تصحیح شده باشد} \\ E_1 \equiv \text{صفحه اکبری} \quad E_2 \equiv \text{صفحه برنا} \quad E_3 \equiv \text{صفحه چمنی}$$

$$P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + P(E_3)P(A|E_3)$$

$$= \frac{20}{100} \times \frac{90}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{95}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{99}{100} = \frac{180 + 285 + 495}{1000} = \frac{960}{1000} = 0.96$$

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.96 = 0.04$$

۱۶ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره های ۱ تا ۴، کارتی را به تصادف انتخاب می کنیم و سپس سکه ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شماره کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

$$E_i \equiv \text{کارت شماره } i \quad A \equiv \text{۲ بار رو بیاید}$$

$$P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + \dots + P(E_4)P(A|E_4) = \frac{1}{4} \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{12}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3)}{P(A)} \cdot P(A|E_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

۱۷ یک شرکت بیمه، بیمه گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است: گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال 0.4 تصادف می کنند و گروه «کم خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال 0.2 است. می دانیم که 30% درصد بیمه گزاران پرخطرند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید. تصادم A کم خطر E_1 پر خطر E_2
 $P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) = \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} = 0.26$

ب) اگر یک بیمه گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A|E_1)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.26} \times \frac{4}{10} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

دو رویداد مستقل:

$$A \text{ و } B \text{ مستقل اند} : P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$A \text{ و } B \text{ ناسازگارند} : P(A \cap B) = 0$$

$$A \text{ و } B \text{ مستقل نیستند} \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \quad \text{نرم}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال ۱) در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پشامد مشاهده عدد ۳ در تاس اول و B پشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد، مستقل بودن A و B را بررسی می کنیم.

برآمد هر تاس ۶ حالت دارد. بنابراین، فضای نمونه ای این آزمایش $n(S) = 6 \times 6 = 36$ عضو دارد. اکنون پشامدهای A ، B و $A \cap B$ و احتمال های آنها را به دست می آوریم.

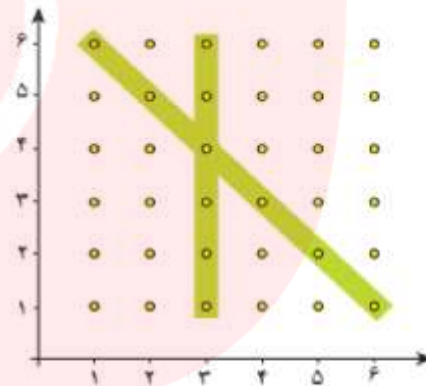
$$A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$A \cap B = \{(3, 4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$



پس $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ، بنابراین پشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند.

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

کار در کلاس

صمیم: ۶۹ آنگ و احتمال

۱ سکه سالمی را سه بار پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهده فقط دو رو به طور

متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$$A = \{PRP, PRR, RRP, RRR\}$$

$$B = \{PRR, RPR, RRP\}$$

$$A \cap B = \{PRR, RRP\} \quad n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$P(A) = \frac{4}{8} \quad \text{و} \quad P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{16} \neq P(A \cap B) \Rightarrow \text{وابسته هستند}$$

۲ در پرتاب دو تاس، A را پیشامد عدد ۳ در تاس اول و B را مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید.

$$n(S) = 36 \quad A = \{31, 32, 33, 34, 35, 36\} \quad \text{آیا } A \text{ و } B \text{ مستقل اند؟}$$

$$B = \{46, 55, 24\} \quad A \cap B = \emptyset \quad P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{36} \times \frac{3}{36} = \frac{1}{36}$$

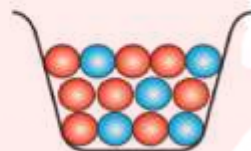
۲ در یک مسابقه تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{5}{7}$ و این احتمال برای مرتضی $\frac{7}{10}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال ۳) از جعبه ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است، دو مهره به صورت بی دربی و بدون جای گذاری، بیرون می آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهره اول و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد، الف) احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟ ب) پیشامدهای A و B مستقل اند یا وابسته؟

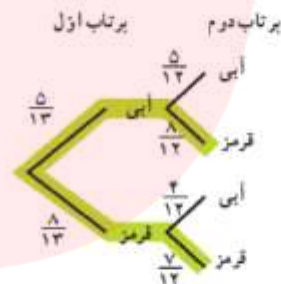


حل) با توجه به رابطه $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ در احتمال شرطی داریم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} = \frac{10}{39}$$

برای بررسی وابستگی یا استقلال این پیشامدها، $P(B|A)$ و $P(B)$ را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می کنیم. برای محاسبه $P(B)$ از قانون احتمال کلی استفاده کرده و نمودار درختی انتخاب مهره ها و تعیین حالت مطلوب را نیز محاسبه کرده ایم.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\text{مهره دوم قرمز}) \\ &= P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A') \\ &= \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} + \frac{8}{13} \times \frac{7}{12} \\ &= \frac{8}{13} \end{aligned}$$



از سوی دیگر $P(B|A) = \frac{8}{12}$ پس $P(B|A) \neq P(B)$ ، بنابراین A و B وابسته اند.

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

سه پیشامد A ، B و C را مستقل می گوئیم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی، n پیشامد A_1, A_2, \dots, A_n را مستقل می گوئیم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل ضرب احتمال آنها برابر باشد.

آماری و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال (۴) خانواده ای ۴ فرزند دارد.

- (الف) احتمال اینکه ۴ فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟
(ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟
(پ) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

حل الف) فرض کنید A پیشامد این باشد که هر ۴ فرزند خانواده دختر باشند، با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان، داریم:
$$P(A) = P(\text{دختر، دختر، دختر، دختر}) = P(\text{دختر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{دختر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

حل ب) مشابه بالا. اگر B پیشامد دختر بودن فقط فرزند اول و آخر این خانواده باشد، سپس:

$$P(B) = P(\text{دختر، پسر، پسر، دختر}) = P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{دختر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

اکنون فرض کنید C پیشامد وجود دو دختر در این خانواده باشد.

یکی از حالت‌ها به صورت زیر است:

| فرزند اول | فرزند دوم | فرزند سوم | فرزند چهارم |
|-----------|-----------|-----------|-------------|
| دختر | پسر | دختر | پسر |

و احتمال پیشامد بالا عبارت است از: $P(C) = P(\text{پسر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{دختر}) = \frac{1}{16}$

قرار گرفتن دو دختر در این خانواده، به $\binom{4}{2} = 6$ حالت میسر است و احتمال هر کدام از این حالت‌ها، همان $\frac{1}{16}$ است.

$$P(C) = 6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

بنابراین:

آماد و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

مثال (۵) ۸۰ درصد افراد شهری با سوادند. ۵ نفر از این شهر انتخاب می شوند. احتمال اینکه هر ۵ نفر بی سواد باشند را به دست می آوریم. احتمال اینکه اولین نفر بی سواد باشد، ۲۰ درصد یا ۰/۲ است. با توجه به اینکه جای گذاری انجام نشده است، بی سواد بودن فرد دوم مستقل از بی سواد بودن فرد اول نیست، ولی چون انتخاب از یک جامعه پر جمعیت انجام می شود، می توان فرض کرد که بی سواد بودن افراد انتخاب شده، مستقل از یکدیگر است و احتمال بی سواد بودن هر کدام از آنها ۰/۲ است. پس:

$$\begin{aligned} P(\text{نفر پنجم بی سواد}) \times P(\text{نفر چهارم بی سواد}) \times P(\text{نفر سوم بی سواد}) \times P(\text{نفر دوم بی سواد}) \times P(\text{نفر اول بی سواد}) &= P(\text{هر پنج نفر بی سواد}) \\ &= (0/2)^5 \\ &= 0/00032 \end{aligned}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

صفحه ۷۱ آمار و احتمال

تعریف

۱ اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید. **صز - برکت نهفت =**
 $A, B \text{ سازگار} \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$
 $\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \vee P(B) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$

۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل اند؟ چرا؟ **تغییر**
 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\} \Rightarrow A \cap B = \{2\}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$
 $E = \{2\} \subseteq A$ و $F = \{1, 3\} \subseteq B : E \cap F = \emptyset \Rightarrow P(E \cap F) = \frac{1}{4} \neq P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{8}$
 اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل اند.

الف) A و A' و B $P(A') \cdot P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B) - P(A \cap B)$
 ب) A' و B' $= P(B - A) = P(B \cap A')$

۱) $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$
 $= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = P(A') \cdot P(B')$

آمار و احتمال مدرس: مزبان حبیبی

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۴ در یرتاب دو ناس به طور بی دربی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در ناس اول باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید. *واستناد*

$$n(S) = 3^2 \quad A = \{13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 103\} \quad B = \{31, 32, 33, 34, 35, 36\}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{36} \times \frac{2}{36} = \frac{5}{108}$$

$$A \cap B = \{33\} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B)$$

۵ از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ یک عضو انتخاب می کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad B = \{3, 6, 9\}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

$$A \cap B = \{6\} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{10} \neq P(A) \cdot P(B) \quad \text{واستناد}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

$A =$ موفقیت در آزمون اول
 $B =$ موفقیت در آزمون دوم

۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار $0/6$ و روی بیمار دیگر $0/8$ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه:
 الف) روی هر دو بیمار موفقیت آمیز باشد. ب) روی هیچ کدام موفقیت آمیز نباشد.
 ب) فقط روی بیمار دوم موفقیت آمیز باشد.

الف) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0/6 \times 0/8 = 0/48$

ب) $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = (1 - 0/6) \times (1 - 0/8) = 0/4 \times 0/2 = 0/08$

ج) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0/8 - 0/48 = 0/32$

۷ یک سکه و دو تاس به طور همزمان پرتاب می شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هر دو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟
 $n(S) = 2 \times 6 \times 6 = 72$

$P(\text{شش، شش، شش}) = P(6/1) \times P(6/2) \times P(6/3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۸ در یک امتحان پنج گزینه ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به دست آورید که:

- (الف) به تمام سؤال ها پاسخ صحیح داده باشد. $(\frac{1}{5})^{10}$
 (ب) تنها به پنج سؤال اول پاسخ صحیح داده باشد. $(\frac{1}{5})^5 \times (\frac{4}{5})^5$
 (پ) به نیمی از سؤال ها پاسخ صحیح داده باشد. $(\frac{1}{5})^5 \times (\frac{4}{5})^5 \times (\frac{1}{5})^5$

۹ در یک جعبه که شامل ۳ مهره قرمز، ۲ مهره آبی و ۱ مهره زرد است، دو مهره به تصادف و با جای گذاری بیرون می آوریم. مطلوب است احتمال آنکه:

(الف) هر دو مهره قرمز باشند. $\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

(ب) حداقل یک مهره آبی باشد. $P(A) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

(پ) هر دو مهره هم رنگ باشند. $P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{14}{30}$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر مزبان حبیبی

بسم الله الرحمن الرحيم

۱۰ جعبه ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که:
الف) هر سه لامپ معیوب باشند.
ب) حداقل یک لامپ معیوب باشند.

$$A = \text{هر سه لامپ معیوب} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}}$$

$$P(A^c) = 1 - \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}}$$

$$\frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}}$$

۱۱ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همه افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

$$(1 - 0.9)^{10}$$

۱۲ اگر A و B دو پدیده مستقل باشند به طوری که $P(A \cap B) = 0.1$ و $P(A \cap B^c) = 0.4$ ، حاصل $P(A \cup B^c)$ را به دست آورید.

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B^c)} = \frac{0.1}{0.4} \Rightarrow \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A) \cdot (1 - P(B))} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{P(B)}{1 - P(B)} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B) = 1 - P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cap B) = 0.1 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B) = P(A) + (1 - P(B)) - P(A) \cdot (1 - P(B))$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{14}{5} - \frac{4}{25} = \frac{19}{5}$$

آمادو احتمال مدرس: مزبان حبیبی

mezbanhabibi@gmail.com

09176193511

گروه آموزشی عصر

بزه های آموزشی آمار و احتمال یازدهم ریاضی، دکتر فرزبان حبیبی

پایان

مای درسی
گروه آموزشی عصر

+989166161828 www.maydarsi.ir +989176193511