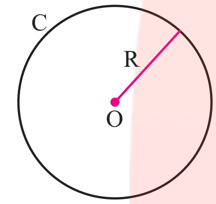
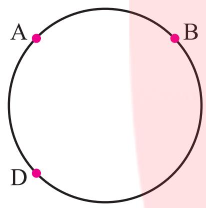
۱ دایره



دایره مجموعهٔ نقاطی از یک صفحه است که فاصلهٔ آنها از نقطه‌ای معین به نام مرکز مقدار ثابتی باشد که آن مقدار ثابت را شعاع دایره نامیده و با R نشان می‌دهیم. دایرهٔ C به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O,R)$ نشان می‌دهیم.



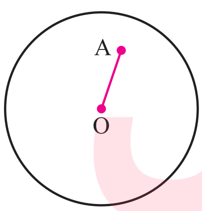
اگر دو نقطهٔ A و B را روی دایره اختیار کنیم، منحنی که بین A و B قرار می‌گیرد، کمان AB نامیده می‌شود که آن را به صورت $\overset{\frown}{AB}$ نشان می‌دهیم، کمان بزرگ AB را با سه حرف می‌خوانیم $\overset{\frown}{ADB}$.

وتر: پاره‌خطی که دو سر یک کمان را به هم وصل می‌کند وتر نامیده می‌شود. وترهایی که از مرکز دایره بگذرند قطر نامیده می‌شوند.

وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم

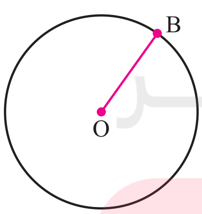
نقطه و دایره نسبت به هم سه حالت دارند:

۱) نقطه داخل دایره است که در این صورت فاصلهٔ نقطه تا مرکز از شعاع کوچکتر است.



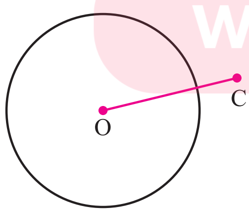
$OA < R$

۲) نقطه روی دایره است که در این حالت فاصلهٔ نقطه تا مرکز با شعاع دایره مساوی است.



$OB = R$

۳) نقطه خارج دایره است که در این حالت فاصلهٔ نقطه تا مرکز از شعاع بزرگتر است.

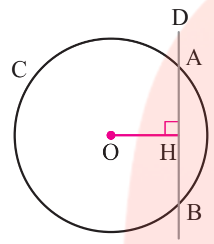


$OC > R$

وضعیت خط و دایره نسبت به هم

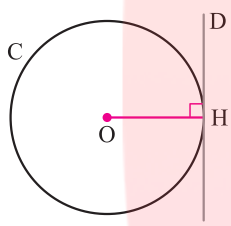
خط و دایره نسبت به هم سه حالت دارند:

۱) خط دایره را در دو نقطه قطع می‌کند (متقاطع) که در این حالت فاصلهٔ خط تا مرکز از شعاع کوچکتر است.



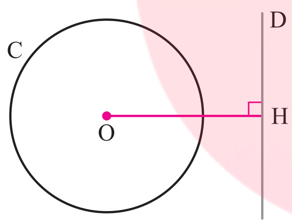
$\boxed{OH < R}$ $\quad C \cap D = \{A, B\}$

۲) خط و دایره یک نقطهٔ مشترک دارند (مماس) که در این حالت فاصلهٔ خط تا مرکز دایره با شعاع مساوی است.



$\boxed{OH = R}$ $\quad C \cap D = \{H\}$

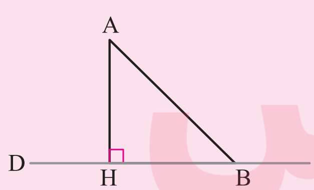
۳) خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند که در این حالت فاصلهٔ خط تا مرکز از شعاع بزرگتر است.



$\boxed{OH > R}$ $\quad C \cap D = \varnothing$

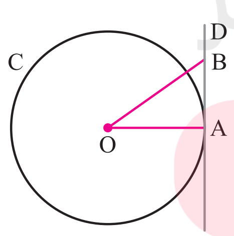
نکته

اگر از نقطهٔ A واقع در خارج خط D بر خط D عمود کنیم طول عمود از بقیهٔ پاره‌خط‌هایی که به نقاط دیگر خط D وصل می‌شوند، کوچکتر است.



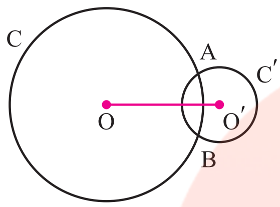
$AH < AB$

مثال ۱ **ثابت کنید خط مماس در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره عمود است.**



حل فرض می‌کنیم خط D در نقطه A بر دایره C مماس باشد. اگر OA بر D عمود نباشد، از نقطهٔ O پاره‌خط OB را بر D عمود می‌کنیم که در این صورت باید $OB < OA$. در صورتی که چنین نیست زیرا نقطهٔ B خارج دایره قرار می‌گیرد و فاصلهٔ آن تا مرکز باید از شعاع یعنی OA بزرگتر باشد، بنابراین فرض اینکه OA بر D عمود نیست، نادرست است پس $OA \perp D$.

وضعیت دو دایره نسبت به هم



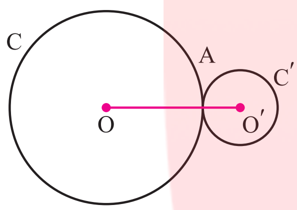
دو دایره نسبت به هم سه حالت دارند:

۱) دو دایره دو نقطهٔ مشترک دارند (متقاطع)

$C \cap C' = \{A, B\}$

اگر طول خط‌المرکزین یعنی OO' برابر d و شعاع دایرهٔ C برابر R و شعاع دایرهٔ C' برابر R' باشد آنگاه:

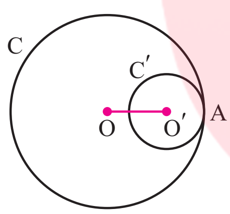
$$\boxed{R - R' < d < R + R'}$$



۲) دو دایره یک نقطهٔ مشترک دارند (مماس) $C \cap C' = \{A\}$

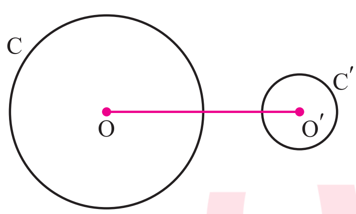
الف) مماس خارجی

$$\boxed{d = R + R'}$$



ب) مماس داخلی

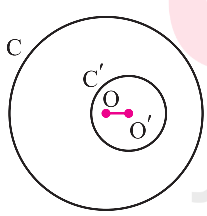
$$\boxed{d = R - R'}$$



۳) دو دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند. $C \cap C' = \varnothing$

الف) متخارج

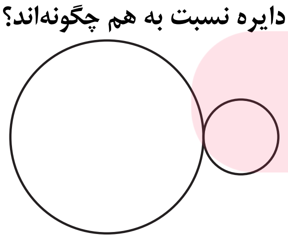
$$\boxed{d > R + R'}$$



ب) متداخل

$$\boxed{d < R - R'}$$

مثال ۲ اگر شعاع‌های دو دایره ۵ و ۷ سانتی‌متر و طول خط‌المرکزین ۱۲ سانتی‌متر باشد، دو دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟

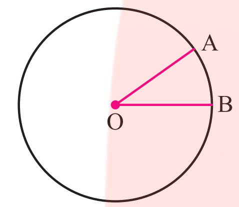


حل طول خط المرکزین با مجموع دو شعاع مساوی است. $(۷ + ۵ = ۱۲)$

بنابراین دو دایره مماس خارجی می‌باشند.

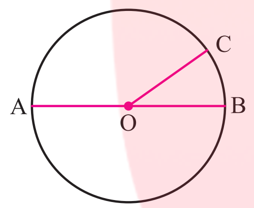
مثال ۳ اگر شعاع‌های دو دایره ۴ و ۷ سانتی‌متر و طول خط‌المرکزین برابر ۱۳ سانتی‌متر باشد، دو دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟

حل طول خط المرکزین از مجموع دو شعاع بزرگتر است $(۱۳ > ۴ + ۷)$. بنابراین دو دایره متخارج‌اند.



زاویه مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شعاع‌هایی از دایره باشند، زاویهٔ مرکزی نامیده می‌شود. بر اساس قرار داد زاویهٔ مرکزی با کمان مقابلش بر حسب درجه مساوی است.

مثال ۴ در شکل زیر AB قطر دایره و $\overset{\frown}{AC}=۴\overset{\frown}{BC}$، اندازهٔ $A\hat{O}C$ را حساب کنید.

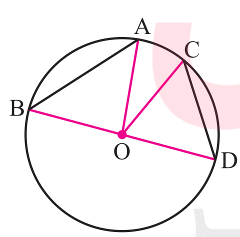


حل

$$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}=۱۸۰^\circ$$
$$۴\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BC}=۱۸۰\Rightarrow ۵\overset{\frown}{BC}=۱۸۰\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۳۶$$
$$\overset{\frown}{AC}=۴\times ۳۶=۱۴۴\Rightarrow A\hat{O}C=۱۴۴$$

نکته *اگر دو زاویهٔ مرکزی برابر باشند کمان‌های نظیرشان نیز مساویند و بالعکس.*

قضیه ثابت کنید اگر دو وتر از یک دایره مساوی باشند کمان‌های نظیرشان نیز مساویند.



فرض $AB=CD$

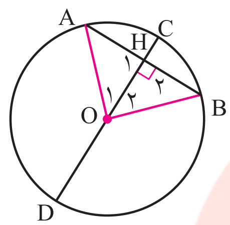
حکم $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

برهان از مرکز دایره به نقاط A، B، C و D وصل می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}OA=OC\\ OB=OD\\ AB=CD\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}}\overset{\triangle}{OAB}\cong\overset{\triangle}{OCD}\Rightarrow A\hat{O}B=C\hat{O}D\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$

قضیه ثابت کنید اگر دو کمان از یک دایره مساوی باشند وترهای نظیرشان نیز مساویند. (اثبات به عهدهٔ دانش‌آموز)

قضیه ثابت کنید اگر قطری از یک دایره بر وتری از آن عمود شود آن وتر و کمان‌های نظیرش را نصف می‌کند.

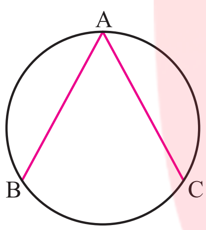


برهان از مرکز دایره به نقاط A و B وصل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB \\ OH=OH \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{و ض}} \overset{\triangle}{OHA}\cong\overset{\triangle}{OHB}\Rightarrow \left|\begin{array}{l} AH=HB \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB} \end{array}\right.$$

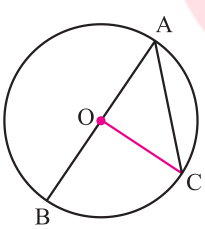
$$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}\Rightarrow ۱۸۰-\overset{\frown}{AC}=۱۸۰-\overset{\frown}{CB}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$$

قضیه ثابت کنید اگر از مرکز دایره خطی به وسط وتری از یک دایره وصل کنیم، خط بر آن وتر عمود می‌شود. (اثبات به عهدهٔ دانش‌آموز)



زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاع آن وترهایی از دایره باشند زاویهٔ محاطی نامیده می‌شود.

قضیه ثابت کنید زاویهٔ محاطی با نصف کمان مقابلش مساوی است.



قضیه را در سه حالت اثبات می‌کنیم:

الف) مرکز دایره روی یکی از اضلاع زاویه باشد:

برهان از O به C وصل می‌کنیم:

$$OA=OC\Rightarrow \hat{A}=\hat{C} \qquad B\hat{O}C=\overset{\frown}{BC}$$

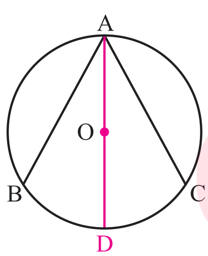
$$B\hat{O}C=\hat{A}+\hat{C}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\overset{\frown}{BC}=\hat{A}+\hat{A}\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۲\hat{A}\Rightarrow \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

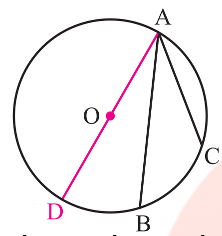
ب) مرکز دایره داخل زاویه است

برهان از A به مرکز دایره وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند.



$$B\hat{A}C=B\hat{A}D+D\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

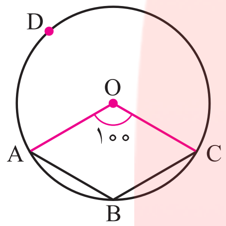
ج) مرکز دایره خارج زاویه است



برهان از A به مرکز دایره وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند.

$$B\hat{A}C = D\hat{A}C - D\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{DB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{DB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

مثال ۵ در شکل زیر اندازهٔ $\hat{B}$ را حساب کنید.

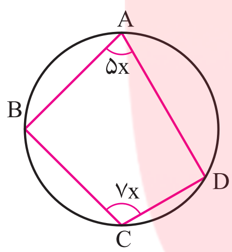


حل

$$\hat{O} = 100^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{ABC} = 100 \Rightarrow \overset{\frown}{ADC} = 360 - 100 = 260$$

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2} = \frac{260}{2} = 130^\circ$$

مثال ۶ در شکل زیر اندازهٔ $\hat{C}$ را حساب کنید.



حل

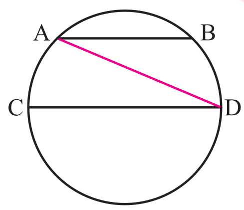
$$\hat{A} = 5x \Rightarrow \overset{\frown}{BCD} = 10x \qquad \hat{C} = 7x \Rightarrow \overset{\frown}{BAD} = 14x$$

$$\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAD} = 360 \Rightarrow 10x + 14x = 360 \Rightarrow 24x = 360 \Rightarrow x = 15$$

$$\hat{C} = 7x = 7 \times 15 = 105$$

مثال ۷ ثابت کنید در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

حل



فرض $AB \parallel CD$

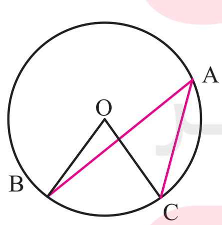
حکم $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$

برهان از A به D وصل می‌کنیم:

$$(AB \parallel CD \text{ و } AD \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A} = \hat{D} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$$

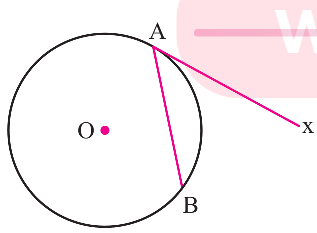
مثال ۸ در شکل زیر $\hat{O} + \hat{A} = 120^\circ$ اندازهٔ $\hat{O}$ چقدر است؟

حل



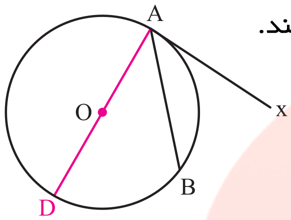
$$\left.\begin{array}{l} \hat{O} = \overset{\frown}{BC} \\ \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O} = 2\hat{A}$$

$$\hat{O} + \hat{A} = 120^\circ \Rightarrow 2\hat{A} + \hat{A} = 120 \Rightarrow 3\hat{A} = 120 \Rightarrow \hat{A} = 40 \Rightarrow \hat{O} = 2 \times 40 = 80$$



زاویهٔ ظلّی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و یک ضلع آن وتری از دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس باشد، زاویهٔ ظلّی نامیده می‌شود.

قضیه ثابت کنید زاویهٔ ظلی با نصف کمان مقابلش مساوی است.

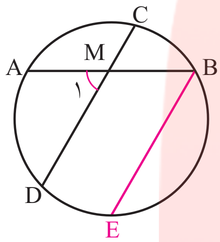


برهان از A به مرکز دایره وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند.

$$Ax \perp DA \Rightarrow D\hat{A}x = ۹۰^\circ$$

$$B\hat{A}x = D\hat{A}x - D\hat{A}B = ۹۰ - \frac{\overset{\frown}{DB}}{۲} = \frac{۱۸۰ - \overset{\frown}{DB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

قضیه ثابت کنید زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره پدید می‌آید برابر با نصف مجموع دو کمانی از دایره که به دو ضلع زاویه و امتداد اضلاع آن محدودند می‌باشد.



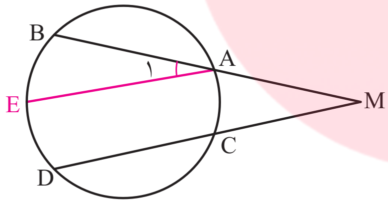
حکم $\hat{M}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲}$

برهان پاره‌خط BE را موازی CD رسم می‌کنیم.

$$\overset{\frown}{BE} \parallel \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE}$$

$$\left.\begin{array}{l} (CD \parallel BE, AB\ \text{مورب}) \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{B} \\ \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AE}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DE}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{۲}$$

قضیه ثابت کنید زاویه‌ای که از برخورد امتدادهای دو وتر در بیرون دایره پدید می‌آید با نصف تفاضل کمان‌هایی از دایره که به اضلاع زاویه محدودند مساوی است.



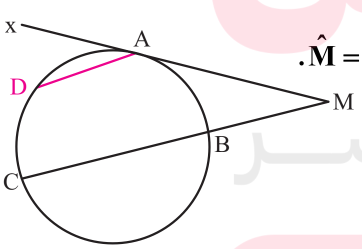
حکم $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{۲}$

برهان پاره‌خط AE را موازی MD رسم می‌کنیم.

$$AE \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{ED}$$

$$\left.\begin{array}{l} (AE \parallel MD, MB\ \text{مورب}) \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{M} \\ \hat{A}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{BE}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{ED}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{۲}$$

مثال ۹ در شکل زیر Mx در نقطهٔ A بر دایره مماس است، ثابت کنید $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$.

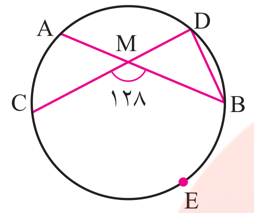


حل از نقطهٔ A پاره‌خط AD را موازی MC رسم می‌کنیم.

$$AD \parallel BC \Rightarrow \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{AB}$$

$$\left.\begin{array}{l} (AD \parallel MC, Mx\ \text{مورب}) \Rightarrow D\hat{A}x = \hat{M} \\ D\hat{A}x = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DC}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$$

مثال ۱۰ در شکل زیر $\widehat{BEC}=3\widehat{AD}$ ، اندازهٔ $\hat{D}$ چقدر است؟



حل

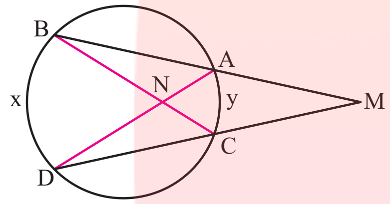
$$\frac{\widehat{AD}+\widehat{BEC}}{2}=C\hat{M}B \Rightarrow \frac{\widehat{AD}+3\widehat{AD}}{2}=128 \Rightarrow \frac{4\widehat{AD}}{2}=128$$

$$2\widehat{AD}=128 \Rightarrow \widehat{AD}=64 \qquad \widehat{BEC}=3\times 64=192$$

$$\hat{D}=\frac{\widehat{BEC}}{2}=\frac{192}{2}=96$$

مثال ۱۱ در شکل زیر $\hat{M}=35^\circ$ و $B\hat{N}D=85^\circ$، مقادیر x و y را حساب کنید.

حل

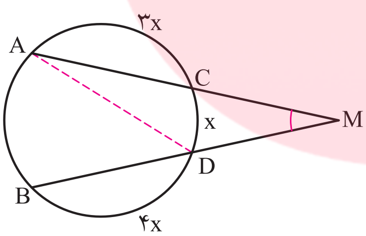


$$\begin{cases}\dfrac{\widehat{BD}+\widehat{AC}}{2}=\hat{M}\\[2mm] \dfrac{\widehat{BD}-\widehat{AC}}{2}=B\hat{N}D\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=85\\[2mm] \dfrac{x-y}{2}=35\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=170\\ x-y=70\end{cases}$$

$$2x=240 \Rightarrow x=120$$

$$120+y=170 \Rightarrow y=50$$

مثال ۱۲ در شکل زیر $\hat{M}=36^\circ$، اندازهٔ $\hat{D}$ را حساب کنید.



حل

$$\widehat{AB}=360-(3x+x+4x)=360-8x$$

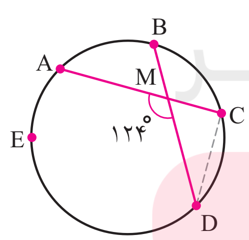
$$\frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{2}=\hat{M} \Rightarrow \frac{360-8x-x}{2}=36 \Rightarrow 360-9x=72$$

$$360-72=9x \Rightarrow 288=9x \Rightarrow x=32$$

$$\widehat{AB}=360-8\times 32=104$$

$$\hat{D}=\frac{\widehat{AB}}{2}=\frac{104}{2}=52^\circ$$

مثال ۱۳ در شکل زیر $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}$ اندازهٔ $\hat{C}$ را حساب کنید.



حل

$$\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=x \quad \Rightarrow \quad \widehat{AED}=360-3x$$

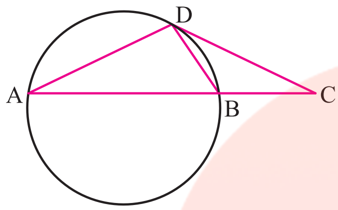
$$\frac{\widehat{AED}+\widehat{BC}}{2}=A\hat{M}D \Rightarrow \frac{360-3x+x}{2}=124 \Rightarrow \frac{360-2x}{2}=124$$

$$180-x=124 \Rightarrow x=56$$

$$\widehat{AED}=360-3\times 56=192$$

$$\hat{C}=\frac{\widehat{AED}}{2}=\frac{192}{2}=96^\circ$$

مثال ۱۴ در شکل زیر CD بر دایره مماس است و $DA = DC$، ثابت کنید $BD = BC$.

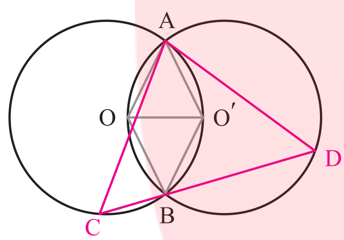


حل

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} B\hat{D}C = \dfrac{\widehat{DB}}{۲} \\ \hat{A} = \dfrac{\widehat{DB}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{D}C = \hat{A} \\ DA = DC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{D}C = \hat{C} \Rightarrow BD = BC$$

مثال ۱۵ دو دایره به مراکز O و O' طوری رسم شده‌اند که مرکز هر کدام روی محیط دیگری قرار دارد و نقاط تقاطع دو دایره A و B می‌باشند. خط دلخواهی از B رسم می‌کنیم تا دایره‌ها را در C و D قطع کنند. ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الاضلاع است.

حل مراکز دو دایره را به A و B وصل می‌کنیم:



$$OA = O'A = OO' \Rightarrow A\hat{O}O' = ۶۰^\circ = A\hat{O'}O$$

$$OB = O'B = OO' \Rightarrow B\hat{O}O' = ۶۰^\circ = B\hat{O'}O$$

$$A\hat{O}B = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \widehat{AO'B} = ۱۲۰^\circ$$

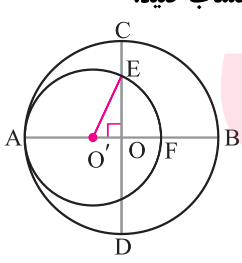
$$\hat{C} = \frac{\widehat{AO'B}}{۲} = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰^\circ$$

$$A\hat{O'}B = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = ۱۲۰$$

$$\hat{D} = \frac{\widehat{AOB}}{۲} = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰$$

دو زاویهٔ مثلث ACD برابر ۶۰° شد، بنابراین زاویهٔ سوم مثلث نیز ۶۰° می‌شود و مثلث متساوی الاضلاع است.

مثال ۱۶ در شکل زیر دو دایره مماس داخلی‌اند، اگر $CE = ۶$ و $BF = ۱۰$ باشد، شعاع دو دایره را حساب کنید.



حل شعاع دایره بزرگ را با R و شعاع دایره کوچک را با R' نشان می‌دهیم. از O' به E وصل می‌کنیم.

$$AB = AF + FB \Rightarrow ۲R = ۲R' + ۱۰ \Rightarrow R = R' + ۵$$

$$OO' = OA - O'A = R - R' = ۵ \qquad OE = OC - CE = R - ۶$$

$$O'E^۲ = OE^۲ + O'O^۲ \Rightarrow R'^۲ = (R-۶)^۲ + ۵^۲ \Rightarrow (R-۵)^۲ = (R-۶)^۲ + ۲۵$$

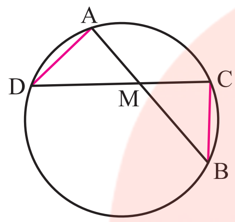
$$R^۲ - ۱۰R + ۲۵ = R^۲ - ۱۲R + ۳۶ + ۲۵ \Rightarrow -۱۰R + ۱۲R = ۳۶ \Rightarrow ۲R = ۳۶ \Rightarrow R = ۱۸$$

$$R' = R - ۵ = ۱۸ - ۵ = ۱۳$$

رابطه‌های طولی در دایره

قضیه دو وتر AB و CD همدیگر را در نقطهٔ M واقع در داخل دایره قطع می‌کنند. ثابت کنید $MA.MB = MC.MD$.

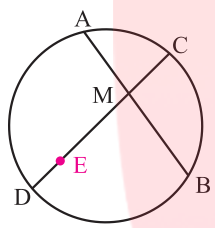
برهان از A به D و از C به B وصل می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\\ \hat{M}_۱=\hat{M}_۲\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MAD} \sim \overset{\triangle}{MBC} \Rightarrow \frac{MA}{MC}=\frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB=MC.MD$$

عکس قضیه اگر دو پاره‌خط AB و CD در نقطهٔ M یکدیگر را طوری قطع کرده باشند که $MA.MB = MC.MD$ ثابت کنید چهار نقطهٔ A ، B ، C و D روی یک دایره قرار می‌گیرند.

برهان می‌دانیم از سه نقطهٔ غیر واقع بر یک خط راست فقط یک دایره می‌گذرد، دایره‌ای رسم می‌کنیم که از A و B و C بگذرد، اگر این دایره از D بگذرد حکم ثابت است و اگر از D نگذرد، فرض می‌کنیم دایره CD یا امتداد آن را در E قطع کند که در این صورت:

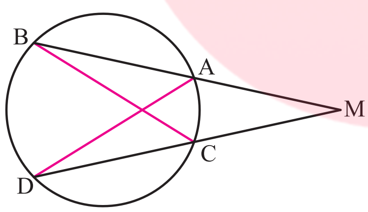


$$\left.\begin{array}{l}MA.MB=MC.ME\\ MA.MB=MC.MD \quad \text{(فرض)}\end{array}\right\} \Rightarrow MC.ME=MC.MD \Rightarrow ME=MD$$

بنابراین E بر D منطبق است و چهار نقطه A، B، C و D بر یک دایره قرار می‌گیرند.

قضیه در یک دایره امتدادهای دو وتر AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ M واقع در خارج دایره قطع کرده‌اند، ثابت کنید $MA.MB = MC.MD$.

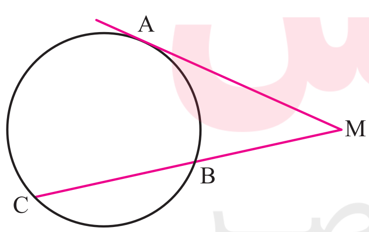
برهان از A به D و از B به C وصل می‌کنیم:



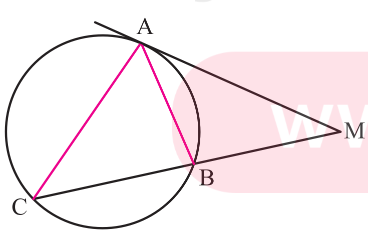
$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}=\hat{D}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\\ \hat{M}=\hat{M}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MAD} \sim \overset{\triangle}{MCB} \Rightarrow \frac{MA}{MC}=\frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB=MC.MD$$

قضیه در شکل زیر MA بر دایره مماس است، ثابت کنید $MA^۲ = MB.MC$

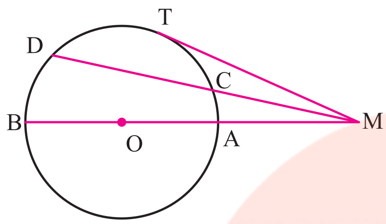
برهان از A به نقاط B و C وصل می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l}M\hat{A}B=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\\ \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow M\hat{A}B=\hat{C}$$



$$\left.\begin{array}{l}M\hat{A}B=\hat{C}\\ \hat{M}=\hat{M}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MAB} \sim \overset{\triangle}{MAC} \Rightarrow \frac{MA}{MC}=\frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^۲=MB.MC$$

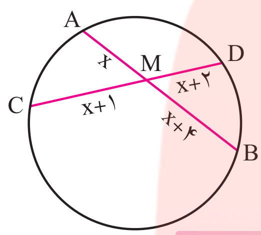


نتیجه: اگر از نقطهٔ M واقع در خارج دایرهٔ $C(O,R)$ هر مماس یا قاطعی رسم کنیم حاصلضرب اندازهٔ قطعه‌ها برابر و مساوی مجذور اندازه مماس است و مقداری است ثابت.

اگر $OM=d$ باشد، خواهیم داشت:

$$MT^{۲}=MC.MD=MA.MB=(d-R)(d+R)=d^{۲}-R^{۲}$$

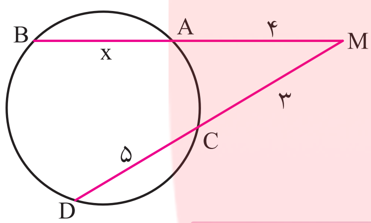
مثال ۱۷ در شکل زیر مقدار x را حساب کنید.



حل

$$MA.MB=MC.MD\Rightarrow x(x+۴)=(x+۱)(x+۲)$$
$$x^{۲}+۴x=x^{۲}+۳x+۲\Rightarrow ۴x-۳x=۲\Rightarrow x=۲$$

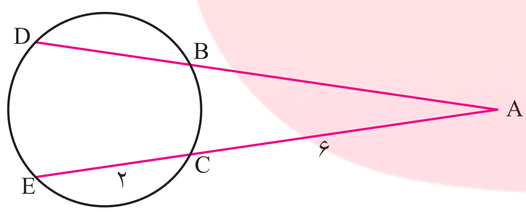
مثال ۱۸ در شکل زیر مقدار x را حساب کنید.



حل

$$MA.MB=MC.MD\Rightarrow ۴(۴+x)=۳\times۸\Rightarrow ۱۶+۴x=۲۴$$
$$۴x=۸\Rightarrow x=۲$$

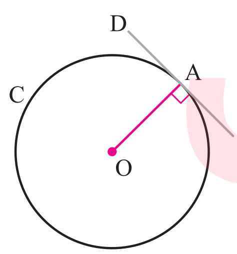
مثال ۱۹ در شکل زیر $AB=۲BD$، اندازهٔ MD چقدر است؟



حل

$$BD=x\Rightarrow AB=۲x$$
$$AB.AD=AC.AE$$
$$۲x\times۳x=۶\times۸\Rightarrow ۶x^{۲}=۴۸\Rightarrow x^{۲}=۸\Rightarrow x=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

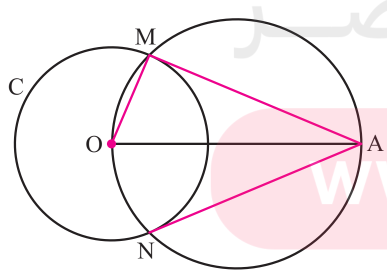
طریقه‌ی رسم مماس بر دایره



الف) از نقطهٔ A واقع بر روی دایره:

برای رسم مماس بر دایره در نقطهٔ A از مرکز دایره به A وصل کرده، سپس در نقطهٔ A عمودی بر OA رسم می‌کنیم، این عمود بر دایره مماس می‌شود.

ب) از نقطهٔ A واقع در خارج دایره:

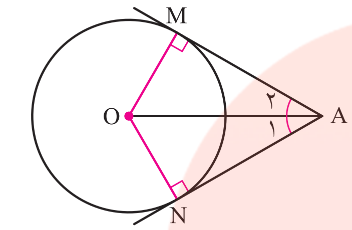


برای رسم مماس بر دایره از نقطهٔ A ابتدا از مرکز دایره به A وصل کرده و به قطر OA دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C را در نقاط M و N قطع کند از A به نقاط M و N وصل می‌کنیم AM و AN بر دایرهٔ C مماس می‌شوند، زیرا اگر از O به M وصل کنیم، خواهیم داشت:

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{ONA}}{۲}=\frac{۱۸۰}{۲}=۹۰\Rightarrow AM\perp OM$$

بنابراین AM در نقطهٔ M بر شعاع دایره عمود شد، پس AM بر دایره مماس است، به همین ترتیب می‌توان گفت AN نیز بر دایره مماس است.

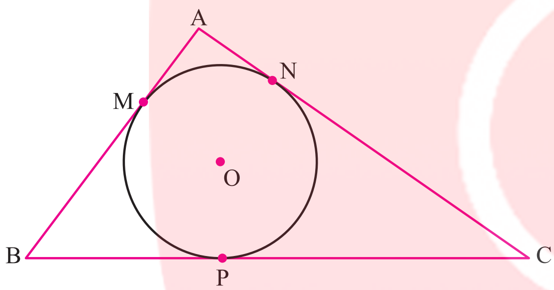
مثال ۲۰ **ثابت کنید اگر از نقطه‌ای واقع در خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول دو مماس مساوی و OA نیمساز $\hat{A}$ است.**



حل از مرکز دایره به نقاط A و M و N وصل می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} OA = OA \\ OM = ON \\ \hat{M} = \hat{N} = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{و ض}} \overset{\triangle}{OMA} \cong \overset{\triangle}{ONA} \Rightarrow \left| \begin{matrix} AM = AN \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{matrix} \right.$$

مثال ۲۱ در شکل زیر دایره بر اضلاع مثلث مماس است، اگر اضلاع **AB**، **BC** و **AC** به ترتیب ۶، ۷ و ۸ سانتی‌متر باشند اندازهٔ **AM** چقدر است؟



حل

$AM = AN \qquad CN = CP \qquad BM = BP$

$AM = x \Rightarrow AN = x$

$BM = ۶ - x \Rightarrow BP = ۶ - x$

$CN = ۸ - x \Rightarrow CP = ۸ - x$

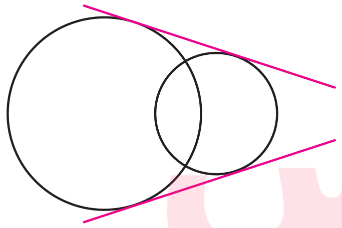
$BP + PC = BC \Rightarrow (۶ - x) + (۸ - x) = ۷$

$۱۴ - ۲x = ۷ \Rightarrow ۷ = ۲x \Rightarrow x = ۳/۵$

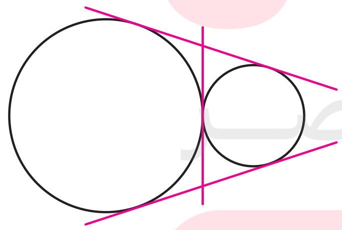
مماس مشترک: خطی که بر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک نامیده می‌شود.

اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند خط، مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند خط، مماس مشترک داخلی نامیده می‌شود.

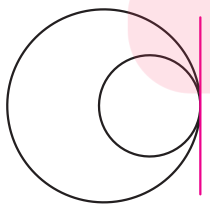
دو دایرهٔ متقاطع دو مماس مشترک دارند.



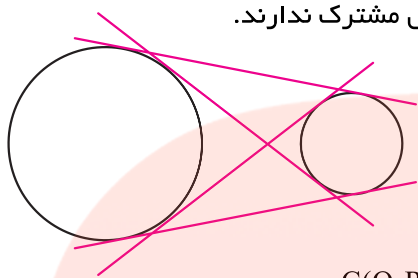
اگر دو دایره مماس خارجی باشند سه مماس مشترک دارند.

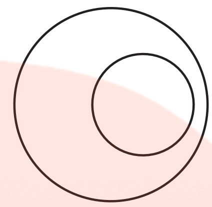


اگر دو دایره مماس داخلی باشند یک مماس مشترک دارند.

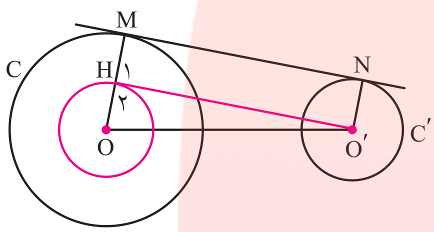


دو دایرۀ متخارج چهار مماس مشترک دارند و دو دایرۀ متداخل مماس مشترک ندارند.





طریقۀ رسم مماس مشترک خارجی دو دایره متخارج: دو دایرۀ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر گرفته و مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کنیم، سپس به مرکز O و به شعاع $(R-R')$ دایره‌ای رسم کرده و از O' مماس $O'H$ را بر آن رسم می‌کنیم. از O به H وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایرۀ C را در M قطع کند، سپس $O'N$ را موازی OM می‌کشیم تا دایرۀ C' را در N قطع کند خطی که از M و N می‌گذرد بر دو دایره مماس است زیرا:



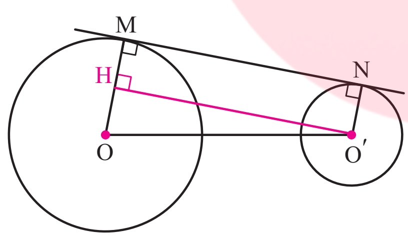
$$OH \perp O'H \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \qquad MH = OM - OH = R - (R - R') = R' = O'N$$

دو ضلع مقابل $O'N$ و MH از چهارضلعی $MNO'H$ موازی و مساویند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است چون یک زاویۀ قائمه دارد $(\hat{H}_1 = 90^\circ)$ پس مستطیل است.

بنابراین MN بر OM و $O'N$ عمود و بر دو دایرۀ C و C' مماس می‌باشد. اگر دو دایره مماس خارجی باشند، مماس مشترک خارجی آنها به همین روش رسم می‌شود.

اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره

خط‌المرکزین دو دایره را رسم کرده و اندازۀ آن را d در نظر می‌گیریم و از O به M و از O' به N وصل می‌کنیم، همچنین از O' بر OM عمود می‌کنیم. زوایای چهارضلعی $MNO'H$ قائمه‌اند، پس این چهارضلعی مستطیل است و $O'H = MN$ و $MH = O'N = R'$.

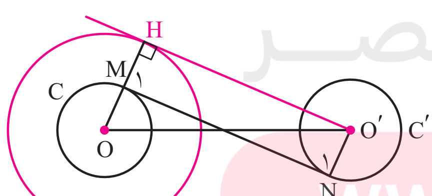


$$OH = OM - MH = R - R'$$

$$O'H^2 + OH^2 = OO'^2 \Rightarrow O'H^2 + (R-R')^2 = d^2 \Rightarrow O'H^2 = d^2 - (R-R')^2$$

$$O'H = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \Rightarrow MN = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

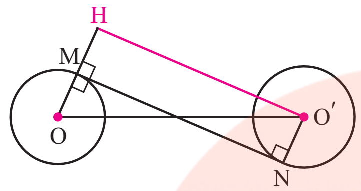
طریقۀ رسم مماس مشترک داخلی دو دایره متخارج: دو دایرۀ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر گرفته و مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کنیم، به مرکز O و شعاع $(R+R')$ دایره‌ای می‌کشیم و از O' بر این دایره مماس $O'H$ را رسم می‌کنیم. از O به H وصل کرده و نقطه برخورد OH با دایرۀ C را M می‌نامیم، $O'N$ را موازی OH رسم کرده و از M به N وصل می‌کنیم، پاره‌خط MN مماس مشترک داخلی دو دایره می‌باشد زیرا:



$$OH \perp O'H \Rightarrow \hat{H} = 90^\circ \qquad MH = O'N = R'$$

دو ضلع مقابل چهارضلعی $MHO'N$ موازی و مساویند چون یک زاویۀ قائمه دارد، پس مستطیل است. بنابراین M_1 و N_1 قائمه و MN بر دو دایره مماس است.

اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره



خطالمرکزین دو دایره را رسم کرده و اندازهٔ آن را d در نظر می‌گیریم و از O به M وصل کرده و آن را به اندازهٔ R' امتداد می‌دهیم، نقطهٔ حاصل یعنی H را به O' وصل می‌کنیم، چهارضلعی $MHO'N$ مستطیل می‌شود و $MN = O'H$.

$$O'H^۲ + OH^۲ = OO'^۲ \Rightarrow O'H^۲ + (R+R')^۲ = d^۲ \Rightarrow O'H^۲ = d^۲ - (R+R')^۲$$

$$O'H = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲} \Rightarrow MN = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲}$$

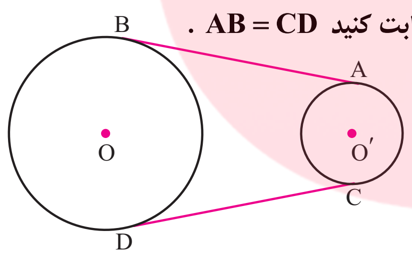
مثال ۲۲ در دو دایرهٔ متخارج طول مماس مشترک‌های داخلی و خارجی به ترتیب ۶ و $۲\sqrt{۲۱}$ سانتی‌متر و طول خطالمرکزین آنها ۱۰ سانتی‌متر است. اندازهٔ شعاع‌های دو دایره را حساب کنید.

حل

$$\begin{cases}\sqrt{۱۰^۲ - (R+R')^۲} = ۶\\ \sqrt{۱۰^۲ - (R-R')^۲} = ۲\sqrt{۲۱}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۱۰۰ - (R+R')^۲ = ۳۶\\ ۱۰۰ - (R-R')^۲ = ۸۴\end{cases}$$

$$\begin{cases}(R+R')^۲ = ۶۴\\ (R-R')^۲ = ۱۶\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}R+R' = ۸\\ R-R' = ۴\end{cases} \Rightarrow ۲R = ۱۲ \Rightarrow R = ۶ \Rightarrow R' = ۸ - ۶ = ۲$$

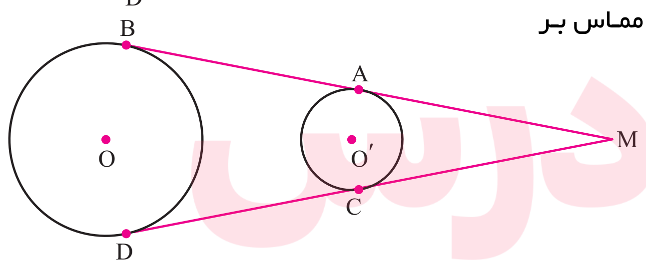
مثال ۲۳ در شکل زیر **AB** و **CD** مماس مشترک‌های خارجی دو دایره می‌باشند، ثابت کنید **AB = CD** .



حل

مماس‌های BA و DC را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در M قطع کنند.

قبلاً ثابت کرده‌ایم که اگر از نقطه‌ای واقع در خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم، طول دو مماس مساوی است.

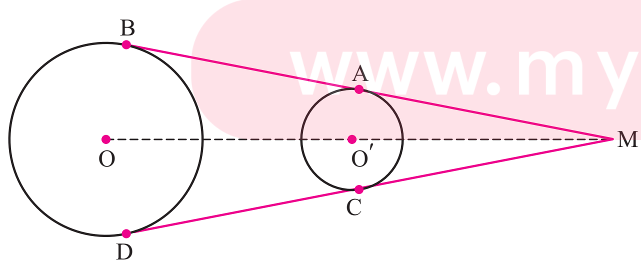


$$\left.\begin{matrix}MB = MD\\ MA = MC\end{matrix}\right\} \Rightarrow MB - MA = MD - MC \Rightarrow AB = CD$$

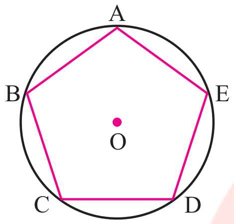
مثال ۲۴ در شکل زیر **AB** و **CD** بر دو دایره مماسند، ثابت کنید نقاط **M**، **O** و **O′** بر یک خط راست قرار می‌گیرند.

حل

اگر از M به O' وصل کنیم می‌توان گفت MO' نیمساز $\hat{M}$ است، به همین ترتیب پاره‌خط MO نیز نیمساز $\hat{M}$ است، با توجه به اینکه نیم‌ساز یک زاویه منحصربفرد است، پس MO و MO' بر هم منطبقند و نقاط M و O و O' بر یک خط راست قرار دارند.

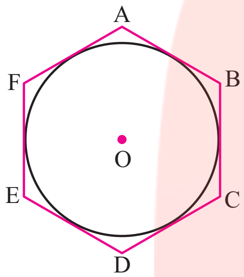


دایره محیطی: دایره‌ای که از تمام رئوس یک چند ضلعی بگذرد دایره محیطی چند ضلعی نامیده می‌شود.



در این صورت چند ضلعی را چند ضلعی محاطی می‌نامند. مرکز دایرۀ محیطی نقطۀ برخورد عمودمنصف‌های اضلاع چند ضلعی می‌باشد. فقط برای چند ضلعی‌هایی که عمودمنصف‌های اضلاع آنها همرس باشند، می‌توان دایرۀ محیطی رسم کرد. شعاع دایرۀ محیطی را با R نشان می‌دهیم.

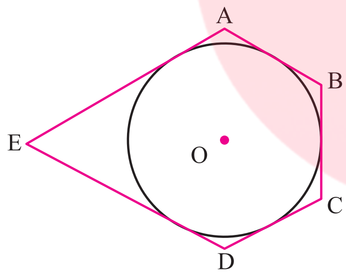
دایرۀ محاطی: دایره‌ای که بر تمام اضلاع یک چند ضلعی مماس باشد، دایرۀ محاطی چندضلعی نامیده می‌شود.



در این صورت چند ضلعی را چند ضلعی محیطی می‌نامند. مرکز دایرۀ محاطی نقطۀ برخورد نیمسازهای زاویه‌های چندضلعی می‌باشد. فقط برای چندضلعی‌هایی که نیمسازهای زوایای آن همرس باشند می‌توان دایرۀ محاطی رسم کرد. شعاع دایره محاطی را با r نشان می‌دهیم.

همانطور که اشاره شد برای تمام چندضلعی‌ها نمی‌توان دایرۀ محیطی یا محاطی رسم کرد، اما برای چندضلعی منتظم هم دایره محیطی و هم دایرۀ محاطی می‌توان رسم کرد. در چندضلعی منتظم دایره‌های محیطی و محاطی هم مرکزند. مرکز چندضلعی منتظم همان مرکز دایرۀ محیطی یا محاطی آن می‌باشد.

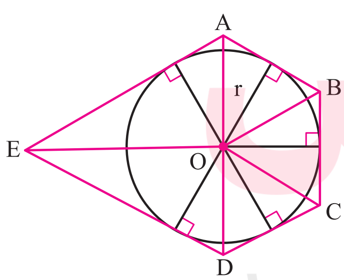
مثال ۲۵ در شکل زیر یک پنج ضلعی بر دایره محیط شده است. اگر S مساحت چندضلعی و P نصف محیط آن باشد، ثابت کنید $r=\frac{S}{P}$.



حل

از مرکز دایره به رئوس چندضلعی و نقاط تماس وصل می‌کنیم:

$$S=S(OAB)+S(OBC)+S(OCD)+S(ODE)+S(OAE)$$

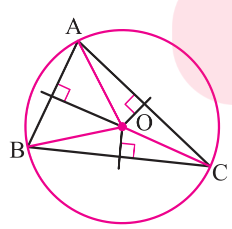


$$S=\frac{r.AB}{\text{۲}}+\frac{r.BC}{\text{۲}}+\frac{r.CD}{\text{۲}}+\frac{r.DE}{\text{۲}}+\frac{r.AE}{\text{۲}}$$

$$S=r(\frac{AB+BC+CD+DE+AE}{\text{۲}})\Rightarrow S=r.P\Rightarrow r=\frac{S}{P}$$

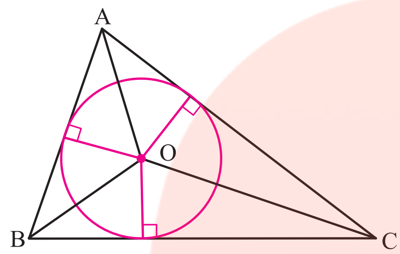
به همین ترتیب می‌توان گفت اگر S و P و r به ترتیب مساحت، نصف محیط و شعاع دایرۀ محاطی یک چندضلعی محیطی باشد آنگاه $r=\frac{S}{P}$.

دایره‌های محیطی و محاطی مثلث



با توجه به اینکه عمودمنصف‌های اضلاع مثلث همرس و نقطۀ تلاقی عمودمنصف‌ها از سه رأس مثلث به یک فاصله می‌باشند، اگر به مرکز نقطۀ برخورد عمودمنصف‌ها و به شعاع فاصلۀ آن نقطه تا رئوس مثلث دایره‌ای رسم کنیم از سه رأس مثلث می‌گذرد، این دایره، دایرۀ محیطی مثلث می‌باشد.

همچنین در سال‌های قبل ثابت کرده‌ایم که نیمسازهای زوایای هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ تلاقی نیمسازها نقطه‌ای است که از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، اگر به مرکز نقطهٔ برخورد نیمسازها و به شعاع فاصلهٔ آن نقطه تا اضلاع دایره‌ای رسم کنیم، این دایره بر اضلاع مثلث مماس می‌شود و دایره محاطی مثلث می‌باشد.

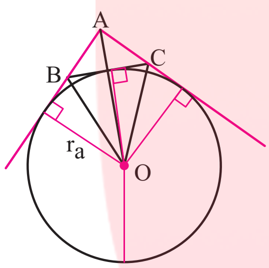


این دایره را دایرهٔ محاطی داخلی مثلث می‌نامند.

شعاع این دایرهٔ محاطی برابر $\frac{S}{P}$ می‌باشد.

$$r = \frac{S}{P}$$

علاوه بر نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث که از سه ضلع مثلث به یک فاصله می‌باشند، سه نقطهٔ دیگر نیز در خارج مثلث قرار دارند که از اضلاع مثلث به یک فاصله می‌باشند، این نقاط در واقع نقاط برخورد نیمساز یک زاویهٔ داخلی و نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی دو رأس دیگر می‌باشند.



در شکل مقابل نقطهٔ O نقطهٔ تلاقی نیمساز $\hat{A}$ و نیمسازهای زاویه‌های خارجی رئوس B، C می‌باشد که از ضلع BC و خطوط AC و AB به یک فاصله می‌باشد، به مرکز O و به شعاع فاصلهٔ O تا اضلاع مثلث دایره‌ای می‌کشیم که بر سه ضلع مماس می‌شود. این دایره را دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامیم.

شعاع دایره محاطی فوق را با r_a نشان می‌دهیم.

$$S(ABC) = S(OAB) + S(OAC) - S(OBC)$$

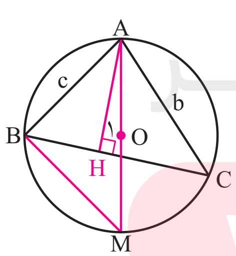
$$S = \frac{r_a . c}{۲} + \frac{r_a . b}{۲} - \frac{r_a . a}{۲} = r_a \left(\frac{c+b-a}{۲}\right) = r_a \left(\frac{c+b+a-۲a}{۲}\right)$$

$$S = r_a \left(\frac{c+b+a}{۲} - a\right) \Rightarrow S = r_a (P-a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{P-a}$$

به همین روش ثابت می‌شود شعاع‌های دایره‌های محیطی خارجی رئوس B و C برابرند با:

$$r_b = \frac{S}{P-b} \quad , \quad r_c = \frac{S}{P-c}$$

قضیه *ثابت کنید حاصلضرب اندازه‌های دو ضلع از هر مثلث برابر است با حاصلضرب قطر دایرهٔ محیطی آن در ارتفاع نظیر ضلع سوم.*



برهان از A به مرکز دایره وصل کرده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره را در M قطع کند و از M به B وصل می‌کنیم.

$$A\hat{B}M = \frac{\overset{\frown}{ACM}}{۲} = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰$$

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{B}M = H_۱ = ۹۰^\circ \\ \hat{M} = \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABM} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{c}{h_a} = \frac{۲R}{b} \Rightarrow b.c = ۲R.h_a$$